目　录

目 录

第一部分　引　　言

认识到自己的无知，是迈向有知的一大步。

本杰明·狄斯雷利

第一章　数的基本性质

本章的标题简单地表达了阅读本书所需要的数学知识. 其实，这样简短的一章只是解释一下"数的基本性质"，所有这些性质——加法和乘法，减法和除法，方程和不等式的解法，因式分解以及其他的代数运算——都是我们早已熟悉的. 但是本章不是一次复习. 尽管这些问题是熟悉的，但我们即将进行的概括的研究，也许象是相当新奇的；其目的不是要对旧材料进行一次广泛复习，而是要将这些知识归纳成一些简明的数的性质. 甚至有些性质好象是过于明显因而无需提及，但是意想不到会有这么多不同而且重要的事实，原来都是我们所要强调的那些性质的推论.

在本章我们将要研究的十二个性质中，头九个是关于加法和乘法的基本运算. 目前我们只考虑加法，这种运算是对数偶进行的——对于任何两个已知数 a 和 b（当然，它们可能是相同的两个数），它们的和 $a+b$ 是存在的. 把加法看作可以同时对几个（至少三个）数来进行的运算，并把 n 个数 a_1，…，a_n 的和 $a_1+\cdots+a_n$ 当作一个基本概念，这样做好象是合理的. 不过，只考虑数偶的加法，并将其他的和用这种和来定义，这样做更为方便. 对于三个数 a, b 及 c 的和，可以用两种不同的方式来求. 可以先将 b 与 c 相加，得 $b+c$，然后将 a 加上该数，得 $a+(b+c)$；或先将 a 与 b 相加，然后将它们的和 $a+b$ 加上 c，得 $(a+b)+c$. 当然，所得到的这两个复合和是相等的，这个事实就是我们要列出的第一个性质：

(P1) 设 a, b 和 c 是任意数，则

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

这个性质清楚地说明：三个数的和的单独概念是多余的. 我们简

单地用 $a+b+c$ 表示数 $a+(b+c)=(a+b)+c$. 四个数的加法要求同样的考虑，虽然稍微复杂些. 将符号 $a+b+c+d$ 定义为

$$(1)\ ((a+b)+c)+d,$$

$$或(2)\ (a+(b+c))+d,$$

$$或(3)\ a+((b+c)+d),$$

$$或(4)\ a+(b+(c+d)),$$

$$或(5)\ (a+b)+(c+d).$$

这个定义是确定的，因为这些数全部相等. 幸亏，这些无需分别列出，因为它是已经列出的性质 P 1 的必然结果. 例如，由 P 1 知

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

由此立即可知(1)和(2)是相等的. (2)和(3)的相等是 P 1 的直接推论，虽然初看时可能不易看出（必须将 $b+c$ 看成为P 1 中的 b，d 看成为 c）. 等式(3)=(4)=(5)的证法也是简单的.

可能容易想到，应用 P 1 也足以证明：用可能有的十四种方式把五个数相加，其结果均相等，但若不具体列出这十四种形式的和，我们可能没有那么容易想出该怎样合理地安排这个证明. 以上步骤是可行的，但当考虑六个、七个或数目更多的数的集合时，我们宁可不用它. 对于任意有限个数 $a_1, \cdots, a_n$ 的集合，用这种方法证明其所有可能的和之相等，是完全不适当的. 虽然这种相等的事实可以认为是当然的，但若不怕麻烦想要证明它（这值得麻烦一次），在第 23 题中已经略述了一个合理的途径. 今后，我们通常将不言而喻地根据这一题的结论，干脆不管圆括弧的排列，将和写成

$$a_1+\cdots+a_n.$$

下面提出数 0 的一个很重要的性质：

（P 2）设 a 为任意数，则

$$a+0=0+a=a.$$

在我们所列的第三个性质中，0 也起重要作用：

(P 3)对于每一个数a,都有一个数$-a$使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

性质P 2应当还提出一个数0的特性,可以宽慰的是,我们已经能够证明这个特性.事实上,对于任意一数a,设有一数x满足

$$a+x=a,$$

则$x=0$(从而对于所有的数a,这等式也成立).证明这个断言的方法没有别的,只要从上列方程的两边减去a,即在两边加上$-a$即可.如下列详细的证明所示,为了证明这一运算是正确的,所有三个性质P 1—P 3都要用到.

设 $$a+x=a,$$

则 $$(-a)+(a+x)=(-a)+a=0;$$

因此 $$((-a)+a)+x=0;$$

因此 $$0+x=0;$$

因此 $$x=0.$$

正如我们刚才所暗示的,将减法看成是由加法引伸出来的一种运算,是比较方便的.我们将$a-b$看成是$a+(-b)$的缩写式.这样,应用类似于刚才解方程$a+x=a$时所用的一系列步骤(每一步均根据P 1, P 2或P 3得到),便能求出某些简单方程的解.例如:设

$$x+3=5,$$

则 $$(x+3)+(-3)=5+(-3);$$

因此 $$x+(3+(-3))=5-3=2;$$

因此 $$x+0=2;$$

因此 $$x=2.$$

当然,只有在你认识到这样费劲的解法总可以被替代之前,才会对这种解法感兴趣.实际上,为解一个方程而如此详细地列出所依据的性质P 1, P 2和P 3(或我们将要列出的进一步的性质中的任

一个)来，往往只会浪费时间.

加法的性质只有一个尚须提出. 当考虑 a、b 和 c 三数的和时，只提到两种和：$(a+b)+c$ 和 $a+(b+c)$. 实际上，若改变 a、b 和 c 的顺序，便可得到另外几种排列. 它们的和都是相等的，这是根据

(P 4)设 a 和 b 是任意的数，则

$$a+b=b+a.$$

P 4 着重指出，虽然数偶的加法运算似与两数的顺序有关，但实际上不是这样. 不是所有的运算都有这种性质，记住这一事实是有用的. 例如，减法就没有这种性质：通常 $a-b\neq b-a$. 我们顺便问一下，只有当什么时候才能使 $a-b=b-a$? 有趣的是，我们发现，如果只应用性质 P 1—P 4，我们将无法处理这个问题. 由代数的最基本的运算知，只有当 $a=b$ 时才有 $a-b=b-a$. 然而，这个事实不可能由性质 P 1—P 4 导出，仔细地用初等代数检查一下，看哪一(或几)步不能由 P 1—P 4 推得，这样做是有益的. 当提出另外一些性质之后，我们的确能详细指出每一步的根据. 不过，说来也奇怪，这个关键的性质却包含乘法.

乘法的基本性质幸亏和加法的基本性质相类似，只要稍加解释即可. 其意义和推论均应清楚. (和初等代数中一样，a 和 b 的乘积将用 $a\cdot b$ 表示，或简单地用 ab 表示.)

(P5)设 a, b 和 c 为任意数，则

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

(P6)设 a 为任意数，则

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

并且
$$1\neq 0.$$

(提出 $1\neq 0$ 这个断言，好象是一件奇怪的事，但我们必须把它提出来，因为无法在已列举的其他性质的基础上证明它——如果只有

一个数 0 时，这些性质都成立.）

（P7）对于每一个数 $a\neq 0$，必有一数 a^{-1} 使得

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1.$$

（P8）设 a 和 b 为任意数，则

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

值得强调的一个细节是在 P 7 中出现的 $a\neq 0$ 这个条件. 这个条件是十分必要的，因为对于所有的数 b，$0\cdot b=0$，所以没有一个数 0^{-1} 能满足 $0\cdot 0^{-1}=1$. 对于除法来说，这个限制有重要的影响. 正如减法用加法来定义一样，除法也可用乘法来定义：符号 a/b 意味着 $a\cdot b^{-1}$. 因为 0^{-1} 没有意义，所以 $a/0$ 也没有意义——除以 0 总是不定的.

性质 P 7 有两个重要的推论. 设 $a\cdot b=a\cdot c$，则未必 $b=c$；因为若 $a=0$，则不论 b 和 c 等于多少，$a\cdot b$ 和 $a\cdot c$ 都等于 0. 但若 $a\neq 0$，则 $b=c$；这可由 P 7 推导如下：

设 $a\cdot b=a\cdot c$ 以及 $a\neq 0$，

则 $a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot(a\cdot c)$；

因此 $(a^{-1}\cdot a)\cdot b=(a^{-1}\cdot a)\cdot c$；

因此 $1\cdot b=1\cdot c$；

因此 $b=c$.

设 $a\cdot b=0$，则或者 $a=0$ 或者 $b=0$，这也是 P 7 的一个推论. 实际上，

若 $a\cdot b=0$ 且 $a\neq 0$，

则 $a^{-1}(a\cdot b)=0$；

因此 $(a^{-1}\cdot a)\cdot b=0$；

因此 $1\cdot b=0$；

因此 $b=0$.

（可能出现 a 和 b 都等于零. 当我们说"或者 $a=0$ 或者 $b=0$"时

并不排除这个可能性．在数学中"或者"二字总是具有"是这一个或是另一个，或两者都是"的意思．）

P 7 的第二个推论通常用来解方程．例如，设一个数 x 满足

$$(x-1)(x-2)=0.$$

那么，或者 $x-1=0$，或者 $x-2=0$；由此得 $x=1$ 或 $x=2$．

根据迄今所列出的八个性质，我们所能证明的内容还很少．提出下一个性质（这个性质包含加法和乘法的运算）之后，将会迅速地改变这种情况．

（P 9）设 a，b 和 c 是任意数，则

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

（注意，根据 P 8，等式 $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ 也是成立的．）作为应用 P 9 之一例，我们现在来求什么时候 $a-b=b-a$：

设 $$a-b=b-a,$$

则 $$(a-b)+b=(b-a)+b=b+(b-a);$$

因此 $$a=b+b-a;$$

因此 $$a+a=(b+b-a)+a=b+b.$$

从而 $$a\cdot(1+1)=b\cdot(1+1),$$

所以 $$a=b.$$

P 9 的另一个应用是用来证明断言 $a\cdot 0=0$，这个断言我们早已提出，甚至在第 6 页的证明中已经用到它（你能找到在什么地方吗？）．纵然第一次提出这个事实时没有加以证明，我们也没有把它作为一个基本性质列出．只用 P 1—P 8 不可能证明这个事实，因为数 0 只在关于加法的 P 2 和 P 3 中出现，而上述的断言却涉及乘法．应用 P 9 就容易证明它，虽然可能不是显然的．我们有

$$\begin{aligned}a\cdot 0+a\cdot 0&=a\cdot(0+0)\\&=a\cdot 0;\end{aligned}$$

正如我们曾经提到的，由上式（两边加上 $-(a\cdot 0)$）立即可得 $a\cdot 0=0$.

P 9 的一系列进一步的推论，可以帮助解释一个稍难理解的法则：即两个负数的乘积是正数．首先，我们证明 $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$ 这个比较容易接受的断言．为了证明它，我们注意到

$$\begin{aligned}(-a)\cdot b+a\cdot b&=[(-a)+a]\cdot b\\&=0\cdot b\\&=0.\end{aligned}$$

由此（两边加上 $-(a\cdot b)$）即得 $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$．现在注意到

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b)+[-(a\cdot b)]&=(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot b\\&=(-a)\cdot[(-b)+b]\\&=(-a)\cdot 0\\&=0.\end{aligned}$$

于是，两边加上 $(a\cdot b)$ 即得

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

因此，两个负数的乘积是正数的事实是 P 1—P 9 的推论．换言之，如果我们要 P 1 至 P 9 成为正确的，则必然得出上述关于两负数之积的法则．

迄今所研究的 P 9 的各种推论，虽然有趣并且重要，但是却都没有真正地揭示出 P 9 的意义，因为我们毕竟可以将这些性质分别列出．实际上，P 9 几乎是所有代数运算的依据．例如，虽然我们已经指出如何解下列方程

$$(x-1)(x-2)=0,$$

但是我们很少遇到这种形式的方程．我们多半遇到如下的方程

$$x^2-3x+2=0.$$

"因子分解" $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，实际上是三次应用 P 9：

$$\begin{aligned}(x-1)\cdot(x-2)&=x\cdot(x-2)+(-1)\cdot(x-2)\\&=x\cdot x+x\cdot(-2)+(-1)\cdot x+(-1)\cdot(-2)\\&=x^2+x[(-2)+(-1)]+2\\&=x^2-3x+2.\end{aligned}$$

说明P 9重要性的最后一个事实是：我们每次将阿拉伯数码相乘时，实际上都用到这个性质. 例如，下列计算

$$\begin{array}{r}13\\ \times 24\\ \hline 52\\ 26\ \\ \hline 312\end{array}$$

是下列方程的简明的排列：

$$\begin{aligned}13\cdot 24&=13\cdot(2\cdot 10+4)\\&=13\cdot 2\cdot 10+13\cdot 4\\&=26\cdot 10+52.\end{aligned}$$

(注意，在竖式计算中将26向左移，相当于写26·10)乘法 $13\cdot 4=52$ 也是应用P9：

$$\begin{aligned}13\cdot 4&=(1\cdot 10+3)\cdot 4\\&=1\cdot 10\cdot 4+3\cdot 4\\&=4\cdot 10+12\\&=4\cdot 10+1\cdot 10+2\\&=(4+1)\cdot 10+2\\&=5\cdot 10+2\\&=52.\end{aligned}$$

性质P1—P9都有描述性的名称，这些名称虽然都无需记住，但是有了名称往往便于引用. 我们将借此机会把性质P1—P9列在一起，并指出其常用名称.

(P1)(加法结合律)　　　$a+(b+c)=(a+b)+c.$

(P 2)(加法单位元的存在)　$a+0=0+a=a.$

(P 3)(加法逆元的存在)　$a+(-a)=(-a)+a=0.$

(P 4)(加法交换律)　$a+b=b+a.$

(P 5)(乘法结合律)　$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$

(P 6)(乘法单位元的存在)　$a\cdot 1=1\cdot a=a$; $1\neq 0$.

(P 7)(乘法逆元的存在)　$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$, 其中 $a\neq 0$.

(P 8)(乘法交换律)　$a\cdot b=b\cdot a.$

(P 9)(分配律)　$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$

尚需列出的数的三个基本性质是关于不等式的. 不等式虽然在初等数学中很少遇到, 但在微积分中却起重要的作用. 不等式的两种记法, $a<b$(a 小于 b)和 $a>b$(a 大于 b), 是紧密相关的: $a<b$ 和 $b>a$ 的意义相同 (因而 $1<3$ 和 $3>1$ 只是同一断言的两种写法). 满足 $a>0$ 的数 a 称为**正数**, 满足 $a<0$ 的数 a 称为**负数**. 于是正数可以用$<$来定义, 反之: $a<b$ 可以表示 $b-a$ 是正数. 其实, 将所有正数的集合作为基本概念, 用 P 表示, 并将所有的性质都用 P 来表示, 这样做是方便的:

(P 10)(三分律)每一个数 a 满足并且只满足下列三种情况中的一种:

(i)　$a=0$,

(ii)　a 在集合 P 内,

(iii)　$-a$ 在集合 P 内.

(P 11)(加法封闭性)若 a 和 b 在 P 内, 则 $a+b$ 在 P 内.

(P 12)(乘法封闭性)若 a 和 b 在 P 内, 则 $a\cdot b$ 在 P 内.

这三个性质需要下列定义来补充:

若 $a-b$ 在 P 内　则称 $a>b$;

若 $b>a$　则称 $a<b$;

若 $a>b$ 或 $a=b$　则称 $a\geq b$;

若 $a<b$ 或 $a=b$ 则称 $a\leqslant b$.*

特别要注意：当且仅当 a 在 P 内时 $a>0$.

关于不等式的所有常见的事实，尽管它们好象是基本的，但却都是 P10—P12 的推论．例如，若 a 和 b 为任意两数，它们只满足下列三种情况中的一种：

(i) $a-b=0$,

(ii) $a-b$ 在集合 P 内,

(iii) $-(a-b)=b-a$ 在集合 P 内.

应用刚才所下的定义，可以说它们只满足下列三种情况中的一种：

(i) $a=b$,

(ii) $a>b$,

(iii) $b>a$.

一个较为有趣的事实是由下列演算得出的．若 $a<b$，则 $b-a$ 在 P 内，于是 $(b+c)-(a+c)$ 一定在 P 内；故若 $a<b$，则 $a+c<b+c$．同样地，假设 $a<b$ 和 $b<c$，则

$$b-a \text{ 在 } P \text{ 内},$$

且

$$c-b \text{ 在 } P \text{ 内},$$

于是

$$c-a=(c-b)+(b-a) \text{ 在 } P \text{ 内}.$$

这说明，若 $a<b$ 和 $b<c$，则 $a<c$.（$a<b$ 和 $b<c$ 这两个不等式通常简写成 $a<b<c$，该式包含了第三个不等式 $a<c$.）

下列断言并不很显然：如果 $a<0$ 和 $b<0$，则 $ab>0$．证明时所遇到的唯一困难是定义的解释．按定义，符号 $a<0$ 表示 $0>a$,

---

* 符号 $\geqslant$ 和 $\leqslant$ 有一点会使人迷惑．下列两式

$$1+1\leqslant 3$$

$$1+1\leqslant 2$$

都是正确的．尽管我们知道第一式中的 $\leqslant$ 可以用 $<$ 代替，第二式可用 $=$ 代替．出现这种情形必定是 $\leqslant$ 用于具体的数时；这种符号的用处在定理 1 的表述中表现出来——这里等式适用于 a 和 b 的某些值，而不等式适用于其他的值.

这意味着 $0-a=-a$ 在 P 内. 同样的, $-b$ 在 P 内, 于是根据 P 12 得 $(-a)(-b)=ab$ 在 P 内. 因而 $ab>0$.

如果 $a>0, b>0$, 或者 $a<0, b<0$, 则 $ab>0$, 这个事实有一个特殊的推论: 若 $a\neq 0$, 则 $a^2>0$. 于是, 非零之数的平方恒为正数. 特别地, 我们证明了一个好象十分基本的结论: $1>0$ (因为 $1=1^2$), 这个结论包含在我们前面所列的性质中.

若 $a<0$ 则 $-a>0$, 这个事实是在本书中将起非常重要作用的一个概念的基础. 对于任意数 a, 我们将 a 的**绝对值** $|a|$ 定义如下:

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a\leqslant 0, \end{cases}$$

注意, 除 $a=0$ 之外, $|a|$ 恒为正数. 例如, 我们有 $|-3|=3$, $|7|=7$, $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}|=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 和 $|1+\sqrt{2}-\sqrt{10}|=\sqrt{10}-\sqrt{2}-1$. 一般地说, 研究任何包含绝对值的问题时, 最直截了当的方法是将各种情形分开讨论, 因为绝对值一开始就是按多种情形定义的. 这种方法可用来证明下列关于绝对值的非常重要的事实.

定理 1 对于所有的数 a 和 b, 我们有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证 我们应考虑四种情形:

(1) $a\geqslant 0, b\geqslant 0$;

(2) $a\geqslant 0, b\leqslant 0$;

(3) $a\leqslant 0, b\geqslant 0$;

(4) $a\leqslant 0, b\leqslant 0$.

在情形(1)中, 我们也有 $a+b\geqslant 0$, 因此, 该定理是显然的; 事实上,

$$|a+b|=a+b=|a|+|b|,$$

于是，在这种情形中，等式成立。

在情形(4)中我们有 $a+b\leqslant 0$，于是等式再次成立：

$$|a+b|=-(a+b)=-a+(-b)=|a|+|b|.$$

在情形(2)中，有 $a\geqslant 0$ 和 $b\leqslant 0$，我们必须证明

$$|a+b|\leqslant a-b,$$

因此，这种情形可以再分为两种情况．如果 $a+b\geqslant 0$，那么我们必须证明

$$a+b\leqslant a-b,$$

即

$$b\leqslant -b,$$

上式当然成立，因为 b 是负数，而 $-b$ 是正数．另一种情况，若 $a+b\leqslant 0$，我们必须证明

$$-a-b\leqslant a-b,$$

即

$$-a\leqslant a,$$

上式当然成立，因为 a 是正数，而 $-a$ 是负数．

最后，注意情形(3)直接能得到证明，只要利用情形(2)将 a 与 b 对调即可．

虽然这样处理绝对值的方法(将各种情形分开考虑)有时是唯一可用的方法，但经常有更简单的方法可以应用．其实，对于定理1有一个简短得多的证法．这种证法是由观察

$$|a|=\sqrt{a^2}$$

后得到启发的．(这里，并且贯穿全书，$\sqrt{x}$ 表示 x 的正的平方根；这个符号只有当 $x\geqslant 0$ 时才有定义．)我们现在注意到

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2&=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\&\leqslant a^2+2|a|\cdot|b|+b^2\\&=|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2\\&=(|a|+|b|)^2.\end{aligned}$$

由此推断出 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，这是因为当 x 和 y 都是非负时，

$x^2<y^2$ 意味着 $x<y$；这个事实留给读者证明(第5题).

最后观察一下我们刚才证明的定理：仔细观察以上任何一种的证明便能看到，若 a 与 b 同号(即两者都是正的或都是负的)或两数中的一数为0，则

$$|a+b|=|a|+|b|.$$

若 a 与 b 符号相反，则

$$|a+b|<|a|+|b|.$$

在将结束本章时，我们来研究一个迄今仍被忽视的微妙的要点，在严格地研究数的性质时需要用到它．在叙述性质9之后，我们证明了 $a-b=b-a$ 意味着 $a=b$．这个证明由建立

$$a\cdot(1+1)=b\cdot(1+1)$$

开始，由此我们断定 $a=b$．这个结果是由方程 $a\cdot(1+1)=b\cdot(1+1)$ 的两边除以 $1+1$ 得到的．除以0是绝对要避免的，因此必须承认，上述论点之正确是基于已知 $1+1\neq0$．列出第24题的目的是为了使你相信这个事实不可能单独由性质P1—P9证出；不过，一旦有了P10，P11及P12，证明就很简单：我们已经看到 $1>0$；因而 $1+1>0$，于是 $1+1\neq0$.

前一段的论证，也许只会使你更加感到，费脑筋去证明这样明显的事实是可笑的，但是公正地评论我们目前的情况，将会有助于认为如此仔细认真地考虑是有道理的．我们在本章中假设数是熟悉的对象，并且假设P1—P12只是明确地陈述显然的、熟知的数的性质．然而，要证明这种假设是困难的．虽然我们在学校里学会如何与数"打交道"，但对于数到底是什么仍然是模糊的．本书的很多地方专注于解释数的概念，并且在本书结束之前，我们将会十分熟悉这个概念．但在整本书中，我们需要与数打交道．因此，有理由直爽地认为，我们仍未彻底地理解数．我们还可以说，无论最终用什么方法来定义数，它们都必须具有性质P1—P12.

本章大部分的内容就是想提出有力的证据来说明：P1—P 12 的确是为了导出其他常见的数的性质所必须假定的基本性质．有些习题（它们是从P1—P12 诱导出来的关于数的其他事实）也是用来作为进一步的证据．现在仍有一个关键的问题，即 P1—P12 能否真正说明数的全部性质．其实，我们即将看到它们并非如此．在下一章中，性质 P1—P 12 的不足之处将变得十分明显，纠正这些缺陷的真正含意却不是那么容易看出的．我们所要找的这个决定性的添加的数的基本性质是深刻而且微妙的，它与 P1—P 12 很不相同．要找出这个关键性的性质需要本书第二部分的全部工作．在第一部分的剩余内容里，我们要开始注意为什么需要添加一个性质，为了研究这个问题，我们将不得不更仔细地研究我们所谓的“数”．

习　题

1．证明下列各式．

(i) 若对某一数 $a\neq 0$，$ax=a$，则 $x=1$．

(ii) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$．

(iii) 若 $x^2=y^2$，则 $x=y$ 或 $x=-y$．

(iv) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$．

(v) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$．

(vi) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$．（这一题有一种特别容易的证法，应用 (iv)；它也指明当 n 是奇数时，如何将 x^n+y^n 进行因式分解．）

2．下列的“证明”错在哪里？设 $x=y$，则

$$x^2=xy,$$

$$x^2-y^2=xy-y^2,$$

$$(x+y)(x-y)=y(x-y),$$

$$x+y=y,$$

$$2y=y,$$

$$2=1.$$

3. 证明下列各题.

(i) 设 $b, c\neq 0$, 则 $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

(ii) 设 $b, d\neq 0$, 则 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

(iii) 设 $a, b\neq 0$, 则 $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$. (为了证明这一题, 必须回忆 $(ab)^{-1}$ 的定义性质.)

(iv) 设 $b, d\neq 0$, 则 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

(v) 设 $b, c, d\neq 0$, 则 $\frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

(vi) 设 $b, d\neq 0$, 则当且仅当 $ad=bc$ 时 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 并确定何时 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$.

4. 求下列各题中 x 所有的数值.

(i) $4-x<3-2x$.

(ii) $5-x^2<8$.

(iii) $5-x^2<-2$.

(iv) $(x-1)(x-3)>0$. (两数的乘积什么时候是正的?)

(v) $x^2-2x+2>0$.

(vi) $x^2+x+1>2$.

(vii) $x^2-x+10>16$.

(viii) $x^2+x+1>0$.

(ix) $(x-\pi)(x+5)(x-3)>0$.

(x) $(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2})>0$.

(xi) $2^x<8$.

(xii) $x+3^x<4$.

(xiii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0$.

(xiv) $\frac{x-1}{x+1}>0$.

5. 证明下列各题.

(i) 设 $a<b$ 和 $c<d$, 则 $a+c<b+d$.

(ii) 设 $a<b$, 则 $-b<-a$.

(iii) 设 $a<b$ 和 $c>d$, 则 $a-c<b-d$.

(iv) 设 $a<b$ 和 $c>0$, 则 $ac<bc$.

(v) 设 $a<b$ 和 $c<0$, 则 $ac>bc$.

(vi) 设 $a>1$, 则 $a^2>a$.

(vii) 设 $0<a<1$, 则 $a^2<a$.

(viii) 设 $0\leqslant a<b$ 和 $0\leqslant c<d$, 则 $ac<bd$.

(ix) 设 $0\leqslant a<b$, 则 $a^2<b^2$. (应用(viii).)

(x) 设 $a, b\geqslant 0$ 和 $a^2<b^2$, 则 $a<b$. (应用(ix), 反证.)

6. 已知 $0<a<b$, 证明

$$a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b.$$

注意, 只要设 $a, b>0$, 无需另设$a<b$便能得到不等式 $\sqrt{ab}<(a+b)/2$. 这个事实的推广见习题二, 20.

*7. (a) 设 $x^n=y^n$, 并且 n 是奇数, 证明 $x=y$. 提示: 先说明为什么只要考虑 $x, y>0$; 然后证明 $x<y$ 和 $y<x$ 都是不可能的.

(b) 设 $x^n=y^n$, 并且 n 是偶数, 证明 $x=y$ 或 $x=-y$.

*8. 虽然不等式的基本性质是用所有正数的集合 P 来陈述的, 并且<是用 P 来定义的, 但这个顺序可以颠倒. 设 P10—P12 被代替如下:

(P′10) 对于任意数 a 和 b, 必有且仅有下列情况之一:

(i) $a=b$,

(ii) $a<b$,

(iii) $b<a$.

(P′11) 对于任意数 a, b 和 c, 若 $a<b$ 和 $b<c$, 则 $a<c$.

(P'12) 对于任意数 a, b 和 c, 若 $a<b$, 则 $a+c<b+c$.

(P'13) 对于任意数 a, b 和 c, 若 $a<b$ 和 $0<c$, 则 $ac<bc$.

证明 P10—P12 可以作为定理导出.

9. 用至少去掉一个绝对值符号后的形式来表示下列各题.

(i) $|\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}|$.

(ii) $|(|a+b|-|a|-|b|)|$.

(iii) $|(|a+b|+|c|-|a+b+c|)|$.

(iv) $|x^2-2xy+y^2|$.

(v) $|(|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}|)|$.

10. 用去掉绝对值符号后的形式来表示下列各题, 必要时可以分几种情况

来论述.

(i) $|a+b|-|b|$.

(ii) $|(|x|-1)|$.

(iii) $|x|-|x^2|$.

(iv) $a-|(a-|a|)|$.

11. 求下列各题中 x 所有的值.

(i) $|x-3|=8$.

(ii) $|x-3|<8$.

(iii) $|x+4|<2$.

(iv) $|x-1|+|x-2|>1$.

(v) $|x-1|+|x+1|<2$.

(vi) $|x-1|+|x+1|<1$.

(vii) $|x-1|\cdot|x+1|=0$.

(viii) $|x-1|\cdot|x+2|=3$.

12. 证明下列各题.

(i) $|xy|=|x|\cdot|y|$.

(ii) 设 $x\neq0$, 则 $\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$. (证明该题的最好方法是回忆一下 $|x|^{-1}$ 是什么意思.)

(iii) 设 $y\neq0$, 则 $\frac{|x|}{|y|}=\left|\frac{x}{y}\right|$.

(iv) $|x-y|\leqslant|x|+|y|$. (作出非常短的证明.)

(v) $|x|-|y|\leqslant|x-y|$. (证法如果适当, 可以非常简短.)

(vi) $|(|x|-|y|)|\leqslant|x-y|$. (为什么本题可以立即由(v)推得?)

(vii) $|x+y+z|\leqslant|x|+|y|+|z|$. 指出何时等式成立, 并证之.

13. 两数 x 和 y 中之大者用 $\max(x,y)$ 表示. 比如, $\max(-1,3)=\max(3,3)=3$ 和 $\max(-1,-4)=\max(-4,-1)=-1$. x 和 y 中之者小用 $\min(x,y)$ 表示. 证明

$$\max(x,y)=\frac{x+y+|y-x|}{2},$$

$$\min(x,y)=\frac{x+y-|y-x|}{2}.$$

通过诸如 $\max(x,y,z)=\max(x,\max(y,z))$ 的关系导出 $\max(x,y,z)$

和 $\min(x, y, z)$ 的公式.

14. (a) 证明 $|a|=|-a|$. (秘诀是不要被多种情况搞乱. 先证明当 $a\geqslant 0$ 时上式成立, 然后说明为什么当 $a\leqslant 0$ 时上式显然成立.)

(b) 证明: 当且仅当 $|a|\leqslant b$ 时 $-b\leqslant a\leqslant b$. 特别, 由此可得

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

(c) 用此事实重新证明 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

*15. (a) 应用第 1 和第 7 题证明: 若 x 和 y 不同时为 0, 则

$$x^2+xy+y^2\neq 0,$$

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\neq 0.$$

对每个 $x\neq 0$ 和某些正或负的 y(比如 $y=\pm x$), 上列各式都是正的; 因此好象有理由将 $\neq$ 号用 $>$ 号来代替. 虽然这样替代是正确的, 但我们尚未证明它(见习题七, 9). 本题的(b)和(d)提出一个直接的证法, 证明 $>$ 号成立.

(b) 应用下列事实

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2\geqslant 0,$$

证明 $x^2+xy+y^2<0$ 之假设必导致矛盾.

(c) 用类似方法证明: 若 x 和 y 不同时为 0, 则

$$4x^2+6xy+4y^2>0,$$

$$3x^2+5xy+3y^2>0.$$

**(d) 设 x 和 y 不同时为零, 证明

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4>0.$$

*16. (a) 证明

只有当 $x=0$ 或 $y=0$ 时 $(x+y)^2=x^2+y^2$,

只有当 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x=-y$ 时 $(x+y)^3=x^3+y^3$.

(b) 应用第 15 题, 求何时 $(x+y)^4=x^4+y^4$.

**(c) 试求何时 $(x+y)^5=x^5+y^5$. 提示: 由 $(x+y)^5=x^5+y^5$ 这个假设可以推得: 当 $xy\neq 0$ 时 $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=0$. 这一等式意味着 $(x+y)^3=x^2y+xy^2=xy(x+y)$.

现在你应能推测何时 $(x+y)^n=x^n+y^n$; 其证明见习题十一, 41.

17. (a) 设 $b^2-4c\geqslant 0$. 证明下列两数

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2},\quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

均满足方程 $x^2+bx+c=0$.

(b) 设 $b^2-4c<0$, 证明没有一个数 x 能满足 $x^2+bx+c=0$, 其实, 对于所有的 x 有 $x^2+bx+c>0$. 提示:"配平方", 即写

$$x^2+bx+c=(x+b/2)^2+?$$

(c) 应用这个事实, 重新证明: 若 x 和 y 不同时为0, 则 $x^2+xy+y^2>0$.

(d) 当 x 和 y 不同时为 0 时, 哪些数 α 能满足 $x^2+\alpha xy+y^2>0$?

(e) 求 x^2+bx+c 和 ax^2+bx+c (其中 $a\neq 0$) 的最小值. (应用(b)中的技巧.)

18. 对于所有的数 a, $a^2\geqslant 0$ 这个事实看起来很简单, 然而却是许多重要不等式得以建立的基本思想. 所有不等式的始祖是许瓦尔兹不等式:

$$x_1y_1+x_2y_2\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

在下列三种关于许瓦尔兹不等式的证法提要中, 只有一点是共同的——它们都是以"对于所有的 a 有 $a^2\geqslant 0$"这个事实为基础的.

(a) 先证明

$$(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)=(x_1y_1+x_2y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2,$$

从而导出许瓦尔兹不等式.

(b) 设对于某一数 λ, 有 $x_1=\lambda y_1$ 和 $x_2=\lambda y_2$, 证明许瓦尔兹不等式中的等式成立. 设 $y_1=y_2=0$, 证明许瓦尔兹不等式中的等式成立. 现在假设 y_1 和 y_2 不同时为 0, 并且没有一个数 λ 能满足 $x_1=\lambda y_1$ 和 $x_2=\lambda y_2$. 则

$$\begin{aligned}0&<(\lambda y_1-x_1)^2+(\lambda y_2-x_2)^2\\&=\lambda^2(y_1^2+y_2^2)-2\lambda(x_1y_1+x_2y_2)+(x_1^2+x_2^2).\end{aligned}$$

应用第 17 题, 完成许瓦尔兹不等式的证明.

(c) 应用 $2xy\leqslant x^2+y^2$ (该式如何导出?) 以及

$$x=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ y=\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\ (\text{先令 } i=1, \text{再令 } i=2),$$

来证明许瓦尔兹不等式.

(d) 分别由上列三个证明推出: 只有当 $y_1=y_2=0$ 或当有一个数 λ 使得 $x_1=\lambda y_1$ 和 $x_2=\lambda y_2$ 时, 等式才成立.

在我们下面的作业中, 关于不等式的三个事实是关键的. 虽然将在正文的适当位置提出其证明, 但是亲自研究这些问题将比阅读完全现成的证明能得到更多的启发. 虽然这些命题的内容包括某些古怪的

数，但是它们的基本要旨是很简单的：设 x 充分接近 x_0，且 y 充分接近 y_0，则 $x+y$ 接近 x_0+y_0，xy 接近 x_0y_0，并且 $1/y$ 接近 $1/y_0$. 在这些命题中出现的符号"ε"是希腊字母的第五个，并且可以用比较常见的罗马字母来代替；然而，在用到这些定理的行文中，使用 ε 已成为难以更改的习惯.

19. 设

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ 和 } |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

证明

$$|(x+y)-(x_0+y_0)|<\varepsilon,$$
$$|(x-y)-(x_0-y_0)|<\varepsilon.$$

*20. 设

$$|x-x_0|<\min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right) \text{及 } |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

证明

$$|xy-x_0y_0|<\varepsilon.$$

(记号"min"在第 13 题中已经定义过，但当时所列出的公式与此处不相干；在上列的假设中，头一个不等式意味着

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)} \text{和} |x-x_0|<1.$$

论证时，有时需要第一个不等式，有时需用第二个不等式. 尚需注意：因在假设中只有关于 $x-x_0$ 和 $y-y_0$ 的信息，因此在证明时必然要用包含 $x-x_0$ 和 $y-y_0$ 的形式来表示 $xy-x_0y_0$.)

*21. 设 $y_0\neq 0$ 且

$$|y-y_0|<\min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

证明 $y\neq 0$ 且

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\varepsilon.$$

*22. 将下列式中的问号用包含 ε, x_0 和 y_0 的表达式来代替，使其结论能够成立：设 $y_0\neq 0$ 且

$$|y-y_0|<? \text{ 和 } |x-x_0|<?$$

则 $y\neq 0$ 且

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{x_0}{y_0}\right|<\varepsilon.$$

因几乎无需什么演算，其解答便能由第20及21题推得（注意 $x/y=x\cdot 1/y$），从这个意义说，本题是显然的．关键在于不要混淆，断定要先用这两题中的哪一题，假使你的答案有点不象的话，也不要恐慌．

*23. 本题指出：和与括号的实际排列不相干．其证明包含"数学归纳法"，假使你不熟悉这种证法而仍想解决这个问题，可以留待第二章之后解决，第二章将介绍用归纳法的证法．

为确定起见，我们约定 $a_1+\cdots+a_n$ 表示

$a_1+(a_2+(a_3+\cdots+(a_{n-2}+(a_{n-1}+a_n)))\cdots)$.

于是 $a_1+a_2+a_3$ 表示 $a_1+(a_2+a_3)$，而 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 表示

$$a_1+(a_2+(a_3+a_4)),$$

等等．

(a) 证明

$$(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}=a_1+\cdots+a_{k+1}.$$

提示：对 k 用归纳法．

(b) 证明，若 $n\geqslant k$，则

$$(a_1+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+\cdots+a_n)=a_1+\cdots+a_n.$$

提示：应用(a)给出一个对 k 用归纳法的证明．

(c) 以 $s(a_1,\cdots,a_k)$表示由 $a_1,\cdots,a_k$ 构成的某个和．证明

$$s(a_1,\cdots,a_k)=a_1+\cdots+a_k.$$

提示：必有两个和 $s'(a_1,\cdots,a_l)$与 $s''(a_{l+1},\cdots,a_k)$，使得

$$s(a_1,\cdots,a_k)=s'(a_1,\cdots,a_l)+s''(a_{l+1},\cdots,a_k).$$

24. 如果我们把"数"理解为0或1，并且将+和·定义为满足下列两表的运算，

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

验证性质P1—P9都成立，即使 $1+1=0$.

选题解答

1. (i) $1=a^{-1}a=a^{-1}(ax)=(a^{-1}a)x=1\cdot x=x.$

(iii) 设 $x^2=y^2$, 则 $0=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, 因此 $x-y=0$或$x+y=0$, 即 $x=y$ 或 $x=-y$.

(vi) 将(iv)中的 y 用 $-y$ 来代替.

2. 有一步要除以 $x-y=0$.

3. (i) $a/b=ab^{-1}=(ac)(b^{-1}c^{-1})=(ac)(bc)^{-1}$(根据(iii))$=ac/bc$.

(ii) $(ad+bc)/(bd)=(ad+bc)(bd)^{-1}=(ad+bc)(b^{-1}d^{-1})$(根据(iii))$=ab^{-1}+cd^{-1}=a/b+c/d$.

(iii) $ab(a^{-1}b^{-1})=(a\cdot a^{-1})(b\cdot b^{-1})=1$, 因此 $a^{-1}\cdot b^{-1}=(ab)^{-1}$.

(v) $(a/b)/(c/d)=(a/b)(c/d)^{-1}=(a\cdot b^{-1})(c\cdot d^{-1})^{-1}$
$=(a\cdot b^{-1})(c^{-1}\cdot d)=ad(b^{-1}\cdot c^{-1})=ad(bc)^{-1}=(ad)/(bc)$.

4. (i) $x<-1$.

(iii) $x>\sqrt{7}$ 或 $x<-\sqrt{7}$.

(v) 因 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, 故为所有的 x.

(vii) $x>3$ 或 $x<-2$; 因为 3 和 -2 是 $x^2-x-6=0$ 的根.

(ix) $x>\pi$ 或 $-5<x<3$.

(xi) $x<3$.

(xiii) $0<x<1$.

5. (i) $b-a$ 和 $d-c$ 都在P内, 因而$(b-a)+(d-c)=(b+d)-(a+c)$在P内. 于是 $b+d>a+c$.

(iii) 应用(ii), $-c<-d$; 于是(i)意味着 $a+(-c)<b+(-d)$.

(v) $(b-a)$和 $-c$ 都在P内, 于是 $-c(b-a)=ac-bc$ 在P内, 即 $ac>bc$.

(vii) 应用(iv), $a>0$ 和 $a<1$, 于是 $a^2<a$.

(ix) 用 a 和 b 分别代换(viii)中的 c 和 d.

9. (i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

(iii) $|a+b|+|c|-|a+b+c|$.

(v) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$.

10. (i) 若 $a\geqslant -b$ 且 $b\geqslant 0$, 则为 a;
若 $a\leqslant -b$ 且 $b\leqslant 0$, 则为 $-a$;
若 $a\geqslant -b$ 且 $b\leqslant 0$, 则为 $a+2b$;
若 $a\leqslant -b$ 且 $b\geqslant 0$, 则为 $-a-2b$.

(iii) 若 $x\geqslant 0$, 则为 $x-x^2$;

若$x\leqslant 0$，则为 $-x-x^2$。

11. (i) $x=11, -5$.

(iii) $-6<x<-2$.

(v) 没有x(由x至1的距离加上由x至-1的距离至少为2).

(vii) $x=1, -1$.

12. (i) $(|xy|)^2=(xy)^2=x^2y^2=|x|^2|y|^2=(|x|\cdot|y|)^2$；由于$|xy|$和$|x|\cdot|y|$都$\geqslant 0$，因而$|xy|=|x|\cdot|y|$.

(iii) $|x|/|y|=|x|\cdot|y|^{-1}=|x|\cdot|y^{-1}|$ (根据(ii)) $=|xy^{-1}|$ (根据(i)) $=|x/y|$.

(v) 由(iv)得$|x|=|y-(y-x)|\leqslant|y|+|y-x|$，于是

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$

(vii) $|x+y+z|\leqslant|x+y|+|z|\leqslant|x|+|y|+|z|$.

设等式成立，则$|x+y|=|x|+|y|$，于是x和y同号，并且，z必须与$x+y$同号，因此x，y和z必须全部同号(除非有一个为0).

第二章　各种类型的数

在第一章中尽管我们谈到了数的基本性质，但在应用“数”这个词时却很不严格．现在需要仔细区分各种类型的数．

最简单的数是“计数的数”

$$1, 2, 3, \cdots\cdots$$

这个数的集合的基本意义用符号 N（自然数 natural number 的第一个字母）反映出来．简略地看一下 P1—P12即可发现，我们所列的“数”的基本性质不适用于 N——例如，P2 和 P3 对于 N 没有意义．从这个观点来看，系统 N 有许多不足之处．然而，在我们考虑更大的数的集合之前，对于应当作的种种研究，N 是十分重要的．

N 的最基本的性质是“数学归纳法”原理．假设 $P(x)$ 表示性质 P 对于数 x 成立．数学归纳法原理指出，若

(1) $P(1)$是正确的，

(2) 只要 $P(k)$正确，$P(k+1)$ 就是正确的，则对于所有自然数 x 来说，$P(x)$是正确的．

注意，条件(2)只是在假设 $P(k)$是正确的前提下断言$P(k+1)$的正确；如果条件（1）也成立，这就足以保证对于所有 x 来说 $P(x)$都是正确的．其实，若 $P(1)$成立，则 $P(2)$成立(将(2)应用于 $k=1$ 的特殊情况)．现在，因为 $P(2)$成立，因而 $P(3)$成立(将(2)应用于 $k=2$ 的特殊情况)．显然，连续应用这种步骤，最终能遍及于每一个数，于是对于所有数 k 来说，$P(k)$都能成立．

我们常用下面的比喻来说明数学归纳法原理．我们想象有一无穷队列的人

1 号人，2 号人，3 号人，……

若要求每一个人将他所听到的一个秘密告诉给在他后面的一个人(紧接在他后面的，有最大号数的那个人)，并且我们将一个秘密告诉 1 号人，这样，每一个人终于都能听到这个秘密. 设 $P(x)$表示 x 号人将听到这个秘密，则根据上列的要求(将所听到的秘密告诉紧接后面的一个人)便能使条件(2)成立，而将秘密告诉 1 号人则使(1)成立. 下列的例子是数学归纳法的正式应用. 有一个有用并且引人注目的公式，它用简单的形式表示出前 n 个数的和:

$$1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

为了证明这个公式，首先注意到对于 $n=1$ 该式显然成立. 现在假设对于某一整数 k，我们有

$$1+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则

$$\begin{aligned}1+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+k+1\\&=\frac{k(k+1)+2k+2}{2}\\&=\frac{k^2+3k+2}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2},\end{aligned}$$

于是对于 $k+1$，原等式也成立. 根据归纳法原理，便证明了该式对于所有自然数 n 都成立. 这个特殊的例子说明一个经常遇到的现象，特别是关于与刚才证明的公式相类似的公式. 虽然应用归纳法的证明通常是十分简单的，但是用以找出公式的方法还是一个谜. 第 4 和第 5 题说明这种类型的某些公式是怎样导出的.

数学归纳法的原理可以用一个等价的方式来陈述，而不必涉及数的“性质”，“性质”一词相当含糊，在数学讨论中是要避开

的. 一个更明确的形式的陈述是：设 A 为任意自然数的集合，并且

(1) 1 在 A 内，

(2) 每当 k 在 A 内时，$k+1$ 也在 A 内，

则 A 为所有自然数的集合. 显然，这样陈述足以代替先前提出的不够形式的提法——我们只考虑满足 $P(x)$ 的自然数 x 的集合 A. 例如，假设 A 是满足下式

$$1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

的自然数 n 的集合. 先前对此公式的证明表明 A 包含 1，且若 k 在 A 内，则 $k+1$ 也在 A 内. 可见 A 是所有自然数的集合，亦即上式对于所有自然数 n 都成立.

另外还有一个关于数学归纳法原理的严格陈述，看起来很不一样. 设 A 为任意自然数的集合，这会诱使我们说 A 一定有一个最小元. 实际上，仔细推敲起来，这种说法是不正确的. 自然数的一个特别重要的集合是根本不包含自然数的集合 A，即"空集"或"零集"*，以 $\varnothing$ 表示. 零集 $\varnothing$ 是一个没有最小元的自然数的集合——事实上，它根本没有元. 不过，这是唯一可能的例外. 如果 A 是自然数的非零集，则 A 有一个最小元. 这个"直观并且明显"的陈述即所谓"良序原理"可用归纳法原理证明如下. 假设集 A 没有最小元. 设 B 为使 $1,\cdots,n$ 全部不在 A 内的自然数 n 的集. 显然 1 在 B 内(因若 1 在 A 内，则 A 将以 1 作为最小元). 并且，若 $1,\cdots,k$ 不在 A 内，则 $k+1$ 必定不在 A 内(否则 $k+1$ 将成为 A 的最小元)，因此，$1,\cdots,k+1$ 都不在 A 内. 这表示，如果 k 在 B 内则

---

* 虽然按通常意义来说，零集不能成为一个集合，但它在许多行文中十分自然地出现. 我们经常考虑由满足某一性质 P 的所有 x 组成的集 A，往往因不能保证有任何一个数能满足 P 而说 A 可能为 $\varnothing$——实际上我们常用指出 $A=\varnothing$ 的办法来证明 P 总是不成立的.

$k+1$在B内．由此得知每一个数n都在B内，亦即对于任何自然数n来说，数$1, \cdots, n$都不在A内．于是$A=\varnothing$，证毕．

也可以应用良序原理来证明归纳法原理(第9题)．这两个原理都可以作为自然数的一个基本假设．

还有一种归纳法的形式必须提及．有时会遇到这样情况，为了证明$P(k+1)$，我们不仅要假设$P(k)$，并且还要假设$P(l)$对所有自然数$l \leqslant k$成立．对于这种情形，我们应用"完全归纳法的原理"：设A是自然数的集合，并且

(1) 1在A内，

(2) 若$1, \cdots, k$在A内，则$k+1$也在A内，

于是A是所有自然数的集合．

虽然完全归纳法的原理比普通归纳法的原理看起来强得多，但实际上前者是后者的推论．这个事实留给读者来证明(第10题)，题中附有提示．其应用见于第6, 16, 19和20题．

"递推定义"是与用归纳法证明密切相关的．例如数$n!$(读作"n阶乘")的定义是所有小于等于n的自然数的乘积：

$$n!=1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-1)\cdot n.$$

这个定义可以更明确地表示如下：

(1) $1!=1$,

(2) $n!=n\cdot(n-1)!$.

定义的这种形式明显地表示$n!$和$(n-1)!$之间的关系，这种形式对于使用归纳法证明是很理想的．第21题复习一个已经熟悉的定义，它可以更简洁地表示为一个递推定义．如该题所示，对于该定义的某些基本性质的严格证明，确实需要递推定义．

有一个也许还不熟悉的定义，它包含一个将经常使用的简便记号．我们常用希腊字母Σ(大写的希腊字母之第十八字，表示"和")并写

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

来代替 $$a_1+\cdots+a_n.$$

换言之，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 表示令 $i=1, 2, \cdots, n$ 得到的数的和．于是

$$\sum_{i=1}^{n} i=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

注意，实际上字母 i 同 $\sum_{i=1}^{n} i$ 所表示的数没有关系，并且可以用任何方便的符号(当然 n 除外!)来代替:

$$\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{i} j=\frac{i(i+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{j} n=\frac{j(j+1)}{2}.$$

为了精确地定义 $\sum_{i=1}^{n} a_n$，实际上需要一个递推定义

(1) $\sum_{i=1}^{1} a_i=a_1$,

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n-1} a_i+a_n$.

但只有一味追求数学的严格性的人才会过分坚持这样的精确．实际上，我们常用这种符号的各种变形而无人认为需加任何解释．例如，符号

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 4}}^{n} a_i$$

显然是指

$$a_1+a_2+a_3+a_5+a_6+\cdots+a_n,$$

或更明确地写成

$$\sum_{i=1}^{3}a_i+\sum_{i=5}^{n}a_i.$$

在本章开头所发现的自然数的不足之处，可以用将该数系扩展为**整数集**的办法来部分地加以补救：

$$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

该集用 **Z**(取德文"Zahl(数)"的头一个字母)表示. 在性质 P1—P12 中只有 P7 对于 **Z** 不成立.

取整数的商 m/n(其中 $n\neq0$) 可得一个更大的数系. 这些数称为**有理数**，所有有理数的集合用 **Q**(取英文 quotients(商)的头一个字母) 表示. 在这个数系中, P1—P12 全部成立. 似乎可以断定，我们在第一章中较详细地研究过的"数的性质"只属于叫做 **Q** 的这一个数的集合. 然而，有一个还要大的数的集合，性质 P1—P12都能适用,即所有**实数**的集合,用**R**表示. 实数不仅包含有理数，而且包含另外的数(**无理数**), 这些数可用无穷小数表示; π 和$\sqrt{2}$ 都是无理数的例子. 要证明 π 为无理数是不容易的——我们将用第三部分中第十六章的全部篇幅来证明这个事实. 另一方面, $\sqrt{2}$ 为无理数是很容易证明的, 并且是希腊人早就知道的. (因为毕达哥拉斯定理指出边长为 1 的等腰直角三角形有一长为$\sqrt{2}$的斜边，可见希腊人曾经研究过这个问题.）其证明是根据对自然数的一些观察. 每一个自然数 n 都可以写成 $2k$ 的形式. 其中 k 为某一整数，或者写成 $2k+1$ 的形式，其中 k 为某一整数(这个"明显"的事实可用归纳法简单地证出(第 7 题)). 具有 $2k$ 形式的自然数称为**偶数**; 具有 $2k+1$ 形式的自然数称为**奇数**. 注意偶数的平方为偶数, 奇数的平方为奇数:

$$(2k)^2=4k^2=2\cdot(2k^2),$$

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\cdot(2k^2+2k)+1.$$

特别是，由此得知其逆亦真：若 n^2 为偶数，则 n 为偶数；若 n^2 为奇数，则 n 为奇数．现在很容易证明 $\sqrt{2}$ 是无理数．假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，即假设有自然数 p 和 q 使得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2.$$

我们可以假设 p 和 q 没有公约数（因为所有公约数一开始就可以约去）．现在我们有

$$p^2=2q^2,$$

这说明 p^2 是偶数，因而 p 必为偶数，即 $p=2k$，其中 k 为某一自然数．于是

$$p^2=4k^2=2q^2,$$

由此得
$$2k^2=q^2.$$

上式表示 q^2 是偶数，因而 q 为偶数．于是 p 和 q 都是偶数，这与 p 和 q 无公约数的事实相矛盾．因此完成了证明．

重要的是要明确上述证明说明什么．我们已经证明没有有理数 x 能满足 $x^2=2$．这个论断通常可以更简单地说成为 $\sqrt{2}$ 是无理数．然而，符号 $\sqrt{2}$ 意味着有某一个数（当然是无理数）存在，它的平方是2．我们尚未证明有这样一个数存在，并且可以肯定地说，目前还不可能证明它．在现阶段任何的证明均需依据 P1—P12（我们所提出的关于R 的性质只有这一些）；因为 P1—P12 对于Q 也成立，同样的论证将表明，有一个有理数的平方为2，而我们知道这是不可能的．（注意，倒过来的论证进行不了——关于没有有理数的平方为 2 的证明，不能用来证明没有实数的平方为 2，因为我们的证明不仅用了 P1—P12，而且还用了一个关于 Q 的特殊性质，即在 Q 内的每一个数都可以写成 p/q，其中 p 和 q 都

是整数.)

在我们所得到的实数性质中，这个特殊的缺陷当然可用增加"一个正数的平方根存在"的性质来补救. 然而，采取这样一个办法，不管是美学上还是数学上都不够满意，我们仍然不知道：当 n 是奇数时每一个数有一个 n 次根，当 n 是偶数时每一个正数有一个 n 次根. 即使我们这样假设了，也还是证明不了有一个能满足 $x^5+x+1=0$ 的数 x 存在(即使恰好有一个这样的数)，因为我们不知道怎样用 n 次根来表示这个方程的解(其实，我们知道它们的解不能写成这样的形式). 当然，我们的确不想臆断所有的方程都有解，因为它是不对的(例如，没有实数 x 能满足 $x^2+1=0$). 其实，这不是一个有成果的研究方向. 显出 $\mathbf{R}$ 不同于 $\mathbf{Q}$ 的性质的最有启发性的暗示，以及说明这个性质必要性的最有力的证据，不可能单从数的研究中得到. 为了用更深刻的方式来研究实数的性质，我们必须研究比实数更多的东西. 为此我们必须从微积分的基础，特别是微积分建立于其上的基本概念——函数开始.

习　题

1. 用归纳法证明下列各式.

 (i) $1^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

 (ii) $1^3+\cdots+n^3=(1+\cdots+n)^2$.

2. 求下列和的公式

 (i) $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

 (ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^2=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$.

 提示：这两个式子与 $1+2+3+\cdots+2n$ 及 $1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2$ 有什么关系?

3. 设 $0 \leqslant k \leqslant n$, “二项式系数” $\binom{n}{k}$ 的定义为

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{如果 } k \neq 0, n;$$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. (我们若规定 $0! = 1$, 则该式变成前一式的特例.)

(a) 证明

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(不需用归纳法来证.)这个关系产生下列构形, 称为“帕斯卡三角形”——不在两条边上的数等于在它上面两个数的和; 二项式系数 $\binom{n}{k}$ 等于在第 n 行的第 k 个数.

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
      ………………
```

(b) 注意在帕斯卡三角形中所有的数都是自然数. 应用 (a) 和归纳法来证明 $\binom{n}{k}$ 恒为自然数. (用归纳法的全部证明, 在某种意义上说, 由帕斯卡三角形一看便知.)

(c) 用另一种方法证明 $\binom{n}{k}$ 是自然数, 即证明 $\binom{n}{k}$ 是由 $1, \cdots, n$ 中选取正好 k 个整数所成集合的个数.

(d) 证明“二项式定理”: 若 a 和 b 为任意数且 n 为一自然数, 则

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

(e) 证明

(i) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}=\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

(ii) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots\pm\binom{n}{n}=0$.

4. (a) 用归纳法证明

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r},$$

设 $r\neq 1$(若 $r=1$, 则其和当然容易求出).

(b) 令 $S=1+r+\cdots+r^n$, 并用 r 乘该式得另一式, 然后由这两式解出 S, 从而导出(a)的结果.

5. $1^2+\cdots+n^2$ 的公式可以如下导出. 我们由公式

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

开始, 取 $k=1, \cdots, n$, 代入上式然后相加, 得

$$\begin{aligned}
2^3-1^3&=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\\
3^3-2^3&=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1\\
&\vdots\\
(n+1)^3-n^3&=3\cdot n^2+3\cdot n+1\\
\hline
(n+1)^3-1&=3[1^2+\cdots+n^2]+3[1+\cdots+n]+n.
\end{aligned}$$

这样, 如果我们已知 $\sum_{k=1}^{n}k$(它可用同样方法求出)便能求出 $\sum_{k=1}^{n}k^2$. 应用这种方法求

(i) $1^3+\cdots+n^3$.

(ii) $1^4+\cdots+n^4$.

(iii) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

(iv) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

*6. 应用第 5 题的方法证明 $\sum_{k=1}^{n}k^p$ 总能写成下列的形式

$$\frac{n^{p+1}}{p+1}+An^p+Bn^{p-1}+Cn^{p-2}+\cdots.$$

(这样公式中的头 10 个是

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{1}{12}n^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-1n^7+1n-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n.$$

注意第二列的系数恒为$\frac{1}{2}$，并且第三列以后具有非零系数的所有n的幂指数按2递减直达到n^2或n为止．除头两列之外，所有系数好象相当无规律，但实际上是有某种规律的；求出其规律可以作为一个智力测验．详见习题二十六，16．）

7．证明每一自然数不是偶数就是奇数．

8．证明若一自然数的集合A包含n_0，并且当它包含k时必包含$k+1$，则A包含所有$\geqslant n_0$的自然数．

9．由良序原理证明数学归纳法原理．

10. 由普通归纳法原理证明完全归纳法原理. 提示：设A包含1，并且当它包含$1,\cdots,n$时必包含$n+1$，考虑$1,\cdots,k$全在A内的所有k的集合B.

11. (a) 设a为有理数而b为无理数，$a+b$是否必然为无理数？若a与b皆为无理数，结果如何？

(b) 若a为有理数而b为无理数，ab是否必然为无理数？（注意！）

(c) 有没有一个数a其平方a^2是无理数但a^4为有理数？

(d) 有没有两个无理数，它们的和与积都是有理数？

12. (a) 证明$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$和$\sqrt{6}$是无理数. 提示：例如，证明$\sqrt{3}$时，可应用这样的事实，即每一整数都可写成$3n$或$3n+1$或$3n+2$的形式. 为什么这种证法对于$\sqrt{4}$不适用？

(b) 证明$\sqrt[3]{2}$和$\sqrt[3]{3}$是无理数.

*13. 证明

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数，

(b) $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$是无理数.

14. (a) 设$x=p+\sqrt{q}$，其中p和q是有理数，并且m是一自然数，证明$x^m=a+b\sqrt{q}$，其中a和b是有理数.

(b) 又证明$(p-\sqrt{q})^m=a-b\sqrt{q}$.

15. (a) 设m和n是自然数并且$m^2/n^2<2$，试证$(m+2n)^2/(m+n)^2>2$；并证明

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2}-2<2-\frac{m^2}{n^2}.$$

(b) 将所有不等号反向，证明同一结果.

(c) 设$m/n<\sqrt{2}$，试证另外有一个有理数m'/n'满足

$$m/n<m'/n'<\sqrt{2}.$$

*16. 当自然数n不是另一自然数的平方时，好象$\sqrt{n}$很可能是无理数. 虽然第12题的方法确实可以用来处理任何特殊的情形，但是往往不易预先看出这个方法行得通. 一般情况下的证明，需要另外的信息. 如果一个自然数p不可能写成$p=ab$，其中a和b为自然数，除非其中一个是p另一个是1，则该自然数称为**素数**. 为方便起见，我们还约定1**不**是素数. 头几个素数是2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. 若$n>1$不是一个素数，则$n=ab$，其中a和b均$<n$；设a或b不是素数，则可同样地将它分解因子；依此类推，我们可以将n写成素数的乘积. 例如，$28=4\cdot7=$

$2\cdot2\cdot7$.

(a) 将上述论证改为用完全归纳法的严格证明.(当然,任何明理的数学家将接受这种非形式的论证,部分原因是由于他对如何严格地叙述这个问题已十分清楚.)

关于整数的一个基本定理(我们在这里不证明它)指出,除了因子的次序之外,上述的因子分解是唯一的.这样,例如 28 决不能写成其中一个是 3 的素数的乘积,也不能写成只包含一个 2 的形式(现在你应能意识到为什么不将 1 当作一个素数).

(b) 应用这个事实证明:除非 $n=m^2$,其中 m 为某一自然数,则 $\sqrt{n}$ 是无理数.

(c) 证明更一般的情况,除非 $n=m^k$,则 $\sqrt[k]{n}$ 是无理数.

(d) 讨论素数时无不提到欧几里得关于素数有无穷多个的漂亮的证明.通过考虑 $p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n+1$ 来证明不可能只有有限多个素数 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$.

*17. (a) 证明:如果对于某一组整数 $a_{n-1}, \cdots, a_0$, x 满足

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0,$$

则 x 为无理数,除非 x 为整数.(为什么本题是第 16 题的推广?)

(b) 证明 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ 是无理数.提示:由算出该数的头 6 次幂开始.

18. 证明伯努利不等式:设 $h>-1$,则

$$(1+h)^n\geqslant1+nh.$$

为什么当 $h>0$ 时这是显然的?

19. 斐波那契序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的定义如下:

$$a_1=1,$$
$$a_2=1,$$
$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\quad 对于\ n\geqslant3.$$

这个由 1, 1, 2, 3, 5, 8, …开始的序列是由斐波那契(大约 1175—1250)联系兔子问题发现的.斐波那契假定最初一对兔子每月生一对小兔,并且过了两个月每一对新兔子同样地生小兔.第 n 月出生的兔子对数 a_n 为 $a_{n-1}+a_{n-2}$,因为以前各月出生的每一对兔子各生一对兔子,而两个月以前出生的每一对兔子又各生另一对兔子.这个序列的有趣结果的数目确实惊人——甚至有一个斐波那契协会出版一杂志,叫做"斐波那契季刊".证明

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

习题二十三，8 提出一种推导这个令人惊讶的公式的方法.

20. 习题一，6 的结果有一个重要的普遍形式：若 $a_1, \cdots, a_n \geqslant 0$，则

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

(a) 为什么当 $a_1=\cdots=a_n$ 时上式成立？假设所有的 a_i 不全相等，比如说 $a_i \neq a_j$. 若 a_i 和 a_j 都用 $(a_i+a_j)/2$ 来代替，则"算术平均值" $A_n=(a_1+\cdots+a_n)/n$ 将出现什么情况？"几何平均值"

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n}$$

将出现什么情况？为什么重复这个方法足够多次之后总能证明 $G_n \leqslant A_n$？(这里再次是一个很好的练习：用归纳法的形式证明，如同用非形式的推理一样.)

前面证明中的推理与另一个有趣的证明紧密地关联着.

(b) 当 $n=2$ 时 $G_n \leqslant A_n$，应用这个事实以及关于 k 的归纳法，证明当 $n=2^k$ 时 $G_n \leqslant A_n$.

(c) 对于一般的 n，设 $2^m > n$. 应用(b)于 2^m 个数

$$a_1, \cdots, a_n, \underbrace{A_n, \cdots, A_n}_{2^m-n\text{ 个}}$$

来证明 $G_n \leqslant A_n$.

21. a^n 的递推定义如下：

$$a^1=a,$$
$$a^{n+1}=a^n\cdot a.$$

用归纳法证明

$$a^{n+m}=a^n\cdot a^m,$$
$$(a^n)^m=a^{nm}.$$

(不要想入非非；只对 n 或对 m 归纳，而不要一起来.)

22. 假定我们已知关于自然数的性质 P1 和 P4，但乘法却未曾提到. 下列各式可以用作乘法的递推定义：

$$1\cdot b=b,$$
$$(a+1)\cdot b=a\cdot b+b.$$

证明下列各式(按照指定的次序!)：

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$(用归纳法于 a),

$a\cdot 1=a$,

$a\cdot b=b\cdot a$(你刚证明过 $b=1$ 的情形).

23. 在本章中我们从自然数开始逐步建立实数. 要十分严格地讨论这个过程需占一些章节(见第五部分). 从来没有人提出如何能不经过这个过程来得到实数,但我们若将实数当作已知的,则自然数可以定义为具有 $1, 1+1, 1+1+1$, 等等形式的实数. 本题目的是要指出有一个严格的数学方法来说明"等等".

(a) 如果

(1) 1 在 A 内,

(2) 每当 k 在 A 内时 $k+1$ 也在 A 内,

则这样实数的集合 A 称为**归纳的**. 证明

(i) $\mathbf{R}$ 是归纳的.

(ii) 正实数的集合是归纳的.

(iii) 不等于$\frac{1}{2}$的正实数的集合是归纳的.

(iv) 不等于 5 的正实数的集合不是归纳的.

(v) 设 A 和 B 是归纳的,则同时在 A 与 B 内的实数的集合 C 也是归纳的.

(b) 若实数 n 在所有归纳集合内,则该实数 n 称为**自然数**.

(i) 证明 1 是自然数.

(ii) 若 k 为自然数,证明 $k+1$ 是自然数.

选题解答

1. (i) 因为 $1^2=1\cdot(2)\cdot(2\cdot 1+1)/6$, 所以当 $n=1$ 时公式成立. 设公式对于 k 成立, 则

$$1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)}{6}[(k+2)(2k+3)]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2[k+1]+1)}{6},$$

于是公式对于 $k+1$ 也能成立.

2. (i) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$$=1+2+3+\cdots+2n-2(1+\cdots+n)$$

$$=\frac{(2n)(2n+1)}{2}-n(n+1)$$

$$=n^2.$$

4. (a) 因为

$$1+r=\frac{1-r^2}{1-r},$$

所以当 $n=1$ 时公式成立. 假设

$$1+r+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

则

$$1+r+\cdots+r^n+r^{n+1}=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}+r^{n+1}$$

$$=\frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r}$$

$$=\frac{1-r^{n+2}}{1-r}.$$

(b)
$$S=1+r+\cdots+r^n$$

$$rS=r+\cdots+r^n+r^{n+1}$$

由此得 $S(1-r)=S-rS=1-r^{n+1}$

于是
$$S=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

5. (i) 由

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1,\quad k=1,\cdots,n$$

得

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n,$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^4-1-6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}-n}{4}$$

$$=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}.$$

(iii) 由

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)},\quad k=1,\cdots,n$$

得

$$1-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

7. 1 不是偶数就是奇数，其实 1 是奇数. 设 n 不是偶数就是奇数；则 n 可以写成 $2k$ 或 $2k+1$. 在第一种情形中，$n+1=2k+1$ 是奇数；在第二种情形中，$n+1=2k+1+1=2(k+1)$ 是偶数. 不论在哪一种情形中，$n+1$不是偶数就是奇数.（这种证法好象靠不住，但它确实是正确的，这一点是公认的.）

8. 设 B 为所有能使 n_0-1+l 在 A 内的自然数 l 的集合. 则 1 在 B 内，并且当 l 在 B 内时 $l+1$ 也在 B 内，于是 B 包含所有自然数，这意味着 A 包含所有 $\geqslant n_0$ 的自然数.

11. (a) 是的，因若 $a+b$ 为有理数，则 $b=(a+b)-a$ 即为有理数. 如果 a 和 b 都是无理数，则 $a+b$ 可能为有理数，因为 b 可以等于 $r-a$，其中 r 为某一有理数.

    (b) 若 $a=0$，则 ab 为有理数. 但若 $a\neq 0$，则 ab 不可能为有理数，因为否则 $b=(ab)\cdot a^{-1}$ 将为有理数.

    (c) 有；例如$\sqrt[4]{2}$.

    (d) 有；例如$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$.

12. (a) 因

$$(3n+1)^2=9n^2+6n+1=3(3n^2+2n)+1,$$
$$(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1,$$

故若 k^2 能被 3 整除，则 k 也必能被 3 整除. 现在假设$\sqrt{3}$为有理数，并令$\sqrt{3}=p/q$，其中 p 与 q 没有公因数. 则 $p^2=3q^2$. 这样，p^2 可以被 3 整除，因而 p 必能被 3 整除. 于是 $p=3p'$，其中 p' 为某一自然数，由此得 $(3p')^2=3q^2$，或 $3(p')^2=q^2$. 这样，q 也能被 3 整除，是一矛盾.

对于$\sqrt{5}$和$\sqrt{6}$，可用同样方法来证明，因为等式

$$(5n+1)^2=25n^2+10n+1=5(5n^2+2n)+1,$$
$$(5n+2)^2=25n^2+20n+4=5(5n^2+4n)+4,$$
$$(5n+3)^2=25n^2+30n+9=5(5n^2+6n+1)+4,$$
$$(5n+4)^2=25n^2+40n+16=5(5n^2+8n+3)+1,$$

以及对于 $6n+m$ 形式的数的各相应等式表明，若 k^2 能被 5 或 6 整除，则 k 必能被 5 或 6 整除. 这种证法对$\sqrt{4}$不适用，因为$(4n+2)^2$可以被 4 整除.（正因这个理由，这种证法不能用来证明一般的情况，即若 a 不是完全平方，则$\sqrt{a}$为无理数——我们无法保证 $(an+m)^2$ 不是 a 的倍数，其中 $m<a$. 实际上，虽然这个论断是真的，但其证明要用到第 16 题的知识.）

(b) 因

$$(2n+1)^3=8n^3+12n^2+6n+1$$
$$=2(4n^3+6n^2+3n)+1,$$

故若 k^3 是偶数，则 k 必为偶数. 设 $\sqrt[3]{2}=p/q$，其中 p 和 q 没有公因数. 则 $p^3=2q^3$，于是 p^3 可以被 2 整除，从而 p 必能被 2 整除. 因此，$p=2p'$，其中 p' 为某一自然数. 从而$(2p')^3=2q^3$，或 $4(p')^3=q^3$. 因此 q 也是偶数，这是矛盾.

对于$\sqrt[3]{3}$的证法也是相似的，应用方程

$$(3n+1)^3=27n^3+27n^2+9n+1$$
$$=3(9n^3+9n^2+3n)+1,$$
$$(3n+2)^3=27n^3+54n^2+36n+8$$
$$=3(9n^3+18n^2+12n+2)+2.$$

18. 设 $n=1$，则 $(1+h)^n=1+nh$. 假设 $(1+h)^n\geqslant 1+nh$，则

$$(1+h)^{n+1}=(1+h)(1+h)^n\geqslant(1+h)(1+nh),\quad 因为\ 1+h>0$$
$$=1+(n+1)h+nh^2\geqslant 1+(n+1)h.$$

对于 $h>0$ 的情况，不等式可以直接由二项式定理得出，因为在$(1+h)^n$的公式中其余各项都是正的.

第二部分　基础知识

虽然经常说微分学是论述连续量的，但至今尚未见到对于连续性的解释；甚至在微分学最严密的解说中，也没有用连续性作为其论证的基础．但是多少意识到这个事实，所以借助于几何的或者由几何提示的那些概念，或者用那些从来未经纯粹算术方法证实的定理来做基础．例如上述的那个定理就是属于这样的定理，经过进一步的研究，使我相信这个定理，或者一个和它相当的定理，从某种意义上可以认为是无穷小分析的足够的基础．只要找出它在算术原理中真正的由来，便能同时得到连续性的实质的真实定义．我于一八五八年十一月廿四日解决了这个问题，过了几天我将研究的结果告诉我的朋友德雷格（Durige），我同他进行了一次漫长而又热烈的讨论．

理查德·戴德金

第三章 函 数

在全部数学中，最重要的概念肯定是函数的概念——函数几乎是现代数学每一分支的主要研究对象．因此，当你听到函数的概念是一个很普遍的概念时，也许不会感到惊奇．可以宽慰的是，目前我们只限于研究一个很特殊类型的函数．即使这一小类函数也有很多变化，需要花相当时间来研究．我们不从严格的定义开始．目前，一个临时定义就能使我们对函数进行充分的讨论，并且可以说明如同数学家所理解的函数的直观概念．以后，我们将讨论近代数学定义的优点．因此，我们从下列临时定义开始：

临时定义 函数是这样一个规则：对于一定范围内的每个实数，按照它确定另一个实数．

下列关于函数的例子是用来说明并引伸这个定义的，显然，这个定义需要这样阐明一下．

例 1 这规则是，对于每个数，由它确定此数的平方．

例 2 这规则是，对于每个数 y，由它确定

$$\frac{y^3+3y+5}{y^2+1}.$$

例 3 这规则是，对于每个 $c\neq 1,-1$ 的数，由它确定

$$\frac{c^3+3c+5}{c^2-1}.$$

例 4 这规则是，对于满足 $-17\leqslant x\leqslant \pi/3$ 的每个数 x，由它确定数 x^2.

例 5 这规则是，对于每个数 a，由它确定一个数 0（当 a 为无理数时）或一个数 1（当 a 为有理数时）．

例 6 这规则是，

对于 2，所确定的数是 5，

对于 17，所确定的数是$\frac{36}{\pi}$，

对于$\frac{\pi^2}{17}$，所确定的数是 28，

对于$\frac{36}{\pi}$，所确定的数是 28，

而对于任何 $y\neq 2, 17, \pi^2/17$ 或 $36/\pi$，且 y 具有 $a+b\sqrt{2}$ 的形式（其中 a 和 b 都在 Q 内）的数，所确定的数是 16.

例 7 这规则是，对于每个数 t，由它确定 t^3+x.（当然，这个规则随 x 而定，因此，我们实际上描述了无穷多个不同的函数，对于每一数 x 有一个函数.）

例 8 这规则是，对于每个数 z，若在 z 的十进小数表示中，7 的个数是有限的，则确定的数等于 7 的个数；若在 z 的十进小数表示中，7 的个数是无穷的，则确定的数为 $-\pi$.

有一件事情由这些例子中可以看得十分清楚：函数是任意一个这样的规则，它确定某些数与其他某些数相对应. 这个规则不一定可用代数式表达出来，甚至不能用对每个数都一致的形式表达出来，此规则也不一定能应用于实际（例如，没人知道将 8 与 π 联系在一起的，是个什么规则）. 再者，此规则可以忽略某些数，甚至该函数能适用于哪些数，也可以不那么明显（例如，试看例 6 中的函数能否适用于 π）. 一个函数确能适用的数的集合，称为该函数的**定义域**.

在讨论函数的其他内容之前，我们很有必要规定一些记号，因为在本书中，我们将经常讨论函数（实际上我们很难讨论别的内容），所以需要一个简便的表示函数的方法. 标准的做法是用字母表示函数. 显然字母"f"是最好的，"g"和"h"作为备用，但也可以

用任何别的字母(或任何合理的记号),甚至不排斥采用“x”和“y”,尽管这两个字母通常是用来表示数的. 若 f 为一函数,则根据f确定的与数 x 相对应的数用 $f(x)$表示——这个符号读作“fx”,并且通常称为 f 在 x 的值. 当然,我们若用 x 表示函数,就需用别的字母来表示数(可用“f”表示数,从而得到这样的记号 $x(f)$,尽管这样写法是反常的,但完全是合理的). 注意,只有当 x 在 f 的定义域之内时,记号 $f(x)$才有意义;对于其余的 x,记号 $f(x)$ 没有定义.

如果例 1—8 中所定义的函数用f、g、h、r、s、θ、α_x和 y 表示,则这些定义便可改写如下:

(1) $f(x)=x^2$,对于所有的 x.

(2) $g(y)=\dfrac{y^3+3y+5}{y^2+1}$,对于所有的 y.

(3) $h(c)=\dfrac{c^3+3c+5}{c^2-1}$,对于 $c\neq1,-1$ 的所有的数.

(4) $r(x)=x^2$,对于所有满足$-17\leqslant x\leqslant\pi/3$ 的 x.

(5) $s(x)=\begin{cases}0, x \text{ 为无理数},\\ 1, x \text{ 为有理数}.\end{cases}$

(6) $\theta(x)=\begin{cases}5,\ x=2\\ \dfrac{36}{\pi}, x=17\\ 28, x=\dfrac{\pi^2}{17}\\ 28, x=\dfrac{36}{\pi}\\ 16, x\neq2, 17, \dfrac{\pi^2}{17}\text{或}\dfrac{36}{\pi}, \text{并且 } x=a+b\sqrt{2}, \text{其中 } a、b \text{ 在}\\ \qquad \mathbf{Q}\text{ 内}.\end{cases}$

(7) $\alpha_x(t)=t^3+x$,对于所有的数 t.

(8) $y(x)=\begin{cases} n, & \text{在 } x \text{ 的十进小数表示中，正好出现 } n \text{ 个 7 字} \\ -\pi, & \text{在 } x \text{ 的十进小数表示中，出现无穷多个 7 字.} \end{cases}$

这些定义说明定义一个函数 f 的一般方法——对应于 f 的定义域内的每一数 x，定出 $f(x)$ 的值.（注意，这样讲法与下列讲法是完全一样的：对应于每一数 a 定出 $f(a)$ 的值或对应于每一数 b 定出 $f(b)$ 的值，等等.）实际上，可作某些简化. 定义(1)可以简写为

$$(1)\quad f(x)=x^2,$$

其中"对于所有的 x"这个限制短语是不讲自明的. 当然，定义(4)的唯一可能的简化写法是

$$(4)\quad g(x)=x^2,\qquad -17\leqslant x\leqslant \pi/3.$$

象下列这样的定义

$$k(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1},\qquad x\neq 0, 1$$

可以简写成

$$k(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1},$$

通常也是不讲自明的，换言之，对于函数的定义域，若无进一步明确地限制，就认为函数的定义域由所有使函数的定义完全有意义的数构成.

你也许不难验证有关前面定义的函数的下列断言：

$$f(x+1)=f(x)+2x+1;$$

$$g(x)=h(x),\ \text{设 } x^3-3x+5=0;$$

$$r(x+1)=r(x)+2x+1,\ \text{设} -17\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{3}-1;$$

$$s(x+y)=s(x),\ \text{设 } y \text{ 为有理数};$$

$$\theta\left(\frac{\pi^2}{17}\right)=\theta\left(\frac{36}{\pi}\right);$$

$$\alpha_x(x)=x[f(x)+1];$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right)=0,\quad g\left(\frac{7}{9}\right)=-\pi.$$

如果你觉得表达式 $f(s(a))$ 好象不合理，那是因为忘了 $s(a)$ 同任何别的数一样，也是一个数，因此 $f(s(a))$ 有意义. 其实，对于所有的 a, $f(s(a))=s(a)$. 为什么呢？弄通了这一点之后，就不难解决比 $f(s(a))$ 更复杂的式子. 下式

$$f\left(r\left(s\left(\theta\left(\alpha_3\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

看来好象很难，其实稍微耐心些就能很容易求出它的值:

$$\begin{aligned}
&f\left(r\left(s\left(\theta\left(\alpha_3\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)\right)\right)\right)\\
&=f(r(s(\theta(\alpha_3(0)))))\\
&=f(r(s(\theta(3))))\\
&=f(r(s(16)))\\
&=f(r(1))\\
&=f(1)\\
&=1.
\end{aligned}$$

本章末尾的头几个习题是作为对这种符号表示的进一步练习.

(1)中定义的函数是一种非常重要的函数——多项式函数的一个特例. 设有实数 $a_0, \cdots, a_n$，使对于所有的 x 有

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a.$$

(当 $f(x)$ 写成这种形式时，通常是不言而喻地假定 $a_n\neq0$)，则该函数 f 称为**多项式函数**. 有非零系数的 x 的最高次幂称为 f 的**次数**; 例如，由 $f(x)=5x^6+137x^4-\pi$ 定义的多项式函数 f 为 6 次的.

在(2)和(3)中定义的函数属于范围稍微大些的一类函数，即**有理函数**. 这些函数都具有 p/q 的形式，其中 p 和 q 都是多项式函数(并且 q 不是恒等于 0 的函数). 有理函数本身是更大的函数类中十分特殊的例子、这更大的函数类比本章头一次提到的许多函

数简单，在微积分中要详细地加以研究．这类函数的例子如下：

(9) $f(x)=\dfrac{x+x^2+x\sin^2 x}{x\sin x+x\sin^2 x}$.

(10) $f(x)=\sin(x^2)$.

(11) $f(x)=\sin(\sin(x^2))$.

(12) $f(x)=\sin^2(\sin(\sin^2(x\sin^2 x^2)))\cdot\sin\left(\dfrac{x+\sin(x\sin x)}{x+\sin x}\right)$.

你一定会问根据什么标准把这样的，特别是象(12)这样奇形怪状的函数看作是简单的？答复是，它们能由一些简单的函数通过一些简单的组合函数的方法来建立．为了构造函数(9)—(12)，我们需要由“恒等函数” I 和“正弦函数” sin 开始，其中 $I(x)=x$，而“正弦函数” sin 在 x 的值 $\sin(x)$ 通常简写成 $\sin x$．下列是一些由函数组合出新函数的重要方法。

设 f 与 g 为任意两个函数，我们可以用等式

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

定义一个新函数 $f+g$，称为 f 与 g 的**和**．注意，据据我们的约定，$f+g$ 的定义域由能使“$f(x)+g(x)$”有意义的所有 x 组成，即所有同时在 f 的定义域和 g 的定义域内的 x 的集合．设 A 和 B 为任意的两个集，则 $A\cap B$(读作“A 交 B”或“A 和 B 的交”)表示同时在 A 和 B 内的 x 的集合．应用这种记号，我们可以写 $(f+g)$ 的定义域 $=f$ 的定义域 $\cap g$ 的定义域．

同样地，我们将 f 和 g 的**积** $f\cdot g$ 与**商** $\dfrac{f}{g}$(或 f/g)定义为

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

和
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

另外，设 g 为一函数而 c 为一数，我们用

$$(c\cdot g)(x)=c\cdot g(x)$$

定义一个新的函数 $c\cdot g$．如果我们约定符号 c 也代表由 $f(x)=c$

定义的函数 f,则上式就变成记号 $f\cdot g$ 的一个特例;函数$x(x)=c$对于所有的数 x 有相同的值,称为**常值函数**.

$f\cdot g$ 的定义域是 f 的定义域 $\cap g$ 的定义域，而 $c\cdot g$ 的定义域则就是 g 的定义域. 另一方面，f/g 的定义域就比较复杂——它可以写成 f 的定义域 $\cap g$ 的定义域 $\cap\{x:g(x)\neq 0\}$，符号$\{x:g(x)\neq 0\}$表示满足 $g(x)\neq 0$ 的数 x 的集合. 一般地，$\{x:\cdots\}$表示所有使"…"成立的 x 的集合. 例如，$\{x:x^3+3<11\}$表示所有使 $x^3<8$ 成立的 x 的集合,因此$\{x:x^3+3<11\}=\{x:x<2\}$. 这些记号都可以用 y 处处来代替 x. 这个记号的变化是普遍的，不需要任何讨论. 任何人都能推测到$\{x>0:x^3<8\}$是表示其立方小于 8 的所有正数的集合; 它可以更正式地写成$\{x:x>0$ 和 $x^3<8\}$. 顺便提一句,该集合等于集合$\{x:0<x<2\}$. 这样变化虽然不太明显，但却变得合乎标准了. 例如集合$\{1,2,3,4\}$只包含 1,2,3 和 4 四个数;它也可以写成$\{x:x=1$ 或 $x=3$ 或 $x=2$ 或 $x=4\}$.

关于函数的和、积与商的某些事实是关于数的和、积与商的事实的明显推论. 例如,很容易证明

$$(f+g)+h=f+(g+h).$$

这种证法是证明两函数相等时所特有的——必须证明两函数有相同的定义域，并且对于在该定义域内的任何数，两函数有相同的值. 例如,为了证明$(f+g)+h=f+(g+h)$，我们注意到，根据上式两边的定义,有

$$[(f+g)+h](x)=(f+g)(x)+h(x)=[f(x)+g(x)]+h(x)$$

和

$$[f+(g+h)](x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+[g(x)+h(x)],$$

而 $[f(x)+g(x)]+h(x)$与 $f(x)+[g(x)+h(x)]$ 的相等则是关于数的一个事实. 在本证明中没有明确指出两定义域的相同，因为

我们一开始写下这些等式时,这个事实就是显然的; $(f+g)+h$及 $f+(g+h)$ 的定义域显然都是 f 的定义域 $\cap g$ 的定义域 $\cap h$ 的定义域. 正如对待数一样,我们自然将$(f+g)+h=f+(g+h)$ 写成 $f+g+h$.

照样容易证明$(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$,并且此函数就写成 $f\cdot g\cdot h$. 等式 $f+g=g+f$ 和 $f\cdot g=g\cdot f$ 也是不难证明的.

应用$+$, $\cdot$, $/$的运算,我们现在能将(9)所定义的函数 f 写成

$$f=\frac{I+I\cdot I+I\cdot\sin\cdot\sin}{I\cdot\sin+I\cdot\sin\cdot\sin}.$$

然而, 显然不能用这种办法来表示函数(10). 我们尚需另外一种组合函数的方法. 这种组合,也就是两个函数的复合,是很重要的.

设 f 与 g 为任意两个函数,我们用

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

定义一个新函数 $f\circ g$, 即 f 和 g 的复合; $f\circ g$ 的定义域为$\{x: x$ 在 g 的定义域内,并且 $g(x)$在 f 的定义域内$\}$. 符号"$f\circ g$"常读作"f圈 g". 与短语"f 和 g 的复合"比较,这个符号当然有简洁的优点,但更重要的优点是: 不大可能将 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 相混淆, 而这两者是不能混淆的,因为它们通常是不相等的. 其实,几乎所有随意选的 f 及 g 都能说明这一点(例如, 可取 $f=I\cdot I$ 和 $g=\sin$试试看). 为了使你不致担心关于复合的运算, 我们马上指出复合是可以结合的:

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$$

(其证明是显然的); 该函数用 $f\circ g\circ h$ 表示. 我们现在可以将函数(10), (11), (12)写成

(10) $f=\sin\circ(I\cdot I)$,

(11) $f=\sin\circ\sin\circ(I\cdot I)$,

(12) $f=(\sin\cdot\sin)\circ\sin\circ(\sin\cdot\sin)\circ(I\cdot[(\sin\cdot\sin)\circ(I\cdot I)])\cdot$

$$\sin \circ \left(\frac{I + \sin \circ (I \cdot \sin)}{I + \sin}\right).$$

有一件事大概已经清楚了．虽然这种写函数的方法能够很清楚地显示出函数的“结构”，但是它难于缩短或简化．不巧，对于所有的 x，满足 $f(x) = \sin(x^2)$ 的函数 f 的最短的名称，好象就是“函数 f 是对于所有的 x 有 $f(x) = \sin(x^2)$”．虽然两百年以来已经知道有必要简化这种不灵便的写法，但仍未得到受普遍赞扬的合理的简化．为解决此问题，虽然用得最多的简化是诸如

$$x \longrightarrow \sin(x^2)$$

(读作“由 x 到 $\sin(x^2)$”或“x 箭头 $\sin(x^2)$”)，但它在微积分课本的作者中难于通用．在本书中我们允许一些简化，说成“函数 $f(x) = \sin(x^2)$”，甚至更通俗的是干脆简化为：“函数 $\sin(x^2)$”．为了确切起见，我们不用这样的描述，严格说来，它混淆了数和函数，但是它很方便，以致你自己最后大概还会采用它．正如任何惯例一样，有用就是形成惯例的起因，并且只要逻辑上的轻微缺陷不会引起混淆，这个标准就是合理的．有时若不采用更确切的描述就会发生混淆．例如，“函数 $x + t^3$”是一种含糊的说法，它可以表示

$x \longrightarrow x + t^3$，即这个函数 f 是，对于所有的 x 有 $f(x) = x + t^3$，也可以表示

$t \longrightarrow x + t^3$，即这个函数 f 是，对于所有的 t 有 $f(t) = x + t^3$．然而，我们将要看到，对于许多与函数有关的重要概念，微积分有一个包含“$x \longrightarrow$”的记号．

我们已对函数作广泛的研究，现在有理由重新考虑函数的定义．虽然我们曾将函数定义为一“规则”，但很难弄清它是什么意思．如果问：“若违反这个规则将会出现什么情况？”很难说这个问题是滑稽可笑的还是深刻的．应用“规则”一词的更大缺陷是：如果将规则理解为用来确定 $f(x)$ 的实际指令，则

$$f(x)=x^2$$

和
$$f(x)=x^2+3x+3-3(x+1)$$

当然是不同的规则；然而，我们却需要

$$f(x)=x^2$$

和
$$f(x)=x^2+3x+3-3(x+1)$$

定义同一函数．由于这个缘故，有时将函数定义为数与数之间的一种“联系”．不幸的是，“联系”一词之所以能避免“规则”一词所遇到的非议，只是由于它的含意更含糊．

当然存在符合要求的定义函数的方法，否则我们就不会非难原先所下的定义．但是符合要求的定义不能靠累赘的英语同义语来下．数学家们最终接受的关于“函数”的定义很好体现了将直观的概念与严格的数学结合起来的方法．对于函数的正确的提问，不应是“规则是什么？”或“联系是什么？”而应是“为了知道函数的全部情况，我们要知道什么？”回答最后一个问题是容易的——对于每个数 x，我们需要知道数 $f(x)$．可以想象有一个表，它列出对于函数 $f(x)=x^2$ 我们所要知道的数据：

x	$f(x)$
1	1
-1	1
2	4
-2	4
$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}$	2
π	π^2
$-\pi$	π^2

甚至不需要将这些数列成表格（假如要将它们全部列出，实际上是不可能的）．我们可将各种不同的数偶

$$(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4),(\pi,\pi^2),(\sqrt{2},2),\cdots$$

来代替上面两列数据，并且简单地把它们集合在一起构成一个集*. 为了求 $f(1)$，我们只要在第一个数是 1 的数偶中取第二个数；为了求 $f(\pi)$，在第一个数是 π 的数偶中取第二个数. 我们好象可以说，一个函数可以定义为数偶的集合. 例如，如果我们已知下列集合(它只包含 5 个数偶)：

$$f=\{(1,7),(3,7),(5,3),(4,8),(8,4)\},$$

则 $f(1)=7, f(3)=7, f(5)=3, f(4)=8, f(8)=4$，而 1, 3, 4, 5, 8 在 f 的定义域内都只出现一次. 如果我们考虑集合

$$f=\{(1,7),(3,7),(2,5),(1,8),(8,4)\},$$

则 $f(3)=7$，$f(2)=5$，$f(8)=4$；但无法断定究竟 $f(1)=7$ 还是 $f(1)=8$. 换言之，不是任意的原来那样的数偶集合都能定义为一个函数. 我们必须排除上述情况出现的可能性，于是得到下列的定义.

定义

> 函数是具有下列性质的数偶集合：若 (a,b) 和 (a,c) 都在该集合内，则 $b=c$；换言之，该集合不能包含具有同一第一个元素的两个不同的数偶.

这是我们头一个正式的定义，它的排版格式以后我们定义重要的新概念时将经常用到. 这些定义很重要（至少和定理一样重要），当它出现在眼前时必须容易认出，并需将它们与注释、启发性的陈述以及临时的说明区别开来. 它们将冠以定义一词，其内容包含用黑体字表示的所要定义的术语，并单独列成一段.

---

* 这里出现的数偶通常称为"有序偶"，这是为了强调例如数偶(2, 4)与(4, 2)不同这样的事实. 公平地说我们将用有序偶，即另一尚未定义的术语来定义函数. 然而有序偶是能够定义的，如有疑问，可参看本章的附录.

现在可以严格地下另一个定义(实际上同时定义两件事):

定义

> 设 f 是一函数，f的**定义域**是所有 a 的集合，对于这所有的 a，都有某个 b 能使(a, b)在 f 内．如果 a 在 f 的定义域内，根据函数的定义，实际上存在唯一的数 b 能使(a,b) 在 f 内．这个唯一的数 b 用 $f(a)$表示．

有了这个定义，我们便达到了目的：关于函数 f，重要的是对于它的定义域内的每一数 x 都有一个数 $f(x)$随着而定．你可能感到我们也达到了这样的目的，直观的定义被难于理解的抽象定义所代替．可以宽慰的是：第一，虽然函数被定义为数偶的集合，但这并不妨碍你将函数看成是一个规则．第二，无论直观的还是正式的定义都不是思考函数的最好方式．最好的方式是作图，但这需要单独列成一章．

习　题

1．设 $f(x)=1/(1+x)$．求

　(i) $f(f(x))$ (x为何值时该式才有意义?)．

　(ii) $f\left(\frac{1}{x}\right)$．

　(iii) $f(cx)$．

　(iv) $f(x+y)$．

　(v) $f(x)+f(y)$．

　(vi) 对于哪些数 c，有一数 x 能使 $f(cx)=f(x)$?

　　提示：超过你初看时所想象的．

　(vii) 对于哪些数 c，有 x 的两个不同的值使 $f(cx)=f(x)$?

2．设 $g(x)=x^2$，并设

$$h(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ 1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

　(i) y 为何值时 $h(y)\leqslant y$?

(ii) y 为何值时 $h(y)\leqslant g(y)$？

(iii) $g(h(z))-h(z)$ 等于什么？

(iv) w 为何值时 $g(w)\leqslant w$？

(v) ε 为何值时 $g(g(\varepsilon))=g(\varepsilon)$？

3. 求下列各式所定义的函数的定义域．

(i) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$．

(ii) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$．

(iii) $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$．

(iv) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$．

(v) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$．

4. 设 $S(x)=x^2, P(x)=2^x$ 和 $s(x)=\sin x$，求下列各函数的值．各题的答案必须是一个数．

(i) $(S\circ P)(y)$．

(ii) $(S\circ s)(y)$．

(iii) $(S\circ P\circ s)(t)+(s\circ P)(t)$．

(iv) $s(t^3)$．

5. 将下列每一函数用 S, P, s 表示，并且只能用＋，·，和∘（例如，(i)的答案是 $P\circ s$）．各题的答案必须是一个函数．

(i) $f(x)=2^{\sin x}$．

(ii) $f(x)=\sin 2^x$．

(iii) $f(x)=\sin x^2$．

(iv) $f(x)=\sin^2 x$（记住 $\sin^2 x$ 是 $(\sin x)^2$ 的简便写法）．

(v) $f(t)=2^{2^t}$．（注意：a^{b^c} 通常指 $a^{(b^c)}$．之所以用这种习惯写法是因为 $(a^b)^c$ 可以更简单地写成 a^{bc}．）

(vi) $f(u)=\sin(2^u+2^{u^2})$．

(vii) $f(y)=\sin(\sin(\sin(2^{2^{2^{\sin y}}})))$．

(viii) $f(a)=2^{\sin^2 a}+\sin(a^2)+2^{\sin(a^2+\sin a)}$．

多项式函数比较简单而又灵活，故在许多函数的研究中都占有重要的地位．下列两题说明这种函数的灵活性并引出其最重要的基本性质．

6. (a) 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是不同的数，求一 $n-1$ 次多项式函数 f_i，使其在 x_i 处

之值为 1，在 x_j 处之值为 0，其中 $j\neq i$. 提示：所有 $j\neq i$ 的 $(x-x_j)$ 的乘积，当 $j\neq i$ 时在 x_j 处为 0.（这个乘积通常写成

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j),$$

符号 Π（希腊语的第十六个大写字母）作为乘积的记号，如同 Σ 作为和的记号一样.）

(b) 现在求一个 $n-1$ 次多项式函数 f 使 $f(x_i)=a_i$，其中 $a_1, \cdots, a_n$ 为已知数.（你要应用 (a) 的函数 f_i. 本题所得的公式称为"拉格朗日插值公式."）

7. (a) 证明对于任意多项式函数 f 和任意数 a，必有一多项式函数 g 和一个数 b，对所有 x 满足 $f(x)=(x-a)g(x)+b$.（其想法是用长除法将 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 直到余数是常数为止. 例如，下列的计算

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x-2 \\
x-1 & x^3 \qquad -3x+1 \\
 & x^3-x^2 \\
\hline
 & \quad x^2-3x \\
 & \quad x^2-x \\
\hline
 & \qquad -2x+1 \\
 & \qquad -2x+2 \\
\hline
 & \qquad\quad -1
\end{array}$$

表示 $x^3-3x+1=(x-1)(x^2+x-2)-1$. 正式的证明可对 f 的次数用归纳法.）

(b) 设 $f(a)=0$，证明有一多项式函数 g 满足 $f(x)=(x-a)g(x)$.（其逆是显然的.）

(c) 设 f 为一 n 次多项式函数，证明 f 最多有 n 个根，即最多有 n 个数 a 满足 $f(a)=0$.

(d) 证明对于每个 n，都存在具有 n 个根的 n 次多项式函数. 若 n 为偶数，求一个没有根的 n 次多项式函数；若 n 为奇数，求只有一个根的 n 次多项式函数.

8. a, b, c 和 d 取什么值才能使函数

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

对所有 x 满足 $f(f(x))=x$？

9. (a) 设 A 为任意实数的集合，定义一函数 C_A 如下：

$$C_A(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 在 } A \text{ 内}\\ 0, & x \text{ 不在 } A \text{ 内}.\end{cases}$$

试求用 C_A 和 C_B 来表示$C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ 和 $C_{\mathbf{R}-A}$的式子.(符号 $A\cap B$在本章里已定义过,但其余两个你也许不熟悉,它们的定义如下:

$A\cup B=\{x:x$ 在 A 内或 x 在 B 内$\}$,

$\mathbf{R}-A=\{x:x$ 在 $\mathbf{R}$ 内但 x 不在 A 内$\}$.)

(b) 设 f 是这样的函数:对于所有的 x, $f(x)=0$ 或 1. 证明有一集合 A 使得 $f=C_A$.

(c) 证明: $f=f^2$ 当且仅当对于某一集合 A 有 $f=C_A$.

10. (a) 对于哪些函数 f, 存在函数 g 使得 $f=g^2$? 提示: 如果"函数"用"数"来代替,你一定能回答这一问题.

(b) 对于哪些函数 f, 存在函数 g 使得 $f=1/g$?

*(c) 对于哪些函数 b 和 c, 我们能找到一个函数 x, 使得对于所有的数 t 有

$$(x(t))^2+b(t)x(t)+c(t)=0?$$

*(d) 如果函数 x 满足

$$a(t)x(t)+b(t)=0$$

其中 t 为任意值. 则函数 a 和 b 必须满足什么条件? 这样的函数x有多少个?

11. (a) 设H为一函数, y是一个数, 它们满足$H(H(y))=y$, 则

$$\underbrace{H(H(H(\cdots(H(y)\cdots)}_{80\text{ 次}}$$

等于什么?

(b) 若以 81 代 80, 则结果如何?

(c) 若$H(H(y))=H(y)$, 则结果如何?

*(d) 求一函数 H, 使它对所有的数 x 满足$H(H(x))=H(x)$, 并且 $H(1)=36$, $H(2)=\pi/3$, $H(13)=47$, $H(36)=36$, $H(\pi/3)=\pi/3$, $H(47)=47$. (别想"解出"$H(x)$; 有许多函数H能满足 $H(H(x))=H(x)$. 关于H的附加条件, 提供了求合适H的途径.)

*(e) 求一函数H, 使它满足$H(H(x))=H(x)$, 其中 x 为任意的数, 并满足$H(1)=7$, $H(17)=18$.

12. 若 $f(x)=f(-x)$, 则该函数 f 称为**偶函数**, 若 $f(x)=-f(-x)$, 则称为

奇函数. 例如, 若 $f(x)=x^2$ 或 $f(x)=|x|$ 或 $f(x)=\cos x$, 则 f 都是偶函数, 若 $f(x)=x$ 或 $f(x)=\sin x$, 则 f 为奇函数.

(a) f 可选为偶函数或奇函数, g 也可选为偶函数或奇函数, 则在由此组成 $f+g$ 的四种情形中, 试确定 $f+g$ 何时是偶函数、奇函数或两者都不是. (答案可以很方便地列成 2×2 的表格.)

(b) 对 $f\cdot g$ 做与上题同样的问题.

(c) 对 $f\circ g$ 做与上题同样的问题.

(d) 证明每个偶函数 f, 都能对于无穷多个函数 g, 写成 $f(x)=g(|x|)$.

*13. (a) 证明具有定义域 $\mathbf{R}$ 的任何函数 f 都能写成 $f=E+O$, 其中 E 是偶函数, O 是奇函数.

(b) 证明这样表示 f 的方法是唯一的. (你若先用"解" E 和 O 的方法来证明(b), 也许便能发现(a)的解法.)

14. 设 f 为任意函数, 以 $|f|(x)=|f(x)|$ 定义一新函数 $|f|$. 设 f 和 g 都是函数, 以

$$\max(f, g)(x)=\max(f(x), g(x)),$$
$$\min(f, g)(x)=\min(f(x), g(x))$$

定义两个新函数 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$.

试求以 $|\;|$ 表示 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$ 的公式.

15. (a) 证明 $f=\max(f, 0)+\min(f, 0)$. 函数的这种特殊写法是很有用的; 函数 $\max(f, 0)$ 和 $\min(f, 0)$ 称为 f 的**正部分**和**负部分**.

(b) 设对于所有的 x, $f(x)\geqslant 0$, 则此函数 f 称为**非负函数**. 证明任何函数 f 可用无限多种方法写成 $f=g-h$, 其中 g 和 h 都是非负函数. ("标准的方法"是 $g=\max(f, 0)$ 和 $h=-\min(f, 0)$.) 提示: 任何数当然都一定能用无限多种方法写成两个非负数的差.

*16. 设对于所有的 x 和 y, f 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(a) 证明 $f(x_1+\cdots+x_n)=f(x_1)+\cdots+f(x_n)$.

(b) 证明对于所有的有理数 x, 必有某数 c 使得 $f(x)=cx$. (对于这一问题, 我们丝毫不想涉及无理数 x 的 $f(x)$.) 提示: 需先确定 c 应等于多少. 证明 $f(x)=cx$ 时, 首先考虑 x 是一自然数, 其次考虑 x 是一整数, 再其次考虑 x 是整数的倒数, 最后考虑 x 为一切有理数的情形.

*17. 设对于所有的 x 有 $f(x)=0$, 则对于所有的 x 和 y, f 满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

并且对于所有的 x 和 y, f 也满足 $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$. 现在假设 f 满足这两个性质, 但 $f(x)$不恒为0. 试按下列步骤证明对于所有的 x, $f(x)=x$.

(a) 证明 $f(1)=1$.

(b) 如果 x 为有理数, 证明 $f(x)=x$.

(c) 如果 $x>0$, 证明 $f(x)>0$. (这一题虽然复杂, 但若注意到前面两章习题的注解, 就会知道怎么做.)

(d) 如果 $x>y$, 证明 $f(x)>f(y)$.

(e) 证明对于所有的 x 有 $f(x)=x$. 提示: 用任意两数之间有一有理数这一事实.

*18. f, g, h 和 k 必须满足什么条件才能对于所有的 x 和 y 使

$$f(x)g(y)=h(x)k(y)?$$

*19. (a) 证明没有函数 f 和 g 能具有下列两个性质之一:

(i) 对于所有的 x 和 y, $f(x)+g(y)=xy$.

(ii) 对于所有的 x 和 y, $f(x+y)=g(x)-y$.

提示: 试选特殊的 x 和 y 的值, 以得到关于 f 或 g 的某些情况.

(b) 求函数 f 和 g, 使得对于所有的 x 和 y 满足 $f(x+y)=g(xy)$.

*20. (a) 求一个不是常值函数的函数 f, 使 $|f(y)-f(x)|\leqslant|y-x|$.

(b) 假设对于所有的 x 和 y 有 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$. (为什么这意味着 $|f(y)-f(x)|\leqslant(y-x)^2$?) 证明 f 是常值函数. 提示: 将区间 $[x,y]$ 分成 n 等份.

21. 对下列各式, 或加以证明, 或举出反例.

(i) $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$.

(ii) $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$.

(ii) $\dfrac{1}{f\circ g}=\dfrac{1}{f}\circ g$.

(iv) $\dfrac{1}{f\circ g}=f\circ\left(\dfrac{1}{g}\right)$.

22. (a) 假设 $g=h\circ f$, 证明: 若 $f(x)=f(y)$ 则 $g(x)=g(y)$.

(b) 反之, 设 f 和 g 是这样的两个函数: 当 $f(x)=f(y)$ 时 $g(x)=g(y)$. 证明有一函数 h, 使 $g=h\circ f$. 提示: 当 z 具有 $z=f(x)$ 的形式时试定义 $h(z)$ (这些只是 z 的问题), 并用上述假设来证明你的定义不

会引起混乱.

23. 假设 $f\circ g=I$, 其中 $I(x)=x$. 证明

(a) 若 $x\neq y$, 则 $g(x)\neq g(y)$;

(b) 每个数 b 可以对于某数 a 写成 $b=f(a)$.

*24. (a) 设 g 是具有这样性质的函数: 当 $x\neq y$ 时 $g(x)\neq g(y)$. 证明有一函数 f 满足 $f\circ g=I$.

(b) 假设 f 为一函数, 它使每个数 b 对某数 a, 可以写成 $b=f(a)$. 证明有一函数 g 满足 $f\circ g=I$.

*25. 求一函数 f, 使得对某一函数 g 有 $g\circ f=I$, 但没有函数 h 能满足 $f\circ h=I$.

*26. 设 $f\circ g=I$ 和 $h\circ f=I$. 证明 $g=h$. 提示: 应用复合满足结合律的事实.

27. (a) 设 $f(x)=x+1$. 有没有函数 g 满足 $f\circ g=g\circ f$?

(b) 设 f 为一常值函数. 哪些函数 g 满足 $f\circ g=g\circ f$?

(c) 设对于所有函数 g 有 $f\circ g=g\circ f$. 证明 f 是恒等函数 $f(x)=x$.

28. (a) 设 F 为所有定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数的集合. 用本章所定义的 $+$ 和 $\cdot$ 来证明性质 P1—P9(P7 除外)对于 F 都成立, 假设把 0 和 1 理解为常值函数.

(b) 证明 P7 不成立.

*(c) 证明 P10—P12 不成立. 换言之, 证明在 F 内没有函数的集合 P 能满足 P10—P12. (只要考虑除 x_0 和 x_1 两点之外等于 0 的函数, 这将使问题简化.)

(d) 若以 $f<g$ 表示 $f(x)<g(x)$, 其中 x 为所有的数, 现在 P′10—P′13 (见习题一, 8)中有哪些能成立?

(e) 如果 $f<g$, 则是否 $h\circ f<h\circ g$? 是否 $f\circ h<g\circ h$?

选题解答

1. (i) $(x+1)/(x+2)$; 只有当 $x\neq-1$ 和 $x\neq-2$ 时 $f(f(x))$ 才有意义.

(iii) $1/(1+cx)$ (对于 $x\neq-1/c$, 其中 $c\neq0$).

(v) $(x+y+2)/(x+1)(y+1)$ (对于 $x, y\neq-1$).

(vii) 因 $f(x)=f(cx)$ 意味着 $x=cx$; 又依题设, 至少对一个 $x\neq0$ 等式成

立，所以只有 $c=1$.

2. (i) $y\geqslant 0$ 且为有理数，或 $y\geqslant 1$.

   (iii) 0.

   (v) $-1, 0, 1$.

3. (i) $\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

   (iii) $\{x: x\neq 1$ 和 $x\neq 2\}$.

   (v) $\varnothing$.

4. (i) 2^{2^y}.

   (iii) $2^{2^{\sin t}}+\sin(2^t)$.

5. (i) $P\circ s$.

   (iii) $s\circ S$.

   (v) $P\circ P$

   (vii) $s\circ s\circ s\circ P\circ P\circ P\circ s$.

11. (a) y.

    (b) $H(y)$.

    (c) $H(y)$.

12. (a)

	偶函数	奇函数
偶函数	偶函数	两者都不是
奇函数	两者都不是	奇函数

(b)

	偶函数	奇函数
偶函数	偶函数	奇函数
奇函数	奇函数	偶函数

(c)

	f 为偶函数	f 为奇函数
g 为偶函数	偶函数	偶函数
g 为奇函数	偶函数	奇函数

(d) 对于 $x\geqslant 0$ 设 $g(x)=f(x)$，而对于 $x<0$ 任意定义 g.

21. (i) 设 $g(x)=h(x)=1$ 并设 f 为这样的函数：$f(2)\neq f(1)+f(1)$，则

$$f\circ(g+h)\neq f\circ g+f\circ h.$$

(ii) $[(g+h)\circ f](x)=(g+h)(f(x))=g(f(x))+h(f(x))$

$=(g\circ f)(x)+(h\circ f)(x)=[(g\circ f)+(h\circ f)](x).$

(iii) $\frac{1}{f\circ g}(x)=\frac{1}{f(g(x))}=\frac{1}{f}(g(x))=\left(\frac{1}{f}\circ g\right)(x).$

(iv) 设 $g(x)=2$ 并设 f 为这样的函数: $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 1/f(2)$. 则

$$1/(f\circ g)\neq f\circ(1/g).$$

附录　有序偶

不仅在函数的定义中而且在本书的其他部分都要用到有序偶这个概念. 有序偶的定义还未给出，并且也未明确说明有序偶应有什么性质. 我们所需要的一个性质可形式地叙述为，有序偶$(a$ $b)$必须由 a 和 b 以及给出它们的顺序来决定:

$$若(a,b)=(c,d),\ 则\ a=c\ 及\ b=d.$$

可以这样最方便地来处理有序偶，即将(a,b)看成为一个未定义的术语，并将其基本性质看成是一个公理——因为这个性质是关于有序偶的唯一有意义的事实，没有多大必要去考虑有序偶"究竟"是什么. 对这样处理感到满意的人，就不再需要阅读下文了.

有些读者感到，除非先定义出有序偶从而使其基本性质变成一个定理，他们将不会满意，这一简短附录的其余部分就是为这些读者而写的. 将我们的注意力局限在数的有序偶上是没有意义的；使任何两个数学对象的有序偶的概念能够互通，才是合理的和重要的. 亦即我们的定义应当包含对所有数学分支都通用的概念. 数学各领域中的一个通用概念是集的概念，而有序偶(如同数学中别的对象一样) 可以用此概念来定义. 一个有序偶可以看成为比

较特殊的集合.

包含两个元素 a 和 b 的集合 $\{a, b\}$ 显然可以优先选用，但不能作为 (a, b) 的定义，因为由 $\{a, b\}$ 无法确定 a 或 b 哪一个是第一个元素. 一个更可取的选择是如下比较奇怪的集：

$$\{\{a\},\ \{a, b\}\}.$$

该集有两个元，各元本身又是集，一个元是集 $\{a\}$，包含单独的一个元素 a，另一个是集 $\{a, b\}$. 我们将 (a, b) 定义为这样的集，好象是很不妥当的. 这样选择的理由是因为由这个定义可以立即得到定理(定义起作用)，再无其他原因.

定义

$$\boxed{(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.}$$

定理 1 设 $(a, b) = (c, d)$，则 $a = c$ 和 $b = d$.

证明 原假设表示

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

现在 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 只包含两个元 $\{a\}$ 和 $\{a, b\}$；而 a 是 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 两个元中的唯一的公共元素. 同样，c 是 $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ 的两个元中的唯一公共的元. 因此 $a = c$. 于是有

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\},$$

剩下只要证明 $b = d$. 分两种情形来考虑较方便.

情形 1. $b = a$. 在此情形中，$\{a, b\} = \{a\}$，因此，集 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 实际上只有一个元，就是 $\{a\}$. $\{\{a\}, \{a, d\}\}$ 亦然，所以 $\{a, d\} = \{a\}$. 这意味着 $d = a = b$.

情形 2. $b \neq a$. 在此情形中，b 是在 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 的一个元中，而不在另一个元中. 因此，b 必在 $\{\{a\}, \{a, d\}\}$ 的一个元中，而不在另一个元中. 这只有 b 在 $\{a, d\}$ 但不在 $\{a\}$ 中才能成立. 因此，$b = a$ 或 $b = d$，但 $b \neq a$，故 $b = d$.

第四章 图 形

对数学家提到实数时，在他的脑子里大概会十分自然地出现一条直线形象．他多半既不想排除也不很欢迎这个想象上的实数图象．“几何的直观”使他能利用这种图象来解释关于数的命题，甚至可以暗示证明它们的方法．虽然在第一部分研究实数的性质时不常用几何图象来阐明，但在第二部分中用这种几何图象来解释将会大有帮助．

你们大概已经熟悉将直线看作实数图象的习惯方法，即把每一实数与直线上的点相联系．为此，我们任选一点，记作 0，在它右边任选一点，记作 1(图 1)．在它右边两倍于这个距离的点记作 2，与 0 至 1 距离相等但在 0 左边的点记作 −1，等等．按照这样

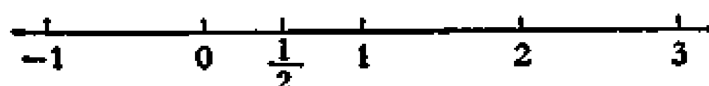


图 1

排列，若 $a<b$，则对应于 a 的点在对应于 b 的点的左边．我们也可以明显地绘出如 1/2 那样的有理数．通常假定无理数也可以想法在这图上“绘”出，这样每一实数都可以在直线上绘成一个点．我们不想小题大做地来证明这个假设，因为这种“绘”数的方法只是描绘某一抽象概念的一种方法，而我们的证明从来不依靠这些图象(虽然我们经常利用一个图象来暗示或帮助解释某一证法)．因为这种几何图象起着如此突出的(尽管是非本质的)作用，故在谈到数时经常使用几何语言——这样，有时将一个数称为一个点，并常将 R 称为实直线．

根据这种几何图象，数$|a-b|$有一简单的解释：它是a和b之间的距离，即以a和b为两端点的线段的长度．这意味着满足$|x-a|<\varepsilon$(这个例子经常会遇到，故特别加以考虑)的数的集合，可以用图象表示为到a的距离小于ε的点的集合．这些点的集合构成由$a-\varepsilon$至$a+\varepsilon$的"区间"，它也可以描述为与满足$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$内的数$x$相对应的所有点(图 2)．



图 2

对应于区间的数的集合经常会遇到，因此最好给它们一个专门的名称．集合$\{x:a<x<b\}$用(a,b)表示，称为由a至b的开区间．这个记号自然有点含糊，因为(a,b)也用来表示一个数偶，但在上下文中，往往可以看出(或容易弄清楚)究竟它是指一个数偶还是指一个区间．注意，若$a\geqslant b$，则$(a,b)=\varnothing$，即没有元素的集合；然而实际上，当提到一个区间(a,b)时，几乎总是假设a小于b(如果要慎重，就明确写出这个假设，不然就隐含这个假设)．

集合$\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$用$[a,b]$表示，并称为由$a$至$b$的闭区间．虽然这个记号通常用于$a<b$的情况，但有时也用于$a=b$的情况．区间$(a,b)$和$[a,b]$的通常绘法如图 3 所示；因为这两种区间在图上无法精确区别开来，所以采用各种习惯绘法．图 3 也表示出某些"无穷大"的区间．集合$\{x:x>a\}$用(a,∞)表示，而集合$\{x:x\geqslant a\}$用$[a,\infty)$表示；集合$(-\infty,a)$和$(-\infty,a]$也可类似定义．关于这一点必须注意：符号∞和$-\infty$，虽然经常读作"无穷大"和"负无穷大"，但纯属示意的；没有数"∞"能对所有数a满足$\infty\geqslant a$．由于在许多地方将会出现记号∞和$-\infty$，往往必须规定它们只用在与数有关的方面．所有实数的集合$\mathbf{R}$也可以看成为一"区间"，并且有时用$(-\infty,\infty)$表示．

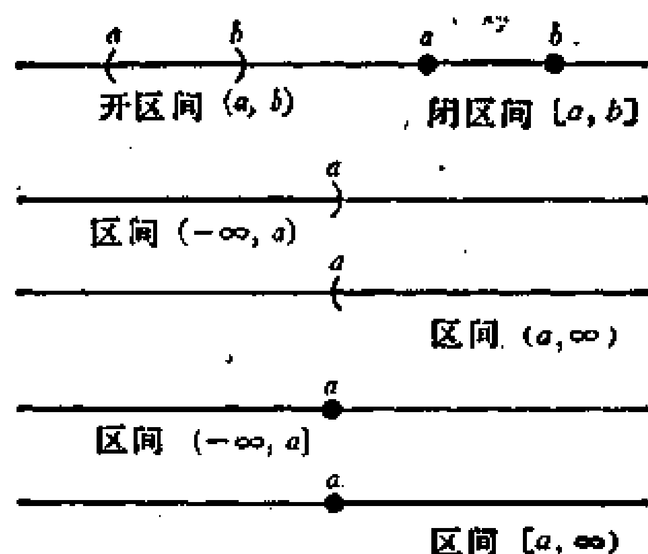


图 3

我们对绘数偶的方法比绘数的方法更感兴趣．这个方法你大概也熟悉，需要一个两条互相垂直的直线构成的"坐标系"．为了区分这两条直线，我们将其中一条称为**水平轴**，另一条称为**直立轴**．(更普通的术语，例如"第一"和"第二"轴，从逻辑上说虽更为可取，但是大多数的人这样拿书或至少在黑板上是这样，所以采用"水平"和"直立"更形象．) 这两轴中的每一轴都可以用实数来标记，但是我们还可以用数偶$(a, 0)$来标记水平轴上的点，用数偶$(0, b)$来标记直立轴上的点，因而这两轴的交点，坐标系的原点，用$(0, 0)$来标记．现在，任意点(a, b)都可以绘出，如图 4 所示，该点在矩

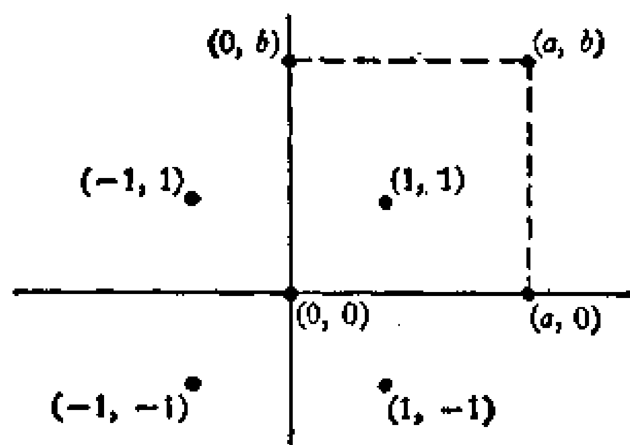


图 4

形的一个顶点上，该矩形的其余三个顶点是$(0,0)$，$(a,0)$和$(0,b)$．数a和b分别称为用这种方法确定的点的第一和第二坐标．

注意，我们真正关心的是画函数的方法．因为一个函数只是数偶的集合，所以我们绘出函数中的每一数偶便绘出了该函数．用这种方法绘得的图形称为函数的**图形**．换言之，f的图形包含所有对应于数偶$(x,\ f(x))$的点．因为大多数函数包含无穷多的数偶，因而作图想必是艰巨的，但事实上大多数函数的图形是很容易绘出的．

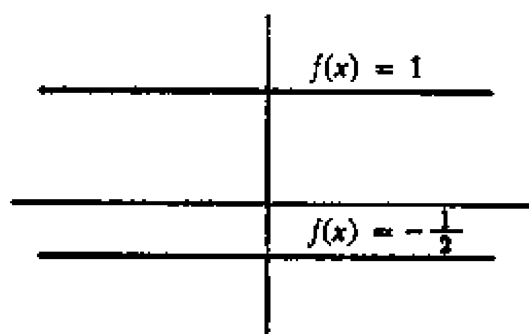


图 5

并不奇怪，最简单的函数，常值函数$f(x)=c$的图形最简单．容易看出，函数$f(x)=c$的图形是一条平行于水平轴的直线，它至该轴的距离为c(图 5)．

函数$f(x)=cx$的图形也特别简单——通过$(0,0)$的直线，如图 6 所示．其证明如图 7 所示：

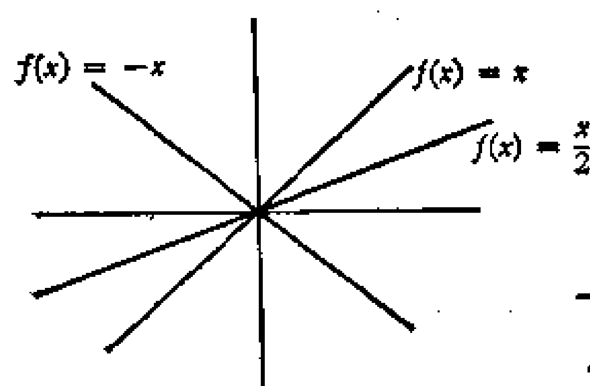


图 6

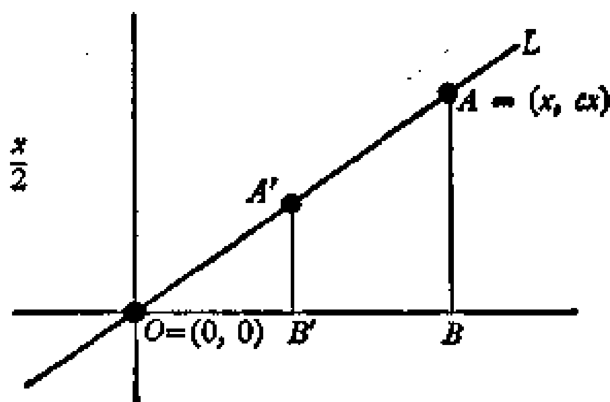


图 7

设x为某个不等于 0 的数，并设L是这样一条直线，它通过对应于$(0,0)$的原点O，并通过对应于(x,cx)的点A．当三角形$A'B'O$与三角形ABO相似时，亦即当

$$\frac{A'B'}{OB'}=\frac{AB}{OB}=c$$

时，具有第一坐标 y 的一点 A' 将在直线 L 上；上式正好是 A' 对应于偶 (y, cy) 的条件，亦即 A' 位于 f 的图形上．上述证明暗中假设了 $c>0$，不过其他情形也是很容易证明的．在以上证明中，度量三角形两边的比的数 c 称为直线的**斜率**，平行于该直线的直线也具有斜率 c．

我们没有将以上论证称为或看成为正式的证明．事实上，严格的论证要旁涉那些我们根本不准备讲的枝节内容．任何与代数概念有联系的几何命题的严格论证，首先要确实证明（或明确假设）直线上的点能用一种确切的方法与实数相对应．除此之外，必须象我们讨论实数的性质那样，精确地来讨论平面几何．详细地讨论平面几何是一个很好的题材，但这决不是研究微积分的先决条件．我们只用几何图形来帮助直观认识，为了这个目的（并且为了数学中大部分的内容），只要将平面**定义**为所有实数偶的集合，并将直线**定义**为某些数偶的集合，其中包括集合 $\{(x, cx): x$ 为实数$\}$．要使这个人为构造的几何具有中学所学过的几何的全部结构，还需加一个定义．设 (a, b) 和 (c, d) 为平面上的两点，即两实数偶，我们定义 (a, b) 和 (c, d) 之间的**距离**为

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

如果这个定义的由来不清楚，图 8 可用作适当的说明——在此定

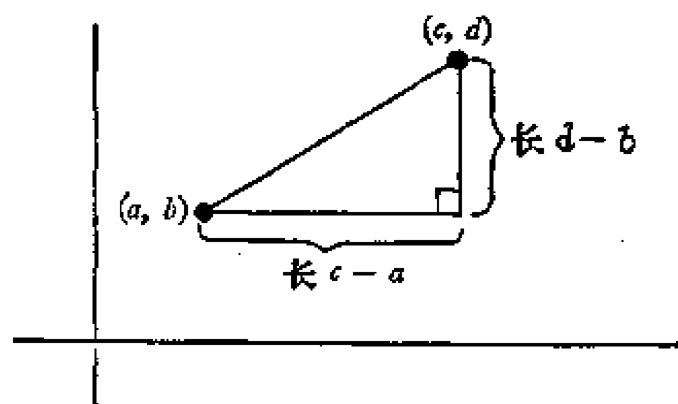


图 8

义中，毕达哥拉斯定理已被引入我们的几何中*.

再回到我们非正规的几何图形，不难看出(图 9)函数 $f(x)=cx+d$ 的图形是一条具有斜率 c 并通过点 $(0,d)$ 的直线．因此，函数 $f(x)=cx+d$ 称为**线性函数**．这样简单的线性函数经常会遇到，并且容易处理．下面是一个典型的问题，其解法一点也不麻烦．已知两个不同的点 (a, b) 和 (c,d)，求线性函数 f，使它的图形通过 (a,b) 和 (c,d)．这等于说 $f(a)=b$ 和 $f(c)=d$．设 f 具有 $f(x)=\alpha x+\beta$ 的形式，则必有

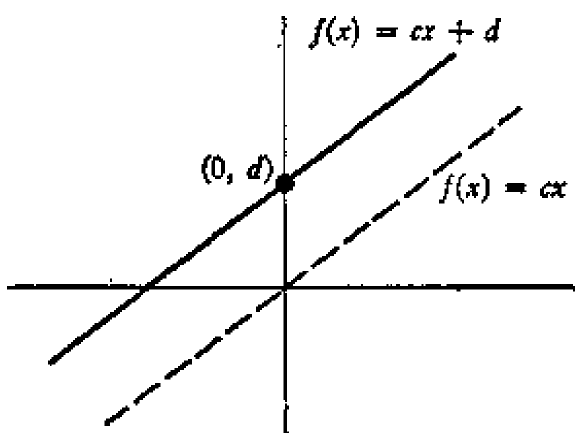


图 9

$$\alpha a+\beta=b,$$
$$\alpha c+\beta=d;$$

因此，$\alpha=(d-b)/(c-a)$ 和 $\beta=b-[(d-b)/(c-a)]a$，于是

$$f(x)=\frac{d-b}{c-a}x+b-\frac{d-b}{c-a}a=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b,$$

用"点斜式"表示的公式(见第 5 题)很容易记住．当然，只有当 $a\neq c$ 时才有解．线性函数的图形只表示不平行于直立轴的直线．直立线不是任何函数的图形；事实上，一个函数的图形不能包含同一直立线上两个不同的点．这结论是直接由函数的定义得来的——同一直立线上的两点对应于 (a,b) 和 (a,c) 这样形式的数偶，按定义，若 $b\neq c$ 则一个函数就不能包含 (a,b) 和 (a,c)．反之，设在平面上的点的集合没有任何两点在同一直立线上，则它一定是一个函数

* 爱挑剔的读者可能反对此定义，因为尚不知道非负数必有平方根．对此异议目前确实无法解释——在这个小疑问解决之前，对上列定义只好有保留地先接受下来．

的图形．这样，图 10 中的头两个图不是函数的图形，而后两个图则是函数的图形；注意，第四图是这样函数的图形，它的定义域不是整个R，因为某些直立线上根本没有图形上的点．

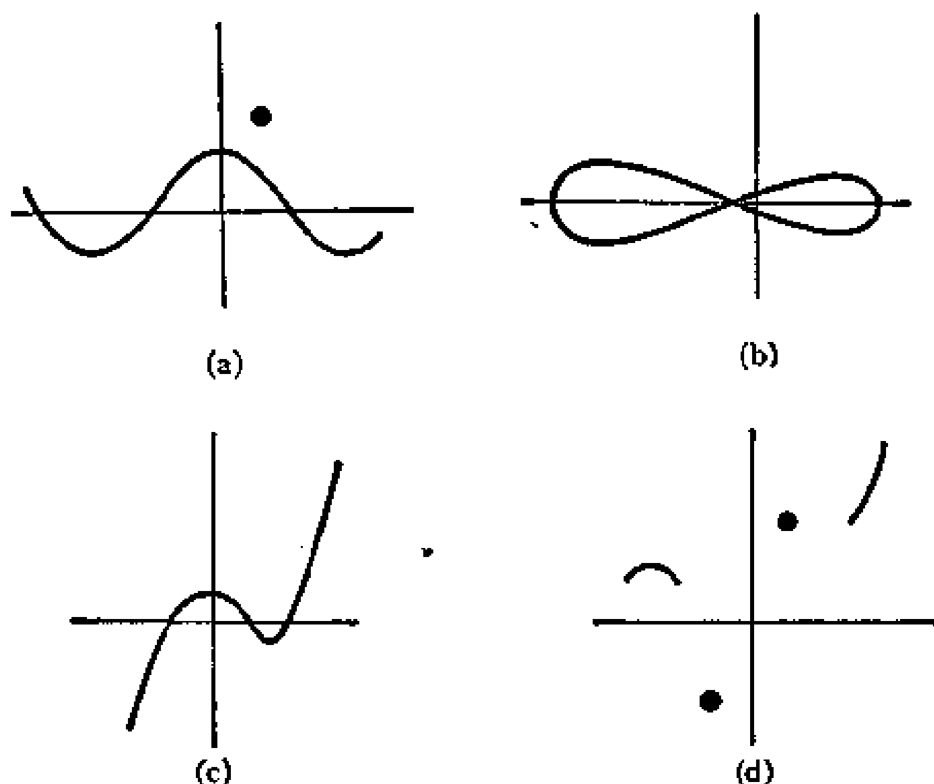


图 10

继线性函数之后最简单的也许是函数 $f(x)=x^2$．如果我们绘出 f 中的几个数偶，即几个形如 (x, x^2) 的数偶，我们便得一图形如图 11 所示．

不难使你相信，所有的数偶 (x, x^2) 都在一条如图 12 所示的曲线上；该曲线称为**抛物线**．

因图形是绘在纸上的，(在本情形下)是印刷成的，“图形是否真是这样？”这个问题很难讲清楚．因为线条有粗细，所以真正准确的图形是没有的．然而，我们可以问某些问题：例如，如何断定其图形不象图 13 中的任何一个图形？容易看出，甚至容易证明，其图形不象(a)．因若 $0<x<y$，则 $x^2<y^2$，这样，图形在 y 处必定比 x 处高，而(a)的情形并非如此．只要作图精确，绘出几个数偶

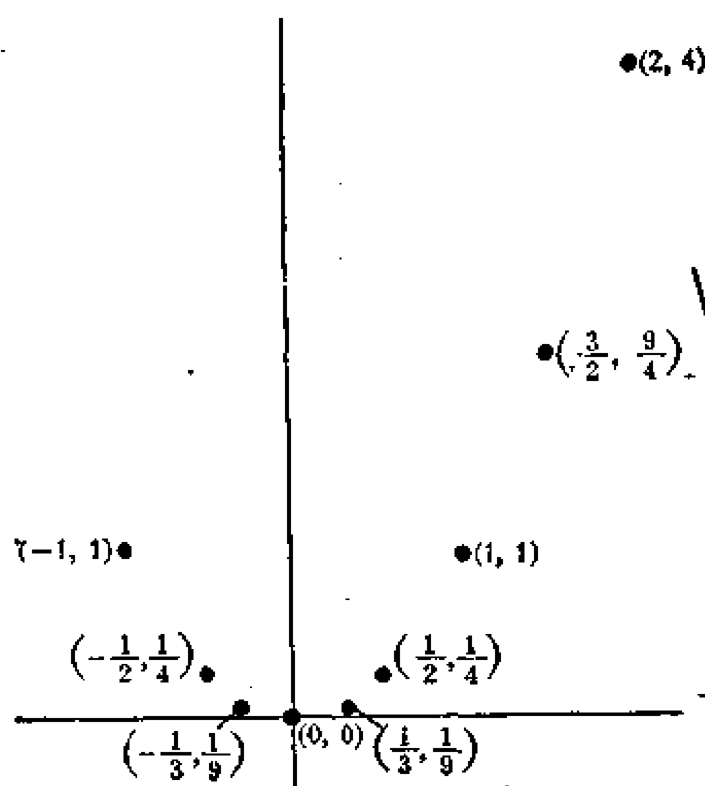


图 11

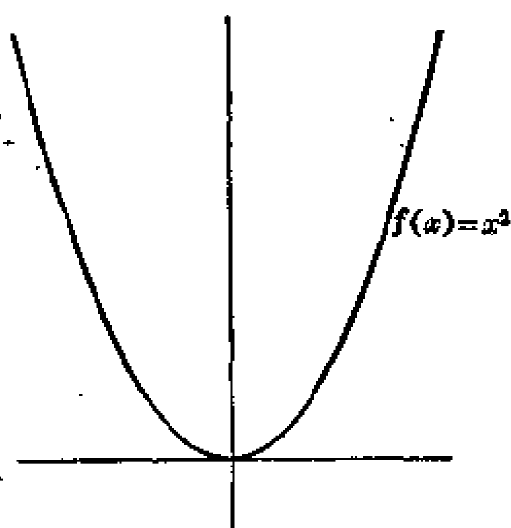


图 12

(x, x^2)，也就容易看出其图形不会有(b)中那样的大"跳跃"，或(c)中那样的"隅角"．然而为了证明这些论断，我们首先要说明，如何用数学的方式表示一个函数没有"跳跃"或"隅角"；这些概念已包含微积分的某些基本概念．虽然我们最终能严格地定义它们，但目前你可以试定义这些概念，然后检查你的定义，再后将这些定义和数学家已经认可的定义相比较．如果结果相符，你自然要受到

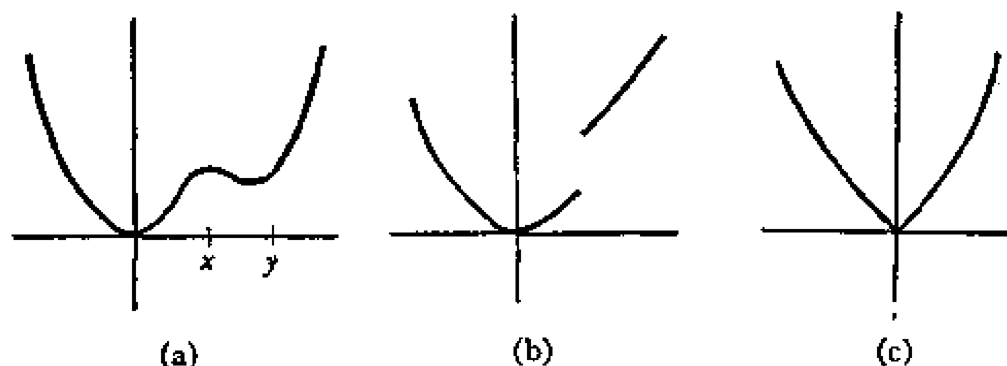


图 13

祝贺！

函数 $f(x)=x^n$，其中 n 为任意自然数，有时称为幂函数. 同时绘出几个这样的函数，它们的图形就很容易比较，如图 14 所示.

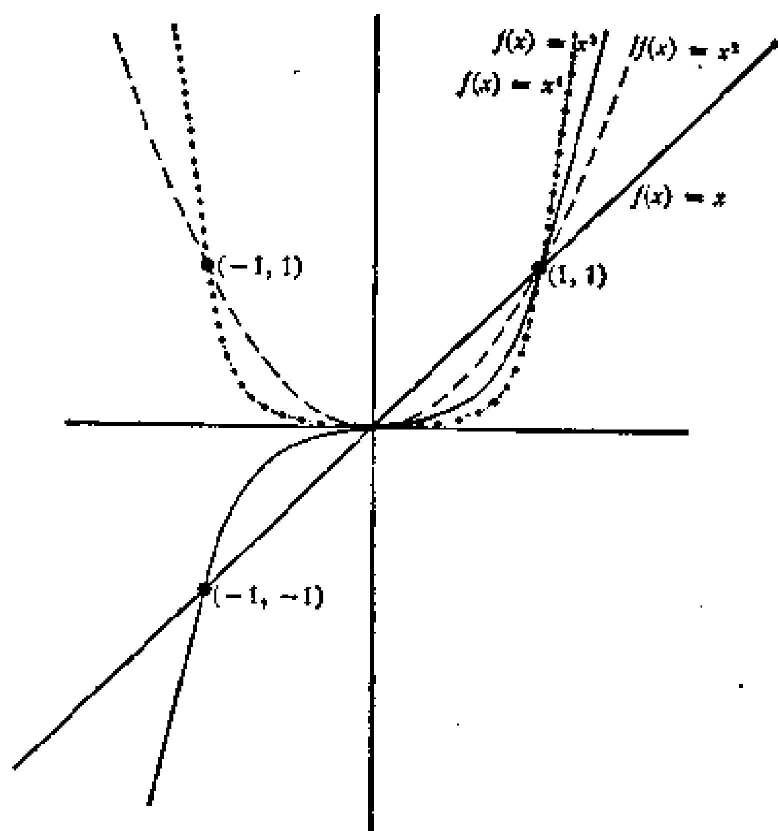


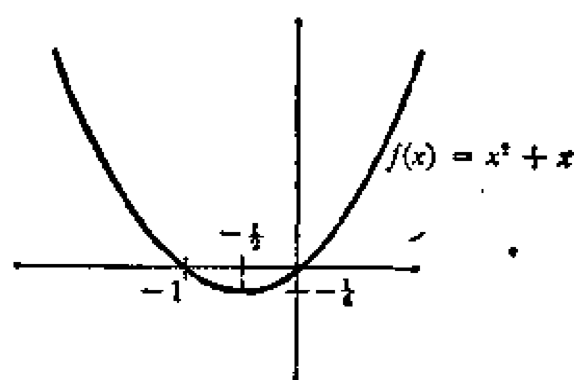
图 14

幂函数是前章所述的多项式函数的特殊情形. 两个特殊的多项式函数如图 15 所示，图 16 是多项式函数

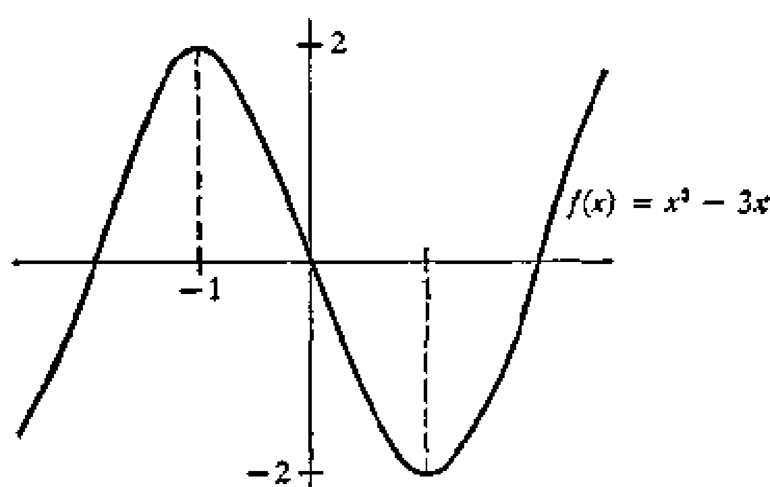
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

在 $a_n>0$ 情形下的示意图.

一般地说，f 的图形至多有 $n-1$ 个“峰”或“谷”（所谓“峰”是如图 16 所示的点 $(x,f(x))$，所谓“谷”则如点$(y,f(y))$. 峰和谷的数目实际上可以更少(例如，幂函数至多只有一个谷). 虽然，容易说出这些论断，但其证明要到第三部分才可望找到(若用第三部分中有效的方法，就很容易证明).

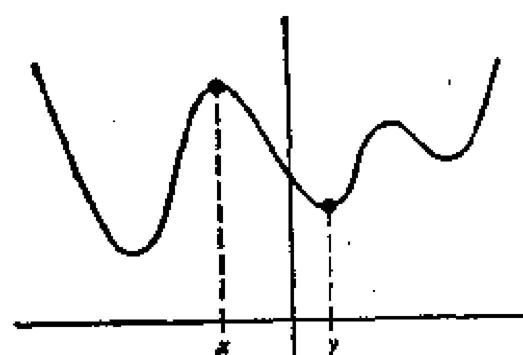


(a)



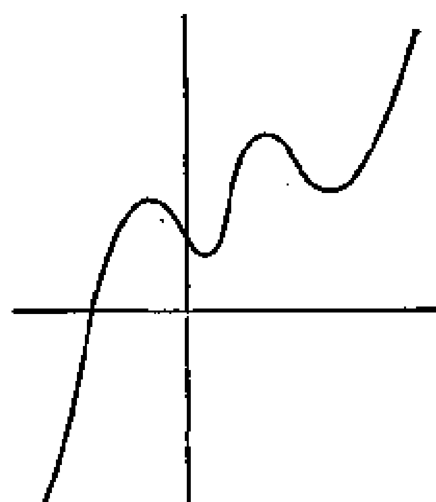
(b)

图 15



n为偶数

(a)



n为奇数

(b)

图 16

图 17 所示为几个有理函数的图形. 虽然有理函数比多项式函数更多样化，但当我们能用导数，即第三部分的基本工具时，它们的特性也是容易分析的.

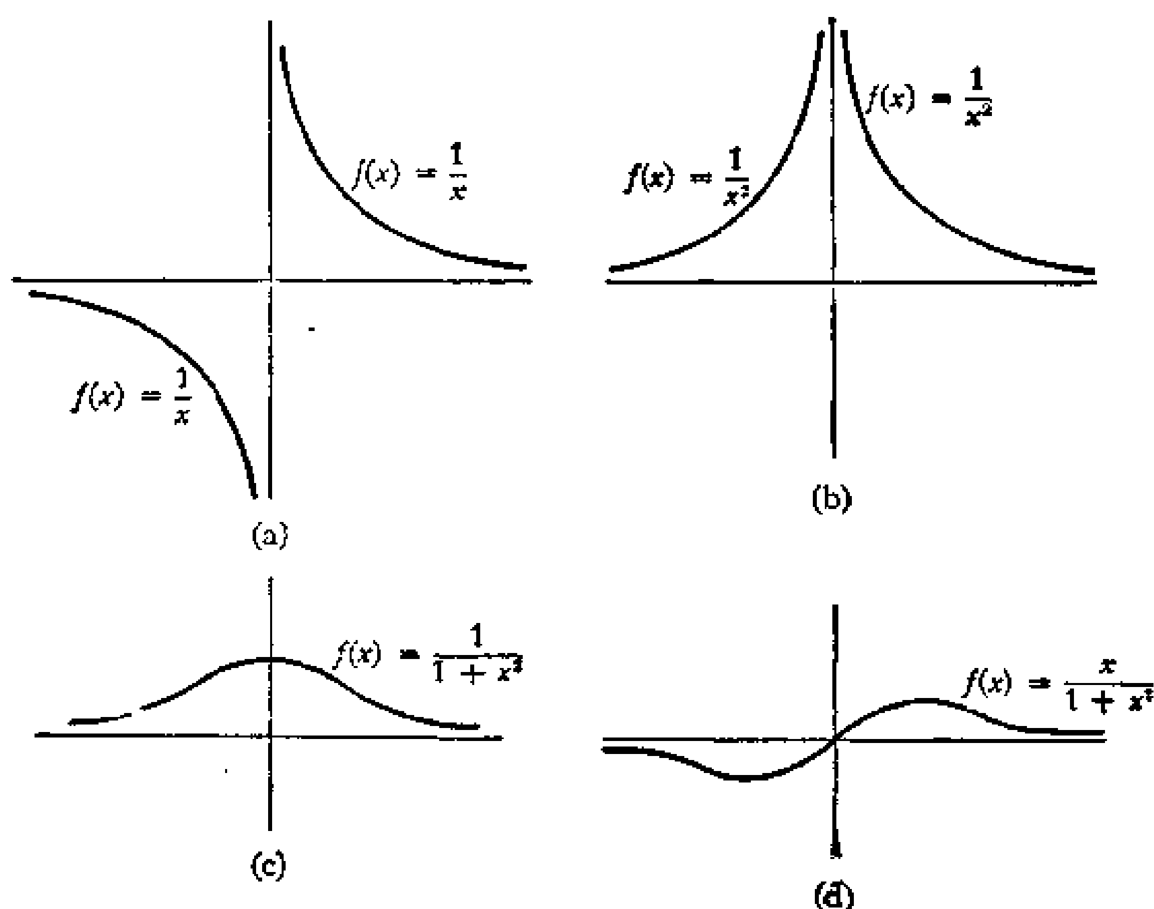


图 17

将已经研究过的函数的图形"拼凑"起来即可绘出许多有趣的图形. 图 18 中的图形全由直线构成. 这个图形表示的函数 f 满足

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^{n+1},$$

$$f\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{n+1},$$

$$f(x)=1,\quad |x|\geqslant 1,$$

而在每个区间$[1/(n+1), 1/n]$和$[-1/n, -1/(n+1)]$内都是线性函数(数 0 不在 f 的定义域内). 当 x 在$[1/(n+1), 1/n]$之内时,

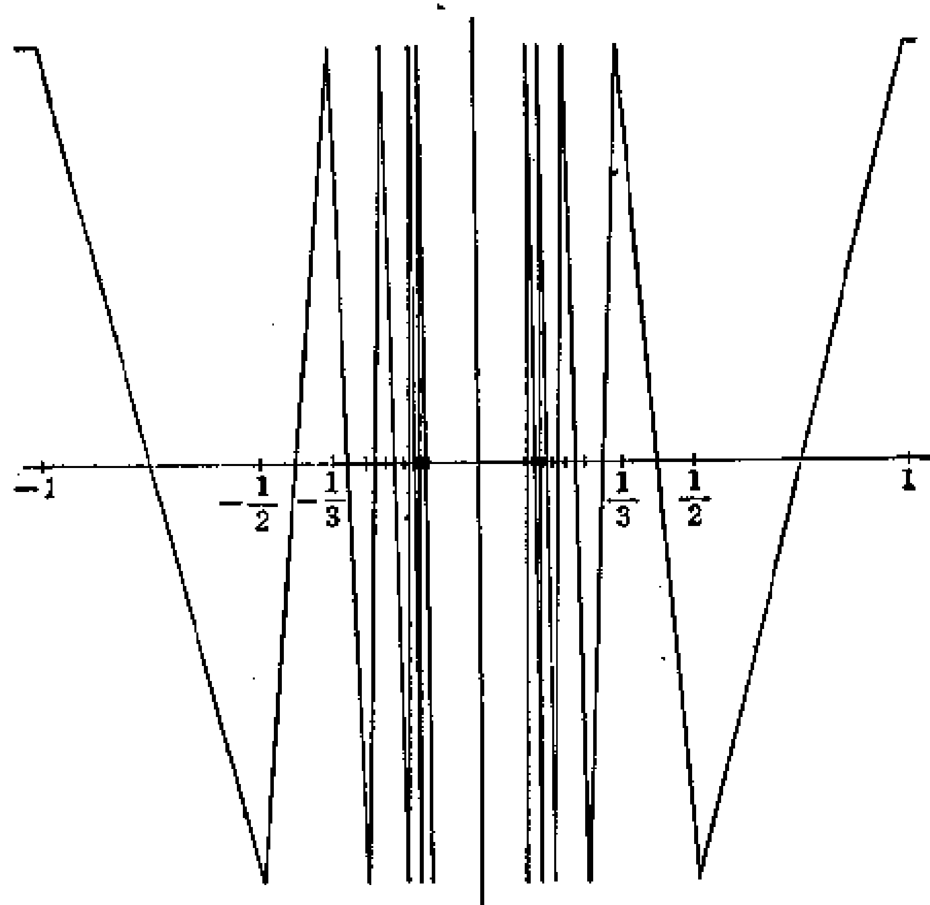


图 18

当然可以写出 $f(x)$ 一个明显的公式；这是应用线性函数的很好练习，并使你相信一个图抵得上许多文字的叙述.

实际上，可以用更简单的方法，即利用正弦函数，来定义一个在 0 附近具有无数次振动的性质的函数. 在第十五章里，我们将详细讨论这种函数，并特别讨论弧度的量度，眼下用度来量度角是最容易的. 正弦函数的图形如图 19 所示（水平轴的尺度已改变，以便使图形更清楚；弧度的量度除了有重要的数学性质之外，还具

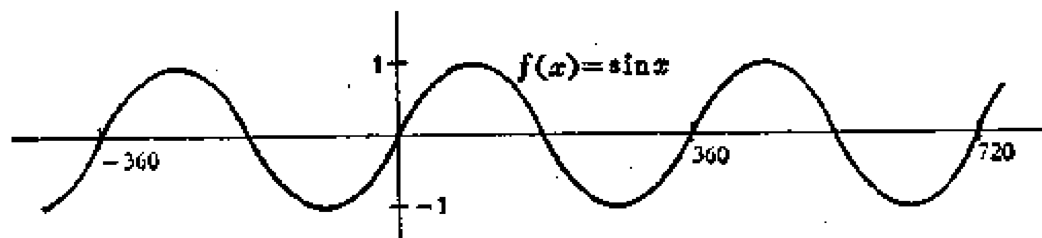


图 19

有使这种改变成为不必要的优点)。

现在考虑函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. f 的图形如图 20 所示. (为了绘出该图,首先注意下列事实是有帮助的,

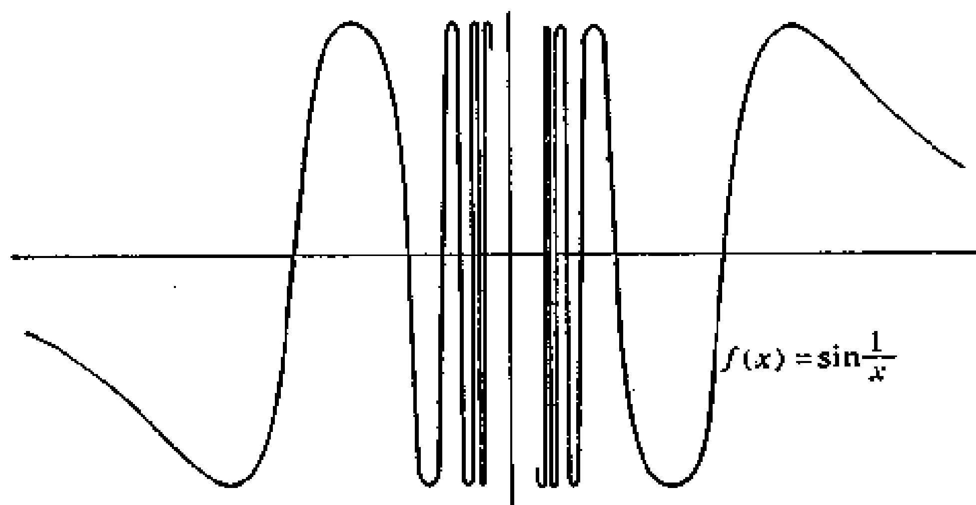


图 20

当 $x=\frac{1}{180}, \frac{1}{360}, \frac{1}{540}, \cdots$时, $f(x)=0$,

当 $x=\frac{1}{90}, \frac{1}{90+360}, \frac{1}{90+720}, \cdots$时, $f(x)=1$,

当 $x=\frac{1}{270}, \frac{1}{270+360}, \frac{1}{270+720}, \cdots$时, $f(x)=-1$.)

注意, 当 x 很大时 $\frac{1}{x}$ 很小, $f(x)$ 也很小; 当 x 是"很大的负数"时,即当 x 为负值且 $|x|$ 很大时, $f(x)$ 再次接近于 0, 尽管 $f(x)<0$.

这个函数的一个有趣的修改是 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. 它的图形的大概形状如图 21 所示. 由于在 0 附近, $\sin\frac{1}{x}$ 在 1 和 -1 之间作无数次的振动, 所以函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 x 和 $-x$ 之间作无数次的振动. 当 x 很大或负得很大时图形的特性更难分析. 因为这时 $\sin\frac{1}{x}$ 趋近于零而 x 却愈来愈大, 好象不好确定它们的乘积. 虽然

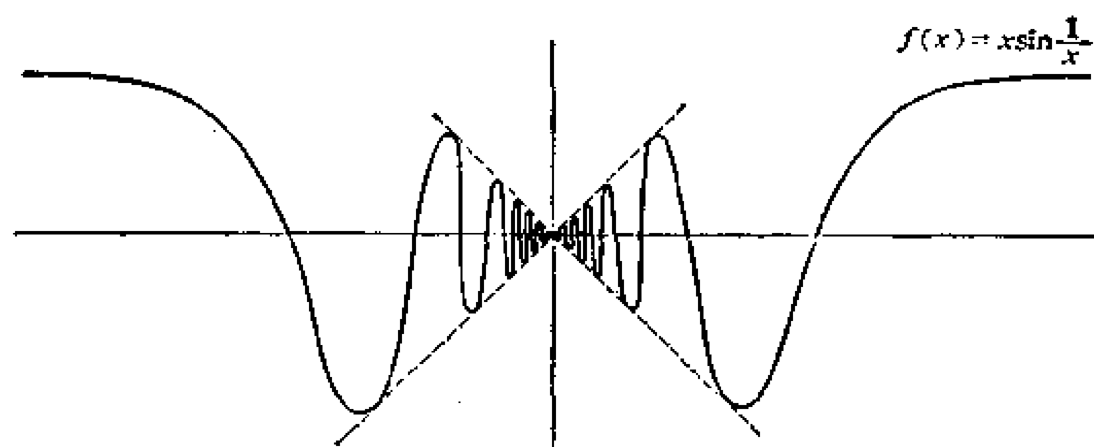


图 21

其乘积可以确定，但这是另一个问题，最好推迟至第三部分去解决. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$的图形也已用图加以说明(图 22).

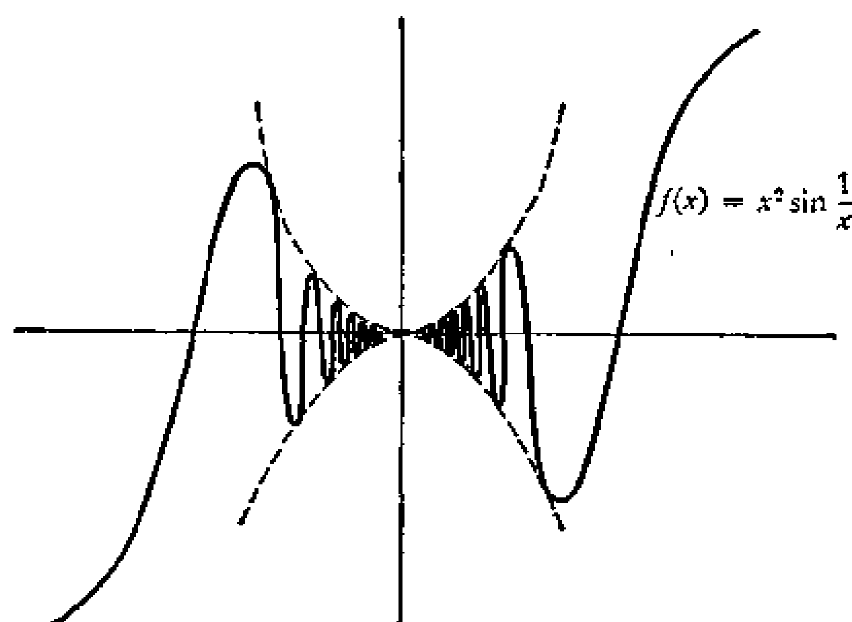


图 22

这些具有无数次振动性质的函数，显然不能期望"精确"地绘出其图形. 我们最好只绘出它的一部分而略去其靠近 0 的部分(这是有趣的部分). 实际上，容易找到更简单的函数，其图形也无法"精确"地绘出.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 2, & x\geqslant 1\end{cases} \quad \text{和} \quad g(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ 2, & x>1\end{cases}$$

的图形只能用某种习惯绘法加以区别，这种方法与绘开区间和闭区间时所用的方法相类似(图 23)。

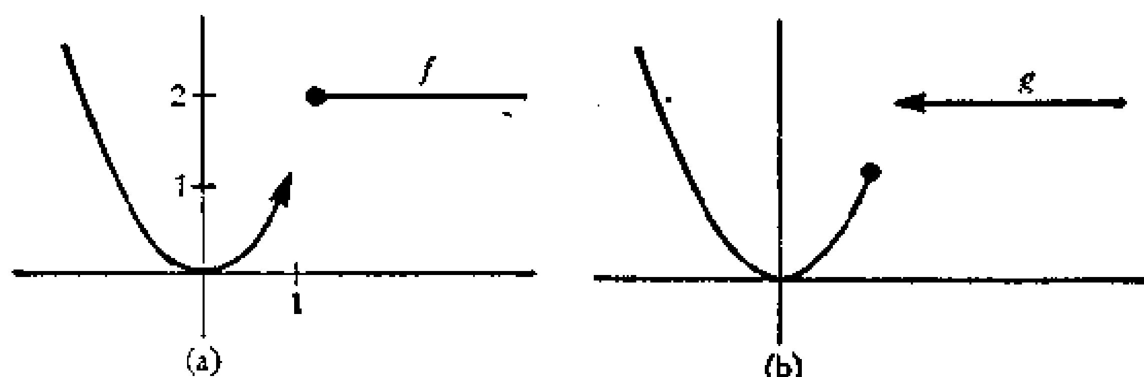


图 23

最后一例是一个这样的函数，它的图形是绘不出来的：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,}\\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,}\end{cases}$$

虽然 f 的图形必包含水平轴上的无穷多的点，也包含平行于水平轴的一条直线上的无穷多的点，但它不包含这两条直线中任何一条直线上所有的点。图 24 表示一般课本中的绘法。为了区别该图的两部分，对应于无理数 x 的直线上的圆点排得密些。(采取这种惯例，确实有数学上的理由，但它是根据某些不简单的概念，这种概念将在习题二十，5 和 6 中介绍。)

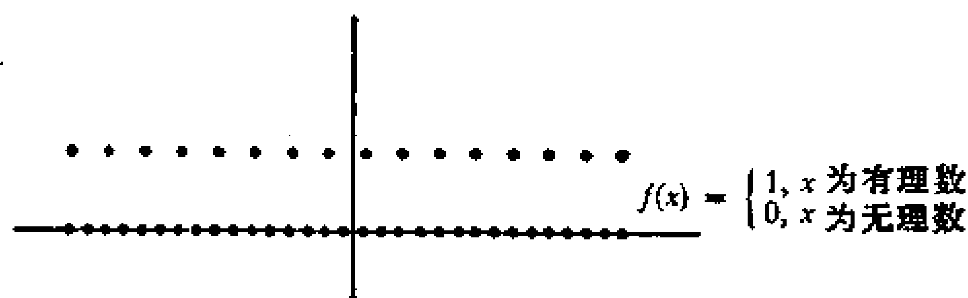


图 24

某些函数显示出的特性如此引人注意，以致使人容易忘掉平面上某些极简单但很重要的点集不是函数的图形。所有这些例子中最重要的是圆。以 (a, b) 为圆心，$r>0$ 为半径的圆，按定义，包

含所有到(a,b)的距离为 r 之点(x,y). 于是圆是由满足

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

或 $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

的所有点(x,y)构成的 (图 25).

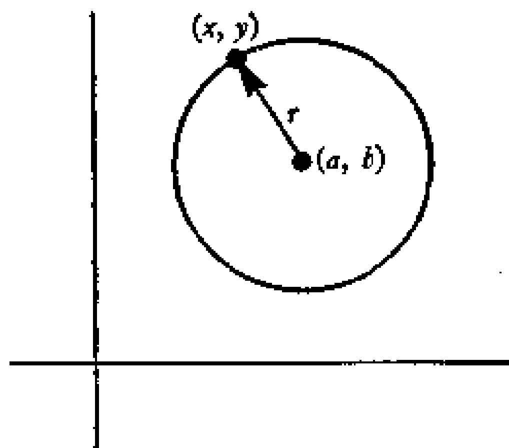


图 25

圆心为$(0,0)$, 半径为 1 的圆, 通常视为一种标准圆, 称为单位圆.

与圆有密切关系的是椭圆. 椭圆的定义是到两固定点的距离之和为常数的点的集合. (这两个固定点重合时, 我们即得一圆.) 为了方便起见, 若将这两点取在$(-c,0)$和$(c,0)$, 距离之和取为 $2a$(因子 2 可使代数式简化), 则当且仅当满足下式时, (x,y)在椭圆上

$$\sqrt{(x-(-c))^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

或 $$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

或 $$x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

或 $$4(cx-a^2)=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

或 $$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2),$$

或 $$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

上式通常简写成 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 $b=\sqrt{a^2-c^2}$(显然, 我们必须取 $a>c$, 因此, $a^2-c^2>0$). 椭圆的图形如图 26 所示. 当 $y=0$ 时, 椭圆与水平轴相交, 于是

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \qquad x=\pm a,$$

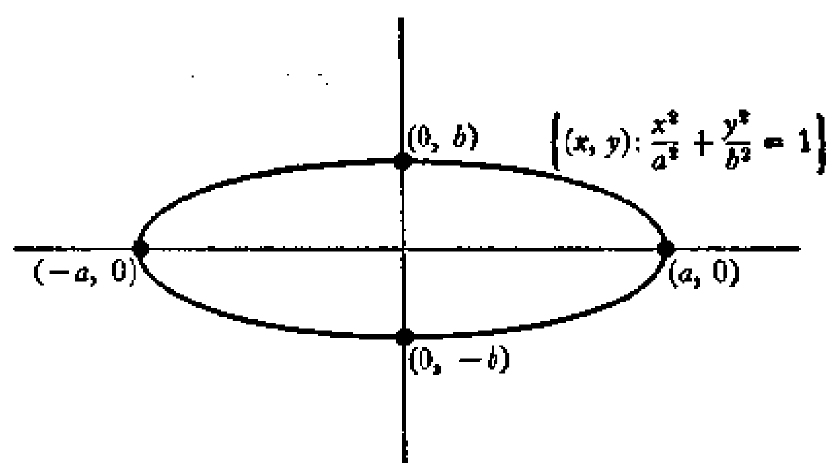


图 26

当 $x=0$ 时，椭圆与直立轴相交，于是

$$\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y=\pm b.$$

双曲线的定义是类似的，所不同的只是两个距离之差为常数。再次将两点取在 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$，常数差取为 $2a$，按 (x, y) 在双曲线上的条件，我们得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

上式可以简化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

但是，在本情形中，我们必须取 $c>a$，于是 $a^2-c^2<0$. 设 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，则当且仅当

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

时 (x, y) 在双曲线上。其图形如图 27 所示。它包含两支，因为由

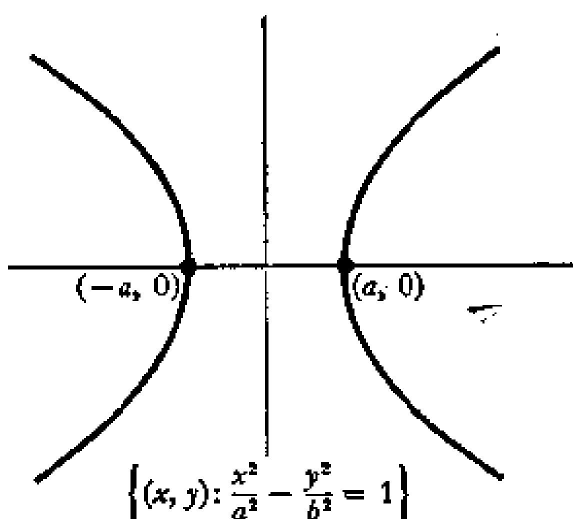


图 27

$(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$ 至 (x, y) 的距离之差可以按两种不同的次序来取。当 $y=0$ 时双曲线与水平轴相交，于是 $x=\pm a$，但它决不会与直立

轴相交.

将 $a=b=\sqrt{2}$ 的双曲线与函数 $f(x)=1/x$ 的图形相比较是有趣的(图 28). 这两个图形很相象, 实际上是完全相同的, 只不过转过 45° 而已(第 21 题).

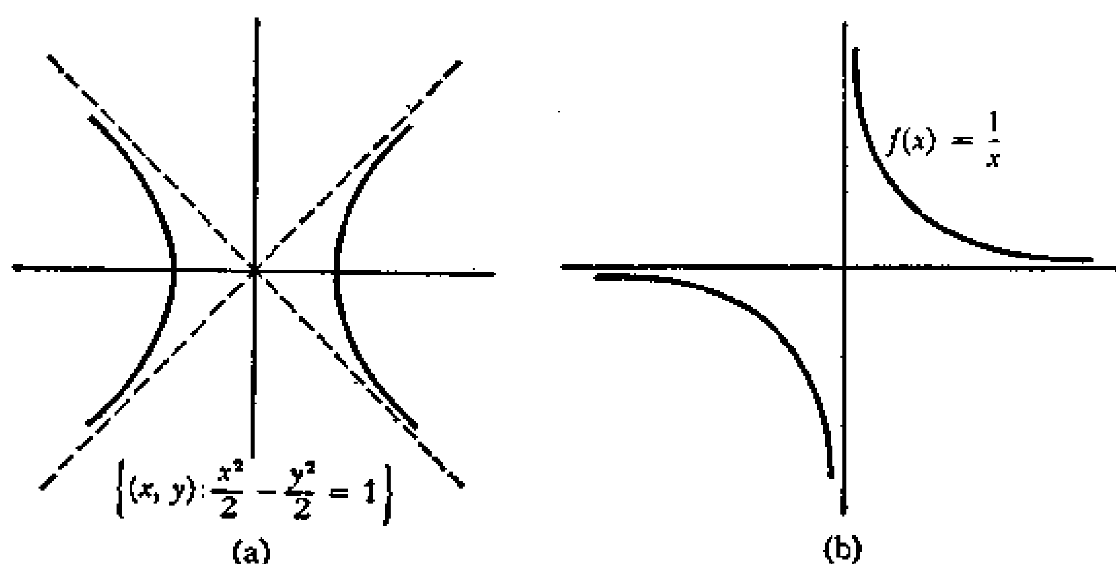


图 28

显然无法将圆或椭圆旋转后变成函数的图形. 然而, 对这些重要几何图形的研究, 往往可以化为对函数的研究. 例如, 椭圆是由下列两函数的图形构成的:

$$f(x)=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, \qquad -a\leqslant x\leqslant a$$

和

$$g(x)=-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, \quad -a\leqslant x\leqslant a.$$

当然, 还有许多其他的函数偶具有这种性质. 例如, 我们可以取

$$f(x)=\begin{cases} b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & 0<x\leqslant a \\ -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & -a\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$$

和

$$g(x)=\begin{cases} -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & 0<x\leqslant a \\ b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & -a\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$$

我们也可以取

$$f(x)=\begin{cases} b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ 为有理数}, \ -a\leqslant x\leqslant a \\ -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ 为无理数}, \ -a\leqslant x\leqslant a \end{cases}$$

和 $$g(x)=\begin{cases}-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x\text{ 为有理数}, \ -a\leqslant x\leqslant a\\ b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x\text{ 为无理数}, \ -a\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

但是这些函数偶都包含有跳跃的不合理的函数．证明或即使只是精确地叙述这个事实，目前是很难的．虽然你可能已经开始区别有合理图形的函数与有不合理图形的函数，但你可能发现很难提出一个合理函数的合理定义．这种概念的数学定义不容易下，本书的大部分着眼于给“合理”函数增加越来越多的条件．当我们定出几个条件之后，我们暂停下来问一问，是否已将可以称为合理的函数真正分离出来了．不幸，其答案往往是“未分离出来”，或至多是一个有条件的“分离出来了”．

习 题

1．在一直线上，绘出满足下列条件的所有 x 的集合．用区间记号表示下面每个集合(在有些情形中还要用符号 $\cup$)．

(i) $|x-3|<1$.

(ii) $|x-3|\leqslant 1$.

(iii) $|x-a|<\varepsilon$.

(iv) $|x^2-1|<\frac{1}{2}$.

(v) $\frac{1}{1+x^2}\geqslant\frac{1}{5}$.

(vi) $\frac{1}{1+x^2}\leqslant a$(区分不同的情形来做，用 a 表示出答案)．

(vii) $x^2+1\geqslant 2$.

(viii) $(x+1)(x-1)(x-2)>0$.

2．绘出满足下列条件的所有点 (x,y) 的集合．(在大多数的情形中，你所绘的图形并不刚好是一条直线或曲线，而是平面的一个适当的部分．)

(i) $x>y$.

(ii) $x+a>y+b$.

(iii) $y<x^2$.

(iv) $y\leqslant x^2$.

(v) $|x-y|<1$.

(vi) $|x+y|<1$.

(vii) $x+y$ 是整数.

(viii) $\frac{1}{x+y}$是整数.

(ix) $(x-1)^2+(y-2)^2<1$.

(x) $x^2<y<x^4$.

3. 绘出满足下列条件的所有点(x,y)的集合.

(i) $|x|+|y|=1$.

(ii) $|x|-|y|=1$.

(iii) $|x-1|=|y-1|$.

(iv) $|1-x|=|y-1|$.

(v) $x^2+y^2=0$.

(vi) $xy=0$.

(vii) $x^2-2x+y^2=4$.

(viii) $x^2=y^2$.

4. 绘出满足下列条件的所有点(x,y)的集合.

(i) $x=y^2$.

(ii) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.

(iii) $x=|y|$.

(iv) $x=\sin y$.

提示：你已经知道当 x 与 y 对调时的答案.

5. (a) 证明通过点(a,b)斜率为m的直线是函数 $f(x)=m(x-a)+b$的图形. 这个公式称为"点斜式"，它比等价的表达式 $f(x)=mx+(b-ma)$更方便. 由点斜式立即可以看出，斜率为 m，在 a 处的 f 值为 b.

(b) 设 $a\neq c$，证明通过(a,b)和(c,d)的直线是函数

$$f(x)=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b$$

的图形.

(c) 什么时候 $f(x)=mx+b$ 和 $g(x)=m'x+b'$ 的图形是平行的直线?

6. (a) 设 A、B 和 C 是三个数，且 A 和 B 不同时为零，证明所有满足

$$Ax+By+C=0$$

的点 (x, y) 的集合是一直线（可能是一直立线）．提示：首先确定直立线的情形．

(b) 反之，证明每一直线，包括直立线，可以表示为满足 $Ax+By+C=0$ 的所有点 (x, y) 的集合．

7. (a) 通过计算图 29 中三角形各边长的平方来证明：当 $mn=-1$ 时函数

$f(x)=mx+b$,

$g(x)=nx+c$

的图形互相垂直．(为什么两直线相交于原点的特殊情形，和一般情形是一样的？)

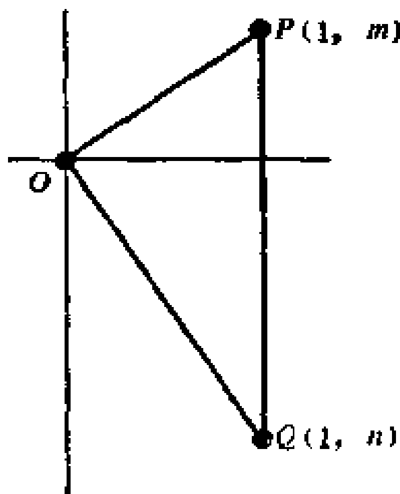


图 29

(b) 证明，当且仅当 $AA'+BB'=0$ 时，由满足下列条件

$Ax+By+C=0$,

$A'x+B'y+C'=0$

的所有的点 (x, y) 所构成的两条直线互相垂直．

8. (a) 应用习题一，18 证明

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

(b) 证明

$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\leqslant\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}.$$

解释此不等式的几何意义（称为"三角不等式"）．何时只出现严格不等式？

9. 大致绘出下列各函数的图形，绘出足够数量的点，以便得出总的形状．(部分问题是要合理估计多少点算是"足够"的；下面提出的问题是为了说明：稍加思考，比绘出几百个不同的点更值得．)

(i) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$．（当 x 趋近于 0 或很大时，将出现什么情况？此图形相对于恒等函数的图形处在什么位置？为什么开始只要考虑正的 x 即已足够？）

(ii) $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

(iii) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

(iv) $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$.

10. 指出 f 图形的一般特点，如果

(i) f 是偶的.

(ii) f 是奇的.

(iii) f 是非负的.

(iv) 对于所有的 x, $f(x)=f(x+a)$（具有这种性质的函数称为**周期的**，其**周期**为 a）.

11. 绘出函数 $f(x)=\sqrt[m]{x}$ 当 $m=1,2,3,4$ 时的图形（应用图 14，可以容易绘出这个图形．一定要记住，当 m 是偶数时，$\sqrt[m]{x}$ 表示 x 的正的 m 次根；尚需注意，当 m 是偶数和奇数时图形的重要区别．）

12. (a) 绘出 $f(x)=|x|$ 和 $f(x)=x^2$ 的图形.

(b) 绘出 $f(x)=|\sin x|$ 和 $f(x)=\sin^2 x$ 的图形．（这两图有明显不同之处，这一点我们还不能严格地说明．看你能否发现不同在何处；(a)是用来作引导的．）

13. 根据 f 的图形，绘出 g 的图形，设

(i) $g(x)=f(x)+c$.

(ii) $g(x)=f(x+c)$．（本题容易弄错．）

(iii) $g(x)=cf(x)$.

（区分 $c=0$、$c>0$、$c<0$ 三种情况．）

(iv) $g(x)=f(cx)$.

(v) $g(x)=f(1/x)$.

(vi) $g(x)=f(|x|)$.

(vii) $g(x)=|f(x)|$.

(viii) $g(x)=\max(f,0)$.

(ix) $g(x)=\min(f,0)$.

(x) $g(x)=\max(f,1)$.

14. 绘出 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图形．提示：用习题一，17 的方法.

15. 符号 $[x]$ 表示 $\leqslant x$ 的最大整数．这样，$[2.1]=[2]=2$ 和 $[-0.9]=$

$[-0.2]=-1$. 绘出下列函数的图(它们都很有趣,其中有些题往往会在其他问题中再次出现).

(i) $f(x)=[x]$.

(ii) $f(x)=x-[x]$.

(iii) $f(x)=\sqrt{x-[x]}$.

(iv) $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$.

(v) $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$.

(vi) $f(x)=\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

16. 绘出下列各函数的图形.

(i) $f(x)=\{x\}$, 其中$\{x\}$是由x至最近整数的距离.

(ii) $f(x)=\{2x\}$.

(iii) $f(x)=\{x\}+\frac{1}{2}\{2x\}$.

(iv) $f(x)=\{4x\}$

(v) $f(x)=\{x\}+\frac{1}{2}\{2x\}+\frac{1}{4}\{4x\}$.

许多函数可用一个数的十进小数表示来描述. 虽然在第二十二章之前,我们无法严格描述无穷小数,但你对无穷小数的直观概念,使你能够理解下列各题以及在第二十二章之前所出现的问题. 关于无穷小数,有一意义不明确之处,必须说明一下:所有以一串9结尾的小数都等于另一个以一串0结尾的小数(例如,$1.23999\cdots=1.24000\cdots$). 而我们常用以一串9结尾的小数.

*17. 尽你最大努力描绘下列函数的图形(绘完整的图形往往是办不到的).

(i) $f(x)=x$的十进小数表示中的头一个数.

(ii) $f(x)=x$的十进小数表示中的第二个数.

(iii) 若在x的十进小数表示中, 7的个数是有限的, $f(x)=$这些7的个数;否则$f(x)=0$.

(iv) 若在x的十进小数表示中, 7的个数是有限的, $f(x)=0$; 否则$f(x)=1$.

(v) $f(x)=$在x的十进小数表示中,将第一个7(如果有的话)后面所有的数字都用0代替后所得到的数.

(vi) 若在 x 的十进小数表示中不出现 1, 则 $f(x)=0$; 若在第 n 位第一次出现 1, 则 $f(x)=n$.

*18. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数} \\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q} \text{ 为既约分数的有理数.}\end{cases}$$

(若 p 和 q 是没有公因数的整数, 并且 $q>0$, 则数 p/q 称为**既约分数**). 尽你所能绘出 f 的图形(不要在纸上随便地绘出各点; 先考虑 $q=2$ 的有理数, 再考虑 $q=3$ 的, 等等).

19. (a) $f(x)=x^2$ 图形上的点是具有 (x, x^2) 形式的点. 证明这些点至点 $(0, \frac{1}{4})$ 的距离, 与至 $g(x)=-\frac{1}{4}$ 图形的距离相等. (见图 30)

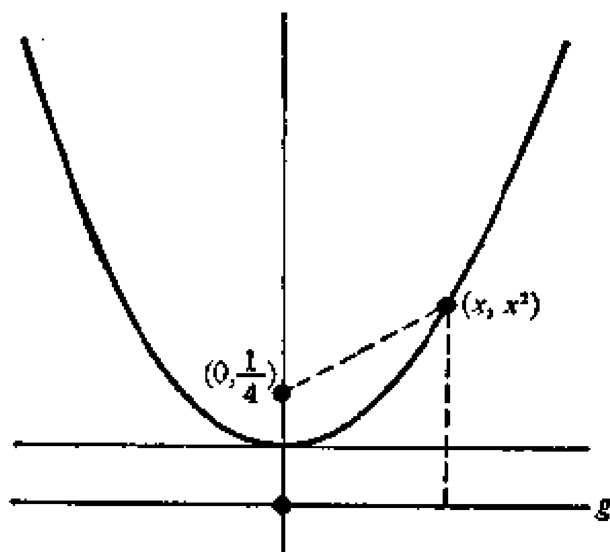


图 30

(b) 已知点 $P=(\alpha, \beta)$ 和一水平线 L 即 $g(x)=\gamma$ 的图形, 证明至 P 与 L 等距离的所有点 (x, y) 的集合, 是具有 $f(x)=ax^2+bx+c$ 形式的函数的图形.

*20. (a) 证明由 (c, d) 至 (x, mx) 距离的平方为

$$x^2(m^2+1)+x(-2md-2c)+d^2+c^2.$$

应用习题一, 17 求这些数的最小值, 并证明由 (c, d) 至 $f(x)=mx$ 图形的距离为

$$|cm-d|/\sqrt{m^2+1}.$$

(b) 求由(c, d)至$f(x)=mx+b$图形的距离.（将此情形化为(a).）

*21. (a) 应用第20题证明图31中所示的数x'和y'由

$$x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y,$$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y$$

给出.

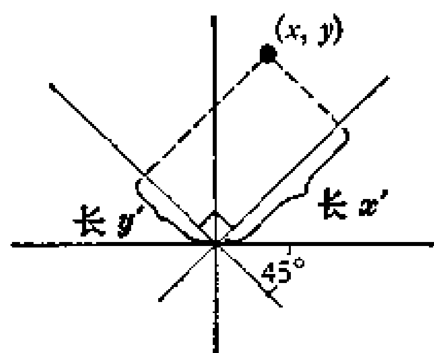


图 31

(b) 证明满足$(x'/\sqrt{2})^2-(y'/\sqrt{2})^2=1$的所有$(x,y)$的集合，与满足$xy=1$的所有$(x,y)$的集合是相同的.

选题解答

1. (i) $(2,4)$.

 (ii) $[2,4]$.

 (v) $[-2,2]$

 (vii) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$.

2. (i) 在$f(x)=x$图形下方所有的点.

 (iii) 在$f(x)=x^2$图形下方所有的点.

 (v) 在$f(x)=x+1$和$f(x)=x-1$两图形之间所有的点.

 (vii) 与水平轴相交于点$(n,0)$，其中n为整数，且与$f(x)=-x$图形平行的直线的集合.

 (ix) 以$(1,2)$为圆心，1为半径的圆内所有的点.

3. (i) 以$(1,0)$，$(0,1)$，$(-1,0)$和$(0,-1)$为顶点的正方形.

 (iii) $f(x)=x$图形和$f(x)=2-x$图形.

 (v) 点$(0,0)$.

 (vii) 因$x^2-2x+y^2=(x-1)^2+y^2-1$，故该图形为以$(1,0)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆.

5. (a) 只要注意到，$f(x)=m(x-a)+b=mx+(b-ma)$的图形，是一条通过点(a,b)并且具有斜率m的直线.（本题要点是为了记住点斜式.）

 (b) 通过(a,b)和(c,d)的直线的斜率为$(d-b)/(c-a)$，于是由(a)可得所需的方程.

(c) 当 $m=m'$ 和 $b\neq b'$ 时，两图形是平行的直线．因为此时显然没有一个 x 能满足 $f(x)=g(x)$．但若 $m\neq m'$，则恒有一个 x，即

$$x=(b'-b)/(m-m')$$

能满足 $f(x)=g(x)$.

6. (a) 设 $B=0$ 和 $A\neq 0$，则点的集合是由满足 $x=-C/A$ 所有的点 (x,y) 形成的直立线．若 $B\neq 0$，则点的集合是

$$f(x)=(-A/B)x+(-C/B)$$

的图形.

(b) 在 $x=a$ 直立线上的点 (x,y)，正好是满足 $1\cdot x+0\cdot y+(-a)=0$ 的点．在 $f(x)=mx+b$ 图形上的点 (x,y)，正好是满足 $(-m)x+1\cdot y+(-b)=0$ 的点.

10. (i) f 的图形与直立轴对称.

(ii) f 的图形与原点对称．亦即在直立轴左边的图形，是将右边的图形先对直立轴反射到左边，再对水平轴反射到下边后得到的.

(iii) f 的图形在水平轴上或水平轴的上方.

(iv) f 的图形是在 0 至 a 之间图形的多次重复.

19. (a) 由 (x,x^2) 至 $(0,\frac{1}{4})$ 的距离的平方为

$$\begin{aligned} x^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2 &= x^2+x^4-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16} \\ &= x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16} \\ &= \left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2, \end{aligned}$$

这等于由 (x,x^2) 至 g 图形的距离的平方.

(b) 当且仅当

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(y-\gamma)^2$$

或 $$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=y^2-2\gamma y+\gamma^2$$

或 $$y=\left(\frac{1}{2\beta-2\gamma}\right)x^2+\left(\frac{\alpha}{\gamma-\beta}\right)x+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\beta-2\gamma}\right)$$

时，点 (x,y) 满足已知条件.

（此解答仅适用于 $\beta\neq\gamma$，即 P 不在 L 上的情况．若 P 在 L 上，则其解为通过 P 的直立线.）

第五章　极　　限

在整个微积分中，极限的概念确实是最重要的并且也许是最难的一个概念．本章的目的是要给极限下定义，但我们将再次从临时定义开始；我们所要定义的不是"极限"一词，而是函数趋近一个极限的概念．

临时定义　如果只要x充分接近而不等于a，就能使$f(x)$要多接近就多接近l，则称此函数f在a附近趋近极限l①．

在图1所示的六个函数中，只有头三个在a附近趋近l．注意，尽管$g(a)$没有定义，而$h(a)$又是按"非正常的方式"定义的，但仍然可以说，g和h在a附近趋近l．这是因为，在我们的定义中，

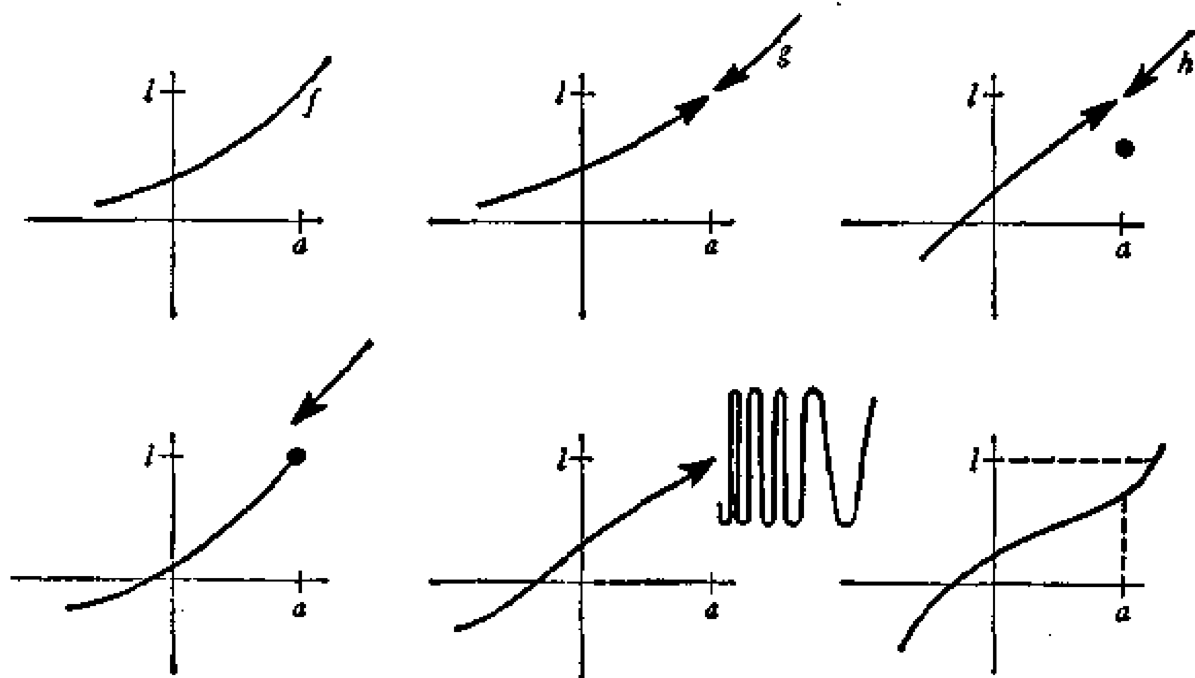
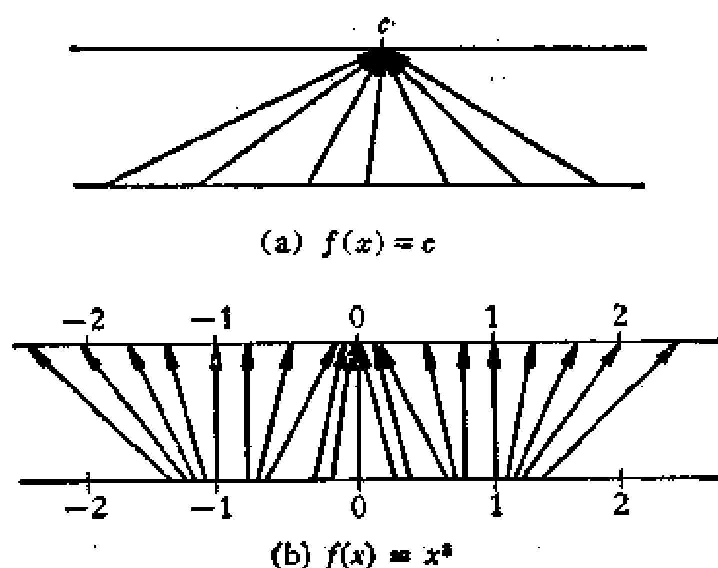


图　1

① 译注：此处原文为"the function f apprqaches the limit l near a"．有许多书是称"函数f在a处趋向于极限l"．

已明确地将函数在 a 处的函数值排除在外——只要当 x 接近 a（但不等于 a）时，$f(x)$ 能接近 l 即可. 对于 $f(a)$ 的值，或甚至 $f(a)$ 是否有定义，我们完全不感兴趣.

f 在 a 附近趋近 l 的断言，可用简单的图形来表示，这种图形是用第四章中未曾提到的一种绘函数的方法绘出的. 按照这种方法，我们绘出两条直线，每条都代表 $\mathbf{R}$，自其中一条直线上的一点 x 引一个箭号，指到另一条直线上的 $f(x)$. 图 2 所示为两个不同函数的这样的图形.



(a) $f(x)=c$

(b) $f(x)=x^2$

图 2

现在考虑一函数 f，其图形如图 3 所示. 假如我们要求 $f(x)$，比如说在图 3 所示的开区间 B 内接近 l，如果我们只考虑图 3 所示的区间 A 内的数 x，便能满足这个要求.（在该图中，我们选取了满足上述要求的最大区间；也可以选取任何包含 a 的小一些的

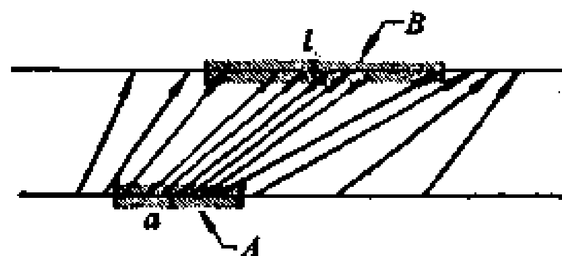


图 3

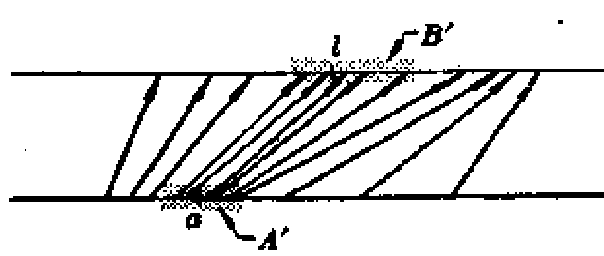


图 4

区间.）如果我们选定一个小一些的区间 B'（图 4），通常我们必须选取一个小一些的 A'，但无论我们将开区间 B 取得怎样小，总可以假定有某一开区间 A 能满足要求.

可用 f 的图形作类似的图解，但在这种情况下，区间 B 就必须绘在直立轴上，而集合 A 绘在水平轴上. x 在 A 内时 $f(x)$ 在 B 内一事，意味着在 A 上方的这段图形，包含在以通过 B 的两端点的两根水平线为边界的区域内；比较图 5(a) 和图 5(b)，可见前者所选的区间 A 是正确的，而后者的 A 太大.

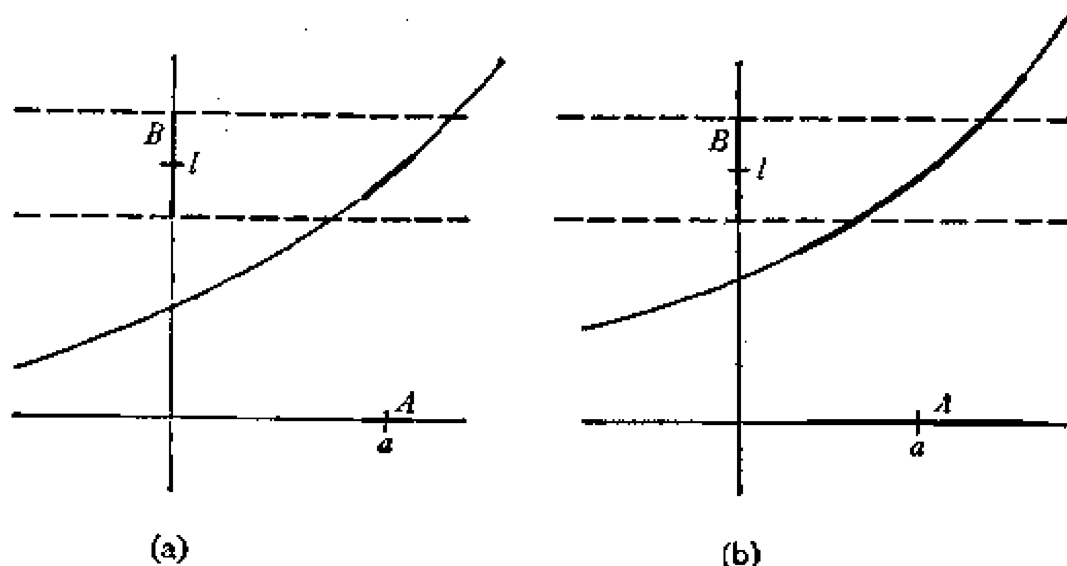


图 5

为了将我们的定义应用于特定的函数，我们考虑 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$（图 6）. 尽管这一函数在 0 附近不稳定，但显然可见，至少从直观上看，f 在 0 附近趋近 0，并且当然希望由我们的定义能得出同样的结论. 对于我们所考虑的情形，定义中的 a 和 l 都是 0，我们要问，如果我们使 x 充分接近 0 但 $\neq 0$，我们能否使 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 按我们所希望的接近程度接近 0？举一特例，假设我们希望 $x\sin\frac{1}{x}$ 至 0 的距离在 $\frac{1}{10}$ 之内. 亦即我们希望

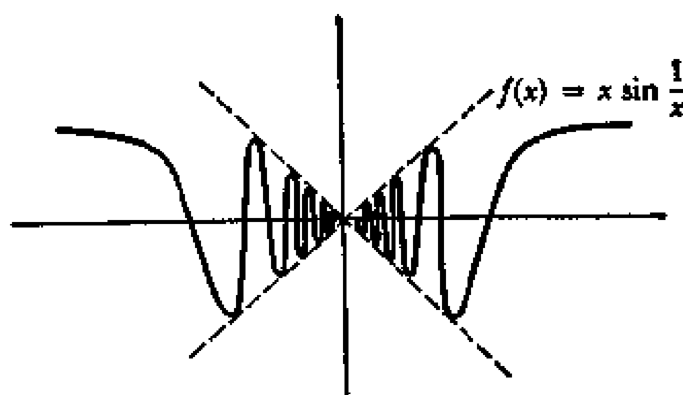


图 6

$$-\frac{1}{10}<x\sin\frac{1}{x}<\frac{1}{10},$$

或更简练地写成 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{10}$. 这是容易的，由于

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1, \text{ 对于所有的 } x\neq 0,$$

我们有 $$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|, \text{ 对于所有的 } x\neq 0.$$

上式表示，若 $|x|<\frac{1}{10}$ 且 $x\neq 0$，则 $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{10}$；换言之，若 x 至 0 的距离在 $\frac{1}{10}$ 之内但 $\neq 0$，则 $x\sin\frac{1}{x}$ 至 0 的距离在 $\frac{1}{10}$ 之内. 数 $\frac{1}{10}$ 是无关紧要的，同样容易保证 $|f(x)-0|<\frac{1}{100}$——只要使 $|x|<\frac{1}{100}$，但 $x\neq 0$ 即可. 事实上，假使我们取任意正数 ε，只要 $|x|<\varepsilon$ 且 $x\neq 0$，就能使 $|f(x)-0|<\varepsilon$.

看来函数 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$（图 7）在 0 附近趋近 0 更为明显. 例如，如果我们要求

$$\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{10},$$

当然只要使 $|x|<\frac{1}{10}$ 且 $x\neq 0$ 即可，因为这意味着 $|x^2|<\frac{1}{100}$，从而

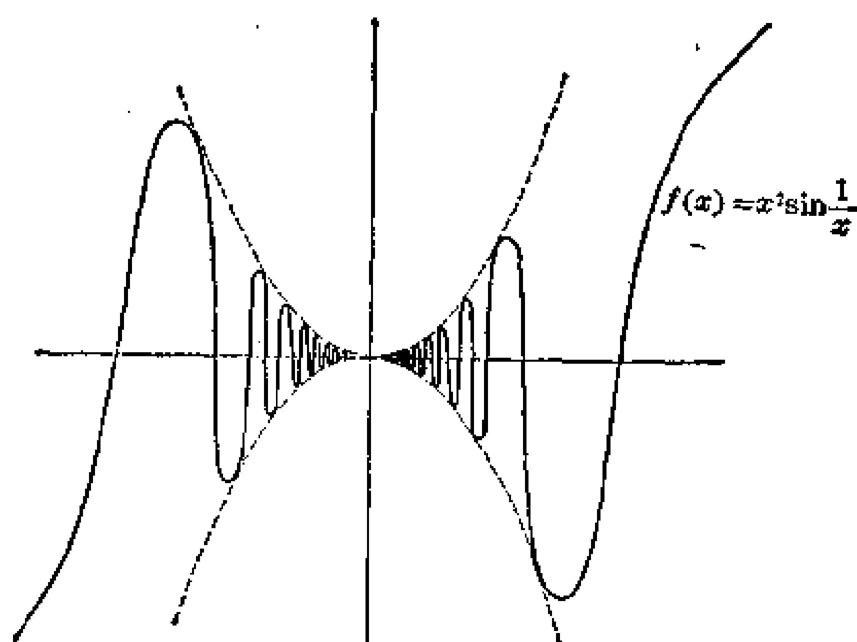


图 7

$$\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x^2|<\frac{1}{100}<\frac{1}{10},$$

(虽然我们可以将对 x 的限制放得更宽，允许 $|x|<1/\sqrt{10}$ 且 $x\neq 0$，但这样将限制尽可能地放宽没有什么特别的优点.)一般地说，设 $\varepsilon>0$，为了保证

$$\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

我们只要使

$$|x|<\varepsilon \text{ 和 } x\neq 0 \text{ (假设 } \varepsilon\leqslant 1)$$

即可. 如果我们给出一个大于 1 的 ε (这是可能的，虽然我们感兴趣的 ε 是"小"的)，则只要求 $|x|<\varepsilon$ 是不够的，但要求 $|x|<1$ 且 $x\neq 0$，当然就够了.

作为第三个例子，考虑函数 $f(x)=\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x}$ (图 8). 为了使 $\left|\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$，我们可以令

$$|x|<\varepsilon^2 \text{ 且 } x\neq 0 \text{ (若 } \varepsilon\leqslant 1),$$

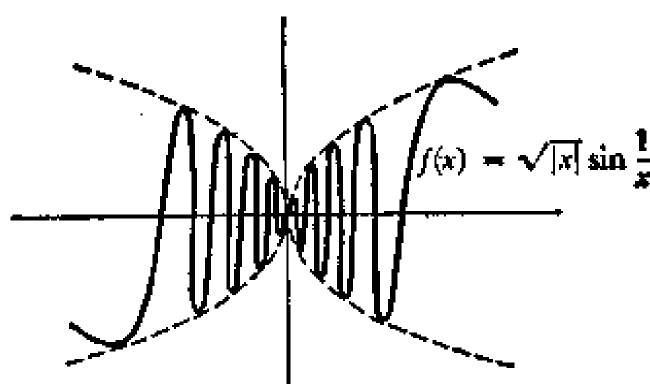


图 8

或$|x|<1$且$x\neq0$(若$\varepsilon>1$)(代数运算留给你们做).

最后，让我们考虑函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$(图 9). 对于这个函数，f在0附近趋近0不成立. 这就是说，不是对于所有的数$\varepsilon>0$，都能把x取得足够小且$\neq0$使得$|f(x)-0|<\varepsilon$, 为了证明这一点，我们只要找到一个$\varepsilon>0$, 对于这个ε, 无论我们将$|x|$取得怎样小，都无法保证条件$|f(x)-0|<\varepsilon$成立. 事实上，$\varepsilon=\frac{1}{2}$就可以了：无论我们将$|x|$取得怎样小，都不能保证$|f(x)|<\frac{1}{2}$；因若A为包含0的任意区间，则在该区间内总有一些数$x=1/(90+360n)$，对于

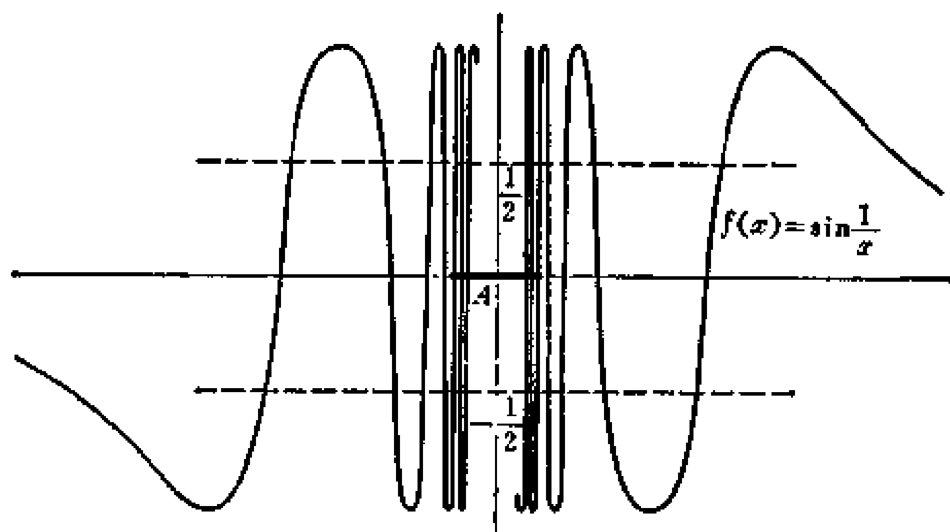


图 9

这些 x 我们有 $f(x)=1$.

同理可证 f(图 10)在 0 附近不趋近任何数. 为了证明这一点,我们必须对于任何特定的数 l,再找一个数 $\varepsilon>0$,使得不管 x 多么小,$|f(x)-l|<\varepsilon$ 不是总能成立的. 选择 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,可以对任何数 l 都适用;即不论我们将 $|x|$ 取得多么小,都不能保证 $|f(x)-l|<\frac{1}{2}$. 理由是,对于包含 0 的任何区间 A,在该区间内总有一些 $x_1=1/(90+360n)$ 使得

$$f(x_1)=1,$$

在该区间内还有一些 $x_2=1/(270+360m)$ 使得

$$f(x_2)=-1.$$

但从 $l-\frac{1}{2}$ 到 $l+\frac{1}{2}$ 的区间不能同时包含 -1 和 1,因其全长只有 1. 所以不论 l 为何数,我们都无法同时满足

$$|1-l|<\frac{1}{2} \text{ 和 } |-1-l|<\frac{1}{2}.$$

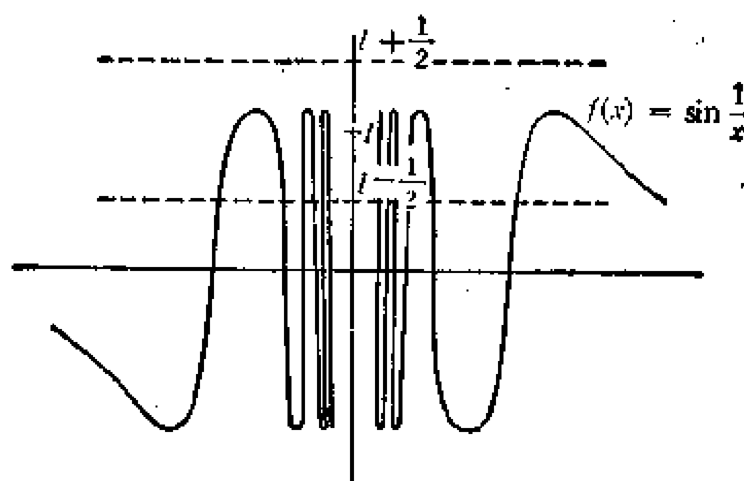


图 10

$f(x)=\sin 1/x$ 在 0 附近所呈现的现象会以多种方式出现. 如果我们考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数},\\ 1, & x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

则不论 a 等于何值，f 在 a 附近都不趋近任何数 l. 事实上，不论我们使 x 怎样接近 a，都无法使 $|f(x)-l|<\frac{1}{4}$，因在包含 a 的任何区间内，既有满足 $f(x)=0$ 的数 x，又有满足 $f(x)=1$ 的数 x. 这样，我们就需同时有 $|0-l|<\frac{1}{4}$ 和 $|1-l|<\frac{1}{4}$.

这种特性的一个有趣的变化是如图 11 所示的函数：

$$f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

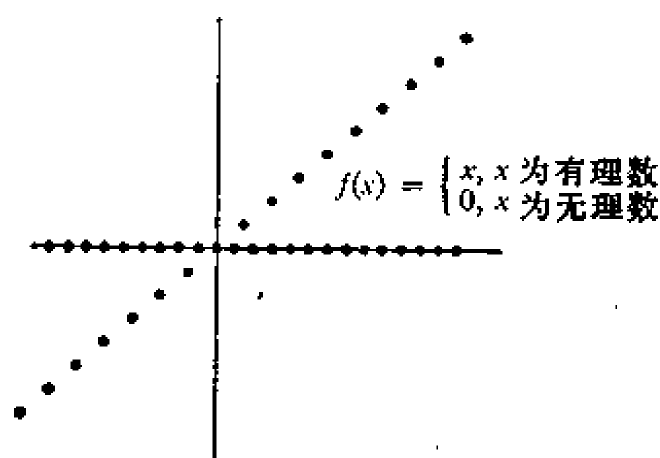


图 11

这个函数的特性与 $g(x)=\sin 1/x$ 的特性"相反"；虽然它在 0 附近趋近 0，但若 $a\neq 0$ 则在 a 附近不趋近任何数. 现在你应不难相信这是真的.

为了与迄今所考虑的很反常的函数相对照，我们现在考查一些最简单的函数.

设 $f(x)=c$，则对于每个数 a，f 在 a 附近趋近 c. 事实上，为了使 $|f(x)-c|<\varepsilon$，我们根本无需将 x 限制在 a 附近，已能自动满足这个条件(图 12).

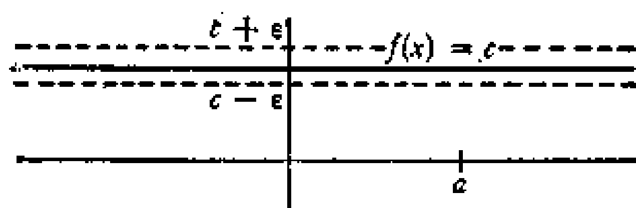


图 12

稍加变化，设 f 为如图 13 所示的函数：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

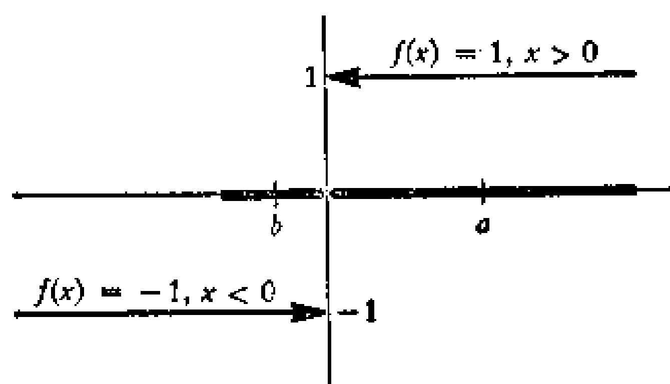


图 13

若 $a>0$，则 f 在 a 附近趋近 1：的确，为了使 $|f(x)-1|<\varepsilon$，当然只要令 $|x-a|<a$ 就够了，因为这意味着

$$-a<x-a$$

或

$$0<x,$$

因此 $f(x)=1$. 同样地，若 $b<0$，则 f 在 b 附近趋近 -1：为了使 $|f(x)-(-1)|<\varepsilon$，只要令 $|x-b|<-b$ 就够了. 最后，容易验证，f 在 0 附近不趋近任何数.

函数 $f(x)=x$ 容易处理. 显然，f 在 a 附近趋近 a：为了使 $|f(x)-a|<\varepsilon$，我们只要令 $|x-a|<\varepsilon$ 即可.

函数 $f(x)=x^2$ 稍为麻烦. 为了证明 f 在 a 附近趋近 a^2，我们必须解决怎样保证

$$|x^2-a^2|<\varepsilon.$$

因式分解似为最好的方法：我们希望

$$|x-a|\cdot|x+a|<\varepsilon.$$

显然，因子 $|x+a|$ 将引起麻烦．另一方面，无需要求 $|x+a|$ 特别小，我们只要知道 $|x+a|$ 值的某一范围，事情就好办了．例如，若 $|x+a|<1000000$，我们只要令 $|x-a|<\varepsilon/1000000$ 即可．因此，首先让我们令 $|x-a|<1$（也可用除 1 之外的任何正数）；这样也许能使 x 不致太大，从而 $|x+a|$ 也不致太大．其实，习题一，12 指出

$$|x|-|a|\leqslant|x-a|<1,$$

因此

$$|x|<1+|a|,$$

从而
$$|x+a|\leqslant|x|+|a|<2|a|+1.$$

现在我们只要附加一个条件 $|x-a|<\varepsilon/(2|a|+1)$．换言之，

$$\text{若 } |x-a|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right),\text{ 则 } |x^2-a^2|<\varepsilon.$$

当然，对于小的 ε，$\min(1,\varepsilon/(2|a|+1))$ 就等于 $\varepsilon/(2|a|+1)$．

用同样的技巧，我们可以看到，若 $f(x)=x^3$，则 f 在 a 附近趋近 a^3．事实上，若

$$|x-a|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2+|a|(1+|a|)+|a|^2}\right),$$

则
$$|x^3-a^3|<\varepsilon.$$

由这个断言的证明过程，可以看出这个奇怪分母的由来：若 $|x-a|<1$，则 $|x|<|a|+1$，从而

$$\begin{aligned}|x^2+ax+a^2|&\leqslant|x|^2+|a|\cdot|x|+|a|^2\\&<(1+|a|)^2+|a|(1+|a|)+|a|^2.\end{aligned}$$

因此

$$|x^3-a^3|=|x-a|\cdot|x^2+ax+a^2|$$

$$<\frac{\varepsilon}{(1+|a|)^2+|a|(1+|a|)+|a|^2}$$

$$\cdot[(1+|a|)^2+|a|(1+|a|)+|a|^2]=\varepsilon.$$

现在可以指出，我们对极限所作的许多论证，没有一个能算是真正的证明．这里的毛病不在于我们的推理，而在于我们的定义．如果我们关于函数的临时定义可以非议，那么我们关于趋近极限的临时定义更是可非议的．这个定义用于证明是不够明确的．很难弄清楚，我们怎样靠"要求"x充分接近a（"充分"接近应该是多近），而"使得"$f(x)$接近l（"接近"究竟是什么意思）．尽管我们的定义受到非议，但你会感到（我当然希望这样），我们的论证还是十分令人信服的．只要提到真正的论证，我们实际上不得不建立一个真正的定义．可以分几步来得出这个定义，逐步澄清含糊的措词．让我们再次从临时定义开始：

> 如果只要x充分接近而不等于a，就能使$f(x)$要多接近就多接近l，则称此函数f在a附近趋近极限l．

在该定义中，我们所作的极其初步的变更，就是指明使$f(x)$接近l，就是使$|f(x)-l|$很小．对于x接近a也与此相象．

> 如果只要$|x-a|$充分小且$x\neq a$，就能使$|f(x)-l|$要多小就多小，则称此函数f在a附近趋近极限l．

第二个更有决定意义的变更，是指明使$|f(x)-l|$"要多小就多小"，意味着对于任何$\varepsilon>0$，都要使$|f(x)-l|<\varepsilon$，于是得：

> 若对于任意的$\varepsilon>0$，只要$|x-a|$充分小且$x\neq a$，就能使$|f(x)-l|<\varepsilon$，则称此函数f在a附近趋近极限l．

以上我们给出的极限的所有论证，有一共同的格式．对于任意数$\varepsilon>0$，我们找到了另外某一正数，比如说δ，它具有性质：当$x\neq a$且$|x-a|<\delta$时，使得$|f(x)-l|<\varepsilon$．对于函数$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$（对

于 $a=0, l=0$)，这个数 δ 恰好等于数 ε；对于 $f(x)=\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x}$，若 $\varepsilon\leqslant 1$，则这个数为 ε^2，若 $\varepsilon>1$，则这个数为 1；对于 $f(x)=x^2$，这个数是 1 和 $\varepsilon/(2|a|+1)$ 中的较小一个．在一般情况下，不一定完全清楚如何由给定的 ε 来找 δ，但表示"充分小"有多小的却总是条件 $|x-a|<\delta$：

> 若对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在着某个 $\delta>0$，使得当 $|x-a|<\delta$ 而且 $x\neq a$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$，则称此函数 f 在 a 附近趋近极限 l．

实际上，这是我们将要采用的定义．我们只作一处无足轻重的变动，注意到"$|x-a|<\delta$ 和 $x\neq a$"可以改写成"$0<|x-a|<\delta$"．

定义

函数 f **在** a **附近趋近极限** l 表示：对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在着某个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$．

这个定义很重要(从现在起，我们研究每一个问题都要靠它)，如果不知道这个定义，就别想作进一步的研究．如有必要，象背一首诗那样把它背下来！这样做，至少比把它说错来得强；如果你把它说错了，必定会作出错误的证明．为了很好地熟悉一下正确的证法，不妨将前面关于函数趋近极限所作的论证，每一个再作一次真正的证明．这只要写出所要证明的极限的正确定义，无需多做什么——所有代数的演算，都已经做了．要证明 f 在 a 附近不趋近 l，当然要恰当地对这个定义取否定：

如果下列命题不成立，

> 对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在着某个 $\delta>0$，使得当 x 满足 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$，

则

必有某个 $\varepsilon>0$, 使得对于所有的 $\delta>0$, 总有某些 x 满足 $0<|x-a|<\delta$, 但无法满足 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

这样, 为了证明函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$在 0 附近不趋近 0, 我们考虑 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 并注意到, 对于所有的 $\delta>0$, 总有某些 x 满足 $0<|x-0|<\delta$, 但无法满足 $\left|\sin\frac{1}{x}-0\right|<\frac{1}{2}$——即具有 $1/(90+360n)$ 形式的 x, 其中 n 大得足以使 $1/(90+360n)<\delta$.

我们用图 14 所示的函数为例, 来说明函数趋近极限的定义的应用. 这个例子很典型, 也是最麻烦的一个:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数}, 0<x<1\\ 1/q, & x=p/q(\text{既约分数}), 0<x<1.\end{cases}$$

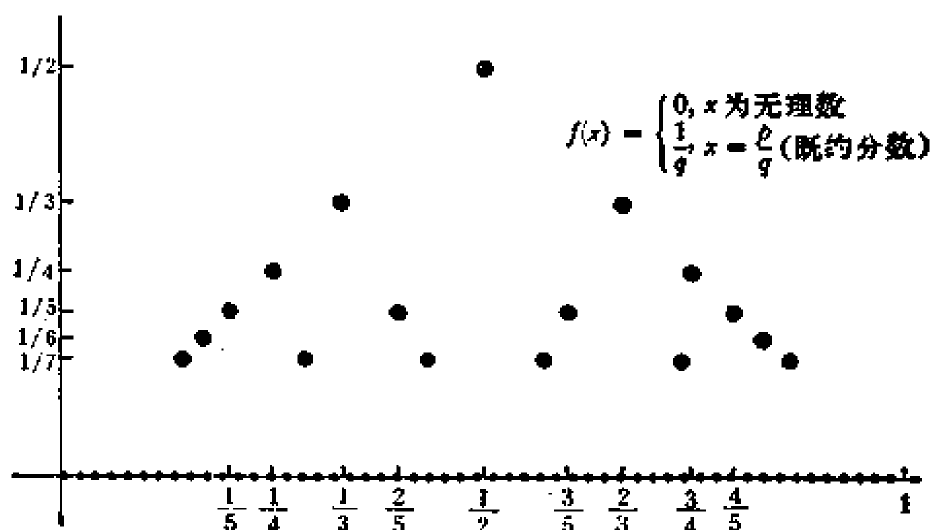


图 14

(回忆一下, 若 p 和 q 为没有公因数的两个整数, 且 $q>0$, 则 p/q 称为既约分数.)

对于满足 $0<a<1$ 的任何数 a, 函数 f 在 a 附近趋近 0. 为了证明这个结论, 考虑任意数 $\varepsilon>0$. 设 n 为一自然数, 大到足以使 $1/n\leqslant\varepsilon$. 注意, 只有下列的数 x, 可能不满足 $|f(x)-0|<\varepsilon$:

$$\frac{1}{2};\frac{1}{3},\frac{2}{3};\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5};\cdots;\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}.$$

(若 a 为有理数，则 a 可能是这些数中的一个.）这些数无论怎么多，都是有穷多．因此，所有这些数之中，必有一个最接近 a；即在这些数中，有一个 p/q 使 $|p/q-a|$ 为最小．（如果 a 恰好是这些数中的一个，就只考虑 $p/q\neq a$ 时 $|p/q-a|$ 的值.）δ 可以选作这一最短的距离．因为若 $0<|x-a|<\delta$，则 x 就不是

$$\frac{1}{2},\cdots,\frac{n-1}{n}$$

中的一个，因此 $|f(x)-0|<\varepsilon$ 能成立．证毕．注意，我们这样来描述 δ（它适合一个给定的 ε）是完全合适的——没有理由要求我们，必须给出一个以 ε 表示 δ 的公式．

现在准备用我们的定义来证明头一个定理；你可能一直设想有这个结果，这样设想是很合理的．这个定理实际上是用来检验我们的定义：如果证不出这个定理，我们的定义就是无用的．

定理 1 一函数在 a 附近，不可能趋近两个不同的极限．换句话说，若 f 在 a 附近趋近 l，并且 f 在 a 附近又趋近 m，则

$$l=m.$$

证 因为这是我们关于极限的头一个定理，所以当然需要将假设按定义翻译出来．

因为 f 在 a 附近趋近 l，我们知道，对于任何 $\varepsilon>0$，总存在着某个 $\delta_1>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta_1$$

时，有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

我们还知道，因为 f 在 a 附近趋近 m，所以，总存在着某个 $\delta_2>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta_2$$

时，有

$$|f(x)-m|<\varepsilon.$$

我们不得不用两个数 δ_1 和 δ_2，因为不能保证，满足一个定义要求的 δ，也满足另一定义的要求。但实际上，容易断定，对于任何 $\varepsilon>0$，总存在着某个 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，有

$$|f(x)-l|<\varepsilon \text{ 和 } |f(x)-m|<\varepsilon,$$

我们只要取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ 即可。

为了完成这一定理的证明，我们只须选一特殊的 $\varepsilon>0$，使得如果 $l\neq m$，则

$$|f(x)-l|<\varepsilon \text{ 和 } |f(x)-m|<\varepsilon$$

不能同时成立。恰当的选法，由图 15 所启发。若 $l\neq m$，则 $|l-m|>0$，我们可选 $|l-m|/2$ 作为我们的 ε。于是，总存在着一个 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，有

$$|f(x)-l|<\frac{|l-m|}{2} \text{ 和 } |f(x)-m|<\frac{|l-m|}{2}.$$

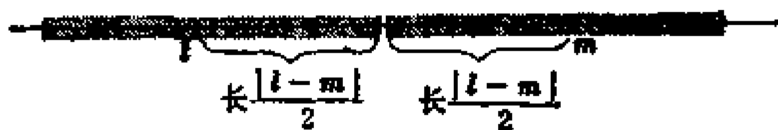


图 15

这意味着，对于 $0<|x-a|<\delta$，我们有

$$\begin{aligned}|l-m|=|l-f(x)+f(x)-m|&\leqslant|l-f(x)|+|f(x)-m|\\&<\frac{|l-m|}{2}+\frac{|l-m|}{2}\\&=|l-m|,\end{aligned}$$

这是矛盾.

f 在 a 附近所趋近的数 l，用 $\lim_{x\to a}f(x)$来表示（读作：当 x 趋近 a 时 $f(x)$ 的极限）. 这个定义之所以合理，只是由于定理 1 保证了$\lim_{x\to a}f(x)$绝不会代表两个不同的数. 等式

$$\lim_{x\to a}f(x)=l$$

与短语

$$f\text{ 在 } a \text{ 附近趋近 } l$$

的意义完全一样. 仍然存在这样的可能性，即 f 在 a 附近不趋近任何 l，从而对于任何数 l，$\lim_{x\to a}f(x)=l$ 都不成立. 对于这种情况，通常说"$\lim_{x\to a}f(x)$不存在".

注意，在我们的新记号中，引入了一个多余的、毫不相干的字母 x，它可以用 t、y 或前面还没用过的任何其他字母来代替——下列符号

$$\lim_{x\to a}f(x),\quad \lim_{t\to a}f(t),\quad \lim_{y\to a}f(y),$$

都明确地表示同一的数，这个数决定于 f 和 a，而与 x、t 或 y 无关（事实上，这些字母完全不表示极限的任何东西）. 有一个更合逻辑的记号，似乎为$\lim_{a}f$. 这种记号尽管较简单，但太刻板，因此，几乎没有人当真想用它. 尽管 $f(x)$ 可能用包含 x 的一个简单式子来表示，但一个函数往往没有简单的名称，因此，记号$\lim_{x\to a}f(x)$更为有用. 例如，简短的记号

$$\lim_{x\to a}(x^2+\sin x)$$

只能用麻烦的式子

$$\lim_{a}f,\ \text{其中 } f(x)=x^2+\sin x$$

来解释. 标准记号的另一个优点，可用下列两式来说明

$$\lim_{x\to a}(x+t^3),$$

$$\lim_{t\to a}(x+t^3).$$

第一式表示，当

$$f(x)=x+t^3 \quad (\text{对于所有的 } x)$$

时，f 在 a 附近所趋近的数；第二式表示，当

$$f(t)=x+t^3 \quad (\text{对于所有的 } t)$$

时，f 在 a 附近所趋近的数.

你不难（尤其，如果你查阅定理 2）证明

$$\lim_{x\to a}(x+t^3)=a+t^3,$$

$$\lim_{t\to a}(x+t^3)=x+a^3.$$

这些例子说明，我们记号的主要优点是能适应各种情况. 其实，记号$\lim\limits_{x\to a}f(x)$适应性这样强，以致有忘掉其真正意义的危险. 这里有一个应用这种记号的简单练习，它在以后是很重要的：先准确地解释它，然后证明

$$\lim_{x\to a}f(x) \text{ 和 } \lim_{h\to 0}f(a+h)$$

这两式相等.

本章的一个重要组成部分是，证明一个能用来容易求出很多极限的定理. 其证明是根据不等式和绝对值的某些性质. 这些性质在考虑极限的定义时已经碰到过. 虽然这些事实在习题一第 19, 20 和 21 题中曾经叙述过，但因它们很重要，故再次用引理的形式来描述（引理就是辅助定理，因在证明另一个定理时，它的作用很突出，所以需要它）. 该引理粗略地说就是，如果 x 接近 x_0，y 接近 y_0，则 $x+y$ 接近 x_0+y_0，xy 接近 x_0y_0 以及 $1/y$ 接近 $1/y_0$. 这种直观的陈述，比引理中精确的估计更容易记住. 为了了解如何应用这些估计，先看一下定理 2 的证明，不是没有道理的.

引理 (1) 设

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ 和 } |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

则 $$|(x+y)-(x_0+y_0)|<\varepsilon.$$

(2) 设

$$|x-x_0|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right) \text{ 和 } |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)},$$

则 $$|xy-x_0y_0|<\varepsilon.$$

(3) 设 $y_0\neq0$, 且

$$|y-y_0|<\min\left(\frac{|y_0|}{2},\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

则 $y\neq0$, 且 $$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\varepsilon.$$

证 (1) $|(x+y)-(x_0+y_0)|=|(x-x_0)+(y-y_0)|$

$$\leqslant|x-x_0|+|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) 因为 $|x-x_0|<1$, 我们有

$$|x|-|x_0|\leqslant|x-x_0|<1,$$

因此 $$|x|<1+|x_0|.$$

于是

$$\begin{aligned}|xy-x_0y_0|&=|x(y-y_0)+y_0(x-x_0)|\\&\leqslant|x|\cdot|y-y_0|+|y_0|\cdot|x-x_0|\\&<(1+|x_0|)\cdot\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}+|y_0|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$|y_0|-|y|\leqslant|y-y_0|<\frac{y_0}{2}$$

因此, $|y|>|y_0|/2$. 特别是, $y\neq0$, 并且

$$\frac{1}{|y|}<\frac{2}{|y_0|}.$$

于是 $\left|\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y_0}\right|=\dfrac{|y_0-y|}{|y|\cdot|y_0|}<\dfrac{2}{|y_0|}\cdot\dfrac{1}{|y_0|}\cdot\dfrac{\varepsilon|y_0|^2}{2}=\varepsilon.$

定理 2 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ 和 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=m$, 则

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l+m$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=l\cdot m$.

并且, 若 $m\neq 0$, 则

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{m}$.

证 这里的假设意味着对于任意 $\varepsilon>0$, 都存在着 $\delta_1,\delta_2>0$, 使得当

$$0<|x-a|<\delta_1$$

时, 有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

以及当

$$0<|x-a|<\delta_2$$

时, 有

$$|g(x)-m|<\varepsilon.$$

这表示(因为 $\varepsilon/2$ 毕竟也是一个正数), 总存在着 $\delta_1,\delta_2>0$, 使得当

$$0<|x-a|<\delta_1$$

时, 有

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2},$$

以及当

$$0<|x-a|<\delta_2$$

时, 有

$$|g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{2},$$

今取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. 若 $0<|x-a|<\delta$, 则 $0<|x-a|<\delta_1$ 和 $0<$

$|x-a|<\delta_2$ 都成立，因此

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ 和 } |g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

都成立．根据引理的第(1)部分，这意味着 $|(f+g)(x)-(l+m)|<\varepsilon$．这样证明了(1)．

在查阅引理的第(2)部分之后，我们可以用类似的方法来证明(2)．设 $\varepsilon>0$，总存在着 $\delta_1,\delta_2>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta_1$$

时，有

$$|f(x)-l|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right),$$

以及当

$$0<|x-a|<\delta_2$$

时，有

$$|g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}.$$

再取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$．若 $0<|x-a|<\delta$，则

$$|f(x)-l|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right)$$

$$\text{和 } |g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}.$$

于是，根据引理，便有 $|(f\cdot g)(x)-l\cdot m|<\varepsilon$，这样证明了(2)．

最后，设 $\varepsilon>0$，存在着一 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，有

$$|g(x)-m|<\min\left(\frac{|m|}{2},\frac{\varepsilon|m|^2}{2}\right).$$

根据引理的第(3)部分，这表示：首先 $g(x)\neq 0$，从而 $(1/g)(x)$ 有意义，其次

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\frac{1}{m}\right|<\varepsilon.$$

这样证明了(3).

应用定理 2，我们可以不必通过从给定一个 ε 求 δ 的吃力的过程，而容易证明诸如

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3+7x^5}{x^2+1}=\frac{a^3+7a^5}{a^2+1}$$

之类的事实．我们必须从

$$\lim_{x\to a}7=7,$$

$$\lim_{x\to a}1=1,$$

$$\lim_{x\to a}x=a$$

着手，而这些容易直接证明．若我们想要求这个 δ，定理 2 的证明就是求 δ 的方法．举一个比较简单的例子，假设我们要求一个 δ，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，有

$$|x^2+x-(a^2+a)|<\varepsilon.$$

查阅定理 2(1)的证明，我们知道，首先必须找出 δ_1 和 $\delta_2>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta_1$$

时，有

$$|x^2-a^2|<\frac{\varepsilon}{2},$$

以及当

$$0<|x-a|<\delta_2$$

时，有

$$|x-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为我们已经证明 $\lim_{x\to a}x^2=a^2$ 和 $\lim_{x\to a}x=a$，我们知道该怎么办：

$$\delta_1=\min\left(1,\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2(|a|+1)}\right),$$

$$\delta_2=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，我们可取

$$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)=\min\left(\min\left(1,\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2(|a|+1)}\right),\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

若 $a\neq 0$，可用同样方法求一 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，有

$$\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right|<\varepsilon.$$

定理 2(3)的证明表明，要想得出上面不等式，我们只要找一个 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时，有

$$|x^2-a^2|<\min\left(\frac{|a|^2}{2},\frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right)$$

即可．这样，我们可以取

$$\delta=\min\left(1,\frac{\min\left(\frac{|a|^2}{2},\frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right)}{2(|a|+1)}\right).$$

当然，这些表示 δ 的复杂的式子在导出后可以大为简化．

在定理 2 的证明中，有一个技术细节值得讨论一下．为了使 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 有定义，我们知道，既不需要 f 在 a 处有定义，也不需要 f 在所有 $x\neq a$ 的点都有定义．然而，必须存在着某个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$f(x)$ 都有定义；否则下述语句就毫无意义：

$$\text{“若 } 0<|x-a|<\delta\text{, 则 } |f(x)-l|<\varepsilon\text{”,}$$

因为这时对于某些 x 来说，符号 $f(x)$没有意义. 设 f 与 g 是两个函数，在使 f 与 g 有定义的地方，容易看出，$f+g$ 与 $f\cdot g$ 同样也有定义. 但是对于 $1/g$ 就不这么明显，因为，若 x 使 $g(x)=0$，则 $1/g$ 就没有定义. 然而，这个事实已在定理 2(3)的证明中得到证明.

有时虽然没有 $\delta>0$ 能使 x 满足 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)$有定义，我们也想谈论 f 在 a 趋近极限. 例如，我们要区别图 16 所示两函数的性质，虽然对于所有小于 a 的数，它们都没有定义. 对于图 16(a)的函数，我们写

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=l \text{ 或 } \lim_{x\downarrow a} f(x)=l.$$

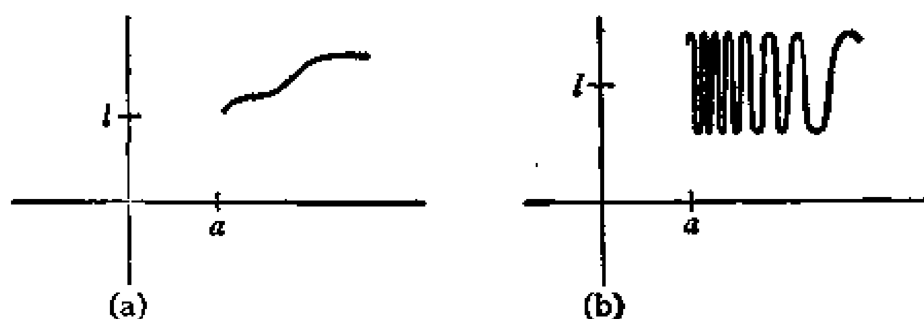


图 16

(等号左边的符号读作：当 x 从上方趋近 a 时 $f(x)$的极限). 这些“从上方趋近的极限”显然与普通极限密切相关，且其定义是非常相似的：$\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ 表示，对于任意 $\varepsilon>0$，总存在着一 $\delta>0$，使得当 $0<x-a<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. (条件“$0<x-a<\delta$”相当于“$0<|x-a|<\delta$ 而且 $x>a$”.)

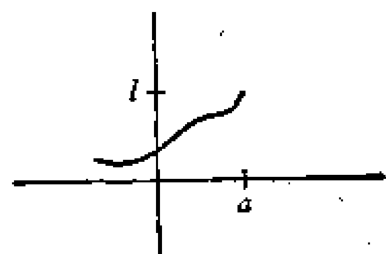


图 17

“从下方趋近的极限”(图 17)是类似定义的：$\lim_{x\to a^-} f(x)=l$ (或 $\lim_{x\uparrow a} f(x)=l$)表示，对于任意 $\varepsilon>0$，总存在着一 $\delta>0$，使得当 $0<a-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

即使对大于或小于 a 的数，f 都有定义，很可能还要考虑从上方和从下方趋近的极限．于是，对于图 13 所示的函数，我们有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \text{ 和 } \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1.$$

证明当且仅当 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$存在并且相等时，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，是一个容易的练习(第 27 题)．

就象已经简略地引入正文的从上方和从下方趋近极限的概念一样，还有一些有用的修改了的极限概念．在第四章里已经指出，如果 x 很大，则 $\sin\dfrac{1}{x}$接近于 0．这个论断通常写成

$$\lim_{x\to\infty} \sin 1/x=0.$$

符号 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$读作“当 x 趋于∞(或当 x 变得无穷大)时，$f(x)$的极限”，而具有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$形式的极限通常称为在无穷远的极限．图 18 表示 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ 的大体情况．

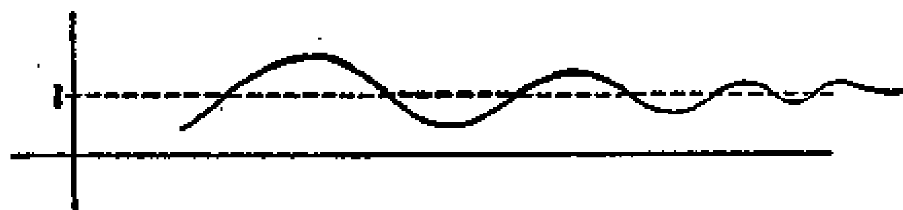


图 18

正式地说，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ 表示，对于任意 $\varepsilon>0$，总存在着一数 N，使得当

$$x>N$$

时，有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

显然，这定义与通常极限的定义有相似之处：条件“$0<|x-a|<\delta$”表示 x 接近 a 的事实，而条件“$x>N$”表示 x 很大的事实．

我们只花很少一点时间来讨论从上方趋近的极限、从下方趋

近的极限以及在无穷远的极限，因为在理解了通常极限的定义(这是最重要的)之后，就不难理解这些定义的基本原理．关于这些定义的许多练习，已列在习题中．习题中还包含几种偶而要用到的其他类型的极限．

习　题

1. 求下列各题的极限．(通过一些代数运算，这些极限全部可用定理 2 的各部分来求；相信你一定弄清了每题需用哪些部分，所以不用具体列出．)

   (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

   (ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

   (iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

   (iv) $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.

   (v) $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$.

   (vi) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$.

2. 在下列各题中，求 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

   (i) $f(x)=x^4$；$l=a^4$.

   (ii) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；$a=1, l=1$.

   (iii) $f(x)=x^4+\dfrac{1}{x}$；$a=1, l=2$.

   (iv) $f(x)=\dfrac{x}{1+\sin^2 x}$；$a=0, l=0$.

   (v) $f(x)=\sqrt{|x|}$；$a=0, l=0$.

   (vi) $f(x)=\sqrt{|x|}$；$a=1, l=1$.

3. 在习题四，15 的各函数中，当 a 为哪些值时极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在？

*4. (a) 在习题四，17 的各函数中，当 a 为哪些值时极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在？

(b) 上题中，若将用一串 0 来结尾的无穷小数来代替用一串 9 来结尾的无穷小数，则当 a 为哪些值时极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在？

5. 设函数 f 和 g 具有下列性质：对于所有 $\varepsilon>0$ 和所有 x，

$$若 0<|x-2|<\sin^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right)+\varepsilon, 则 |f(x)-2|<\varepsilon,$$

$$若 0<|x-2|<\varepsilon^2, 则 |g(x)-4|<\varepsilon.$$

对于每个 $\varepsilon>0$，求一 $\delta>0$，使得当

$$0<|x-2|<\delta$$

时，有

(i) $|f(x)+g(x)-6|<\varepsilon$.

(ii) $|f(x)g(x)-8|<\varepsilon$.

(iii) $\left|\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{4}\right|<\varepsilon$.

(iv) $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

6. 试举出一函数 f 说明下列的论断不成立：设当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|f(x)-l|<\varepsilon$，则当 $0<|x-a|<\delta/2$ 时必有 $|f(x)-l|<\varepsilon/2$.

7. (a) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 能否存在？

(b) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在并且 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 存在，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 是否必定存在？

(c) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在而 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 能否存在？

(d) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在并且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 是否必定存在？

8. 证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$.（本题主要是作为了解这两个极限意义的练习.）

9. (a) 试证当且仅当 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-l]=0$ 时 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.（先看为什么这个论断显然成立；然后写出严格的证明．在本章中，多数需要证明的问题，都可用同样的方法处理.）

(b) 证明 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x-a)$.

(c) 证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$.

(d) 试举一例说明，虽然 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$ 存在但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

10. 设有一$\delta>0$，使当$0<|x-a|<\delta$时$f(x)=g(x)$。证明$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$。换言之，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$只取决于$x$在$a$附近时$f(x)$的值——这个事实常说成极限是一种"局部性质"。（用δ'或其他字母来代替极限定义中的δ，显然是有帮助的。）

11. (a) 设对于所有x，$f(x)\leqslant g(x)$。证明$\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a}g(x)$，假设这些极限存在。

(b) 原假设能够怎样减弱？

(c) 设对于所有x，$f(x)<g(x)$，是否必定有$\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$？

12. 设$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$并且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$。证明$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在，并且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$。（绘一图！）

*13. (a) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=l$并且$b\neq 0$，证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(bx)}{x}=bl$。

提示：写$\dfrac{f(bx)}{x}=\dfrac{bf(bx)}{bx}$。

(b) 若$b=0$，将出现什么情况？

(c) 应用(a)，我们能够由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$求出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$。用别的方法求此极限。

14. (a) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$，证明$\lim\limits_{x\to a}|f|(x)=|l|$。

(b) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$和$\lim\limits_{x\to a}g(x)=m$，证明$\lim\limits_{x\to a}\max(f,g)(x)=\max(l,m)$，并且对于min亦然。

15. (a) 证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$不存在，即证明对于任何数$l$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=l$不成立。

(b) 证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$不存在。

16. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$，证明总存在着一数$\delta>0$和一数$M$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，便有$|f(x)|<M$。（这在图上表示什么？）提示：为什么只要证明，当$0<|x-a|<\delta$时$l-1<f(x)<l+1$即已足够？

17. 设x为无理数时$f(x)=0$，x为有理数时$f(x)=1$，证明不论a为何值，$\lim\limits_{x\to a}f(x)$都不存在。

*18. 设当 x 为有理数时 $f(x)=x$, 当 x 为无理数时 $f(x)=-x$. 证明若 $a\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在.

19. (a) 设 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(b) 将此事实推广: 设对于所有 x, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ 和 $|h(x)|\leqslant M$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)h(x)=0$. (如果你先做了(b), 当然就无需做(a); 事实上(b)的叙述, 可以使它比(a)更容易——这就是推广的意义之一.)

20. 设函数 f 具有下列性质: 若 g 为任一函数, 当 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在时, $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ 也不存在. 证明当且仅当 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在时, 才发生上述情况. 提示: 这实际上是非常容易的: 如果你考虑恰当的 g, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在的假设便立即导致矛盾.

**21. 本题与第 20 题相似, 只是将 $f+g$ 用 $f\cdot g$ 代替. 本题情况更复杂; 需分几步来分析(这些在研究有特殊要求的问题中用的步骤, 能得到一种独立的解法).

(a) 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在并且 $\neq 0$. 证明, 若 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)$ 也不存在.

(b) 设 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\infty$, (这种极限的精确定义见第 33 题.) 证明同一结果.

(c) 证明, 如果上述两个条件都不成立, 则有一函数 g, 使 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 不存在, 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)$ 却存在. 提示: 分别考虑下列两种情形: (1) 对于某一 $\varepsilon>0$, 我们有 $|f(x)|>\varepsilon$ 对所有充分小的 x 成立. (2) 对于任意 $\varepsilon>0$, 有任意小的 x 满足 $|f(x)|<\varepsilon$. 在第二种情形中, 由选取满足 $|x_n|<\dfrac{1}{n}$ 和 $|f(x_n)|<\dfrac{1}{n}$ 的点 x_n 开始.

*22. 设对于每一自然数 n, A_n 是 $[0,1]$ 内的某些数的有限集, 而当 $m\neq n$ 时 A_n 和 A_m 没有公共的元. 定义 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x \text{ 在 } A_n \text{ 内}\\ 0, & \text{对于任何 } n, x \text{ 不在 } A_n \text{ 内.}\end{cases}$$

证明对于 $[0,1]$ 内的所有 a, 有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

23. 试说明为什么下列关于 $\lim_{x\to a} f(x)=l$ 的定义都是正确的:

对于任意 $\delta>0$, 存在着一个 $\varepsilon>0$, 使得对于所有的 x,

(i) 只要 $0<|x-a|<\varepsilon$, 就有 $|f(x)-l|<\delta$.

(ii) 只要 $0<|x-a|<\varepsilon$, 就有 $|f(x)-l|\leqslant\delta$.

(iii) 只要 $0<|x-a|<\varepsilon$, 就有 $|f(x)-l|<5\delta$.

(iv) 只要 $0<|x-a|<\frac{\varepsilon}{10}$, 就有 $|f(x)-l|<\delta$.

*24. 举例说明下列关于 $\lim_{x\to a} f(x)=l$ 的定义不是正确的.

(a) 对于所有 $\delta>0$, 存在着一 $\varepsilon>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

(b) 对于所有 $\varepsilon>0$, 存在着一 $\delta>0$, 使得当 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 时, 便有 $0<|x-a|<\delta$.

25. 在习题四, 15 的每一函数中, 指出对于哪些数 a, 单侧极限 $\lim_{x\to a+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 存在.

*26. (a) 对习题四, 17 的每一函数, 回答与上题相同的问题.

(b) 若将以一串 0 来结尾的小数来代替以一串 9 来结尾的小数, 将发生什么情况?

27. 设 $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$, 证明 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在.

28. 证明

(i) $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(-x)$.

(ii) $\lim_{x\to 0} f(|x|)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(iii) $\lim_{x\to 0} f(x^2)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(这些等式以及其他类似的等式, 有几种解释. 它们可以只意味着, 如果两极限都存在, 则两极限相等; 或若某一极限存在, 则另一极限也存在, 并且等于前者; 或两极限之一存在, 则另一极限存在, 并且等于前者. 你可根据需要, 决定用哪一种解释较合适.)

*29. 设 $\lim_{x\to a-} f(x)<\lim_{x\to a+} f(x)$ (绘图说明此论断). 证明有某一 $\delta>0$, 使得当 $x<a<y$ 并且 $|x-a|<\delta$ 和 $|y-a|<\delta$ 时, 必有 $f(x)<f(y)$. 其逆真否?

*30. 证明当且仅当 $m\geqslant n$ 时,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}$$

存在．当 $m=n$ 时，该极限等于多少？当 $m>n$ 时呢？提示：一个容易求的极限是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0$；进行代数演算，使它成为正好是你所需要的样子．

31．证明 $\lim\limits_{x\to0^+}f(1/x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$．

32．定义"$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$"．

(a) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_0}$．

(b) 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(-x)$．

(c) 证明 $\lim\limits_{x\to0^-}f(1/x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$．

33．我们将 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 定义为：对于所有N，总存在着一$\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>N$．(绘出相应的图！)

(a) 证明
$$\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty.$$

(b) 设对于所有 x，$f(x)>\varepsilon>0$ 并且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，

证明
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

34．(a) 写出 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 的定义．(或者至少能使你自己相信，如果有精力就能写出这些定义．诸如此类的定义，你能写出多少个？)

(b) 证明 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$．

(c) 证明当且仅当 $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty$．

选题解答

1．(ii) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$．

(iv) $$\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y}=\lim_{x\to y}(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$
$$=y^{n-1}+y^{n-1}+\cdots+y^{n-1}=ny^{n-1}.$$

(vi) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

2. (i) 为求 δ, 可由下列方程开始

$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3).$$

设 $|x-a|<1$, 则 $|x|<1+|a|$, 于是

$$\begin{aligned}&|x^3+ax^2+a^2x+a^3|\\&\quad\leqslant|x|^3+|a|\cdot|x|^2+|a|^2\cdot|x|+|a|^3\\&\quad<(1+|a|)^3+|a|(1+|a|)^2+|a|^2(1+|a|)+|a|^3;\end{aligned}$$

因此可取

$$\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{(1+|a|)^3+|a|(1+|a|)^2+|a|^2(1+|a|)+|a|^3}\right)$$

用引理的第(2)部分来求是有益的，并且也许更容易. 该引理指出，当

$$|x^2-a^2|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|a|^2+1)}\right)$$

时，

$$|x^4-a^4|<\varepsilon.$$

而要使第一式成立，只需

$$|x-a|<\min\left(1,\frac{\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{2(|a|^2+1)}\right)}{2(|a|+1)}\right)$$

$$=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{4(|a|^2+1)(|a|+1)}\right)=\delta.$$

(ii) 根据引理的第(3)部分，当

$$|x-1|<\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)=\delta$$

时，便有

$$\left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon.$$

(iii) 根据引理的第(1)部分，我们知道，当

$$\left|\frac{1}{x}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ 和 } |x^4-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

时,

$$\left|\left(x^4+\frac{1}{x}\right)-2\right|<\varepsilon.$$

根据本题的(i)与(ii),若要使头两式成立,只需

$$|x-1|<\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{4},1,\frac{\varepsilon}{8\cdot 2\cdot 2}\right)$$

$$=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{32}\right)=\delta.$$

(v) 因 $0<|x|<\varepsilon^2$ 意味着 $\sqrt{|x|}<\varepsilon$. 故可令 $\delta=\varepsilon^2$.

5. (i) 由于要使 $|f(x)-2|<\varepsilon/2$ 和 $|g(x)-4|<\varepsilon/2$, 故需使

$$0<|x-2|<\min\left(\sin^2\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right)+\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon^2}{4}\right)=\delta.$$

(iii) 我们需要

$$|g(x)-4|<\min\left(\frac{|4|}{2},\frac{\varepsilon|4|^2}{2}\right),$$

因而需要

$$0<|x-2|<[\min(2,8\varepsilon)]^2=\delta.$$

8. 设 $l=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 并定义 $g(h)=f(a+h)$. 则对于任意 $\varepsilon>0$, 总存在着一 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 现在设 $0<|h|<\delta$, 则 $0<|(h+a)-a|<\delta$, 于是 $|f(a+h)-l|<\varepsilon$. 该不等式可以写成 $|g(h)-l|<\varepsilon$. 于是, $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=l$. 该式也可以写成 $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=l$. 同理可证, 若 $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=m$, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=m$. 因此, 如果一极限存在, 则另一极限必然存在, 并且在本情形中, 这两个极限相等.

9. (a) 从直观上看, 当且仅当 $f(x)-l$ 与 0 要多接近就多接近时, 才能使 $f(x)$ 与 l 要多接近就多接近. 正式的证明很容易, 只要稍花点功夫, 便能作出完全象样的证明. 为了十分确切起见, 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$, 并令 $g(x)=f(x)-l$. 则对于所有 $\varepsilon>0$, 总存在着一 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 这最后一个不等式可以写成 $|g(x)-0|<\varepsilon$, 于是 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. 反过来的证明, 是同样无兴味的.

(b) 从直观上看, 使 x 接近 a, 等于使 $x+a$ 中的 x 接近 0. 正式证明: 设

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$，并令 $g(x)=f(x+a)$。则对于所有 $\varepsilon>0$，总存在着一 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 现在设 $0<|y|<\delta$，则 $0<|(y+a)-a|<\delta$，于是 $|f(y+a)-l|<\varepsilon$，但这最后一个不等式可以写成 $|g(y)-l|<\varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{y\to 0}g(y)=l$. 反过来的证明是类似的.

(c) 从直观上看，当且仅当 x^3 接近 0 时，x 接近 0.

正式证明：设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=l$. 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在着一 $\delta>0$，使得当 $0<|x|<\delta$ 时，便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 今设 $0<|x|<\min(1,\delta)$，便有 $0<|x^3|<\delta$，从而 $|f(x^3)-l|<\varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=l$. 另一方面，如果我们假设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在，比方说 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=m$，则对于任意 $\varepsilon>0$，总存在着一 δ，使得当 $0<|x|<\delta$ 时，便有 $|f(x^3)-m|<\varepsilon$. 今设 $0<|x|<\delta^3$，则有 $0<|\sqrt[3]{x}|<\delta$，从而 $|f([\sqrt[3]{x}]^3)-m|<\varepsilon$，或 $|f(x)-m|<\varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=m$.

(d) 设当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=1$，$x<0$ 时 $f(x)=-1$. 这样，虽然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=1$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 却不存在.

15. (a) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 0 处不可能趋于一极限，因为在 0 的附近，该函数可以变得任意大. 事实上，对于不管什么样的 $\delta>0$，总有某个 x，即 $x=\min\left(\dfrac{1}{2}\delta,\dfrac{1}{|l|+\varepsilon}\right)$，虽然满足 $0<|x|<\delta$ 但 $\dfrac{1}{x}>|l|+\varepsilon$. 这样的 x 不满足 $|\dfrac{1}{x}-l|<\varepsilon$.

(b) 不论 $\delta>0$ 是什么数，总有某个 x，即 $x=\min\left(1+\dfrac{1}{2}\delta,1+\dfrac{1}{2|l|+\varepsilon}\right)$，虽然满足 $0<|x-1|<\delta$ 但 $\dfrac{1}{x-1}>|l|+\varepsilon$. 这样的 x 不满足 $\left|\dfrac{1}{x-1}-l\right|<\varepsilon$.（也可以应用第 9 题(b)来证：即先假设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ 存在，根据第 9 题(b)便有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$. 但根据第 15 题(a)，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 不存在.）

23. (i) 这就是通常的定义，只是将 δ 和 ε 各用 ε 和 δ 来代替而已.

(ii) 将 (i) 作一些修改，即得此定义：设原条件对于所有 $\delta>0$ 都成立，则可把它应用于 $\delta/2$，于是有一 $\varepsilon>0$，使得当 $0<|x-a|<\varepsilon$ 时便有 $|f(x)-l|\leqslant\delta/2<\delta$.

(iii) 这是一种类似的修改：把它应用于 $\frac{\delta}{5}$ 即得 (i).

(iv) 这也是一种修改：同 (i) 说的是一回事，因为 $\frac{\varepsilon}{10}>0$，而且所讨论的只是某一个 $\varepsilon>0$ 的存在问题.

27. 设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$，则对于所有 $\varepsilon>0$，总存在着 $\delta_1, \delta_2>0$，使得当

$$a<x<a+\delta_1$$

时，便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

以及当

$$a-\delta_2<x<a$$

时，便有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

令 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$. 若 $0<|x-a|<\delta$，则或者 $a-\delta_2\leqslant a-\delta<x<a$，或者 $a<x<a+\delta\leqslant a+\delta_1$，于是 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

28. (i) 设 $l=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，则对于所有 $\varepsilon>0$，存在着一个 $\delta>0$，使得当 $0<x<\delta$ 时便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 若 $-\delta<x<0$，则 $0<-x<\delta$，于是 $|f(-x)-l|<\varepsilon$. 于是，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(-x)=l$. 同样地，若 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(-x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 存在，并且有相同的值. (直观上看，当且仅当 $-x$ 趋近 0 并且是负的时，x 趋近 0 并且是正的.)

(ii) 设 $l=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在着一个 $\delta>0$，使得当 $0<x<\delta$ 时，便有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 故若 $0<|x|<\delta$，则 $|f(|x|)-l|<\varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(|x|)=l$. 反过来的证明是类似的. (从直观上看，若 x 趋近 0，则 $|x|$ 趋近 0 并且是正的.)

(iii) 设 $l=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，则对于所有 $\varepsilon>0$，总存在着一个 $\delta>0$，使得当 $0<x<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 若 $0<|x|<\sqrt{\delta}$，则 $0<x^2<\delta$，就有

$|f(x^2)-l|<\varepsilon$. 于是 $\lim_{x\to 0}f(x^2)=l$. 反过来的证明是类似的. (从直观上看，若 x 趋近 0，则 x^2 趋近 0 并且是正的.)

31、设 $l=\lim_{x\to\infty}f(x)$，则对于所有 $\varepsilon>0$，总存在着某个 N，使得当 $x>N$ 时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$，并且显然可以假设 $N>0$. 今设 $0<x<1/N$，则 $1/x>N$，于是 $|f(1/x)-l|<\varepsilon$. 因而 $\lim_{x\to 0+}f(1/x)=l$. 反过来的证明是类似的.

第六章　连续函数

设 f 为一任意函数，则

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

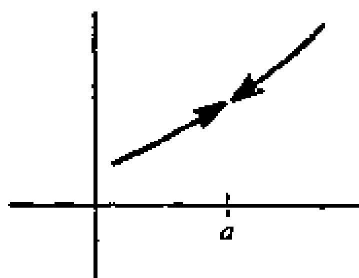


图　1

未必成立．其实，有很多方法能使上式不成立．例如，f 在 a 处甚至没有定义，这时上式没有意义（图 1）．其次，$\lim_{x\to a} f(x)$ 可以不存在（图 2）．最后，如图 3 所示，即使 f 在 a 处有定义，并且 $\lim_{x\to a} f(x)$ 也存在，但该极限

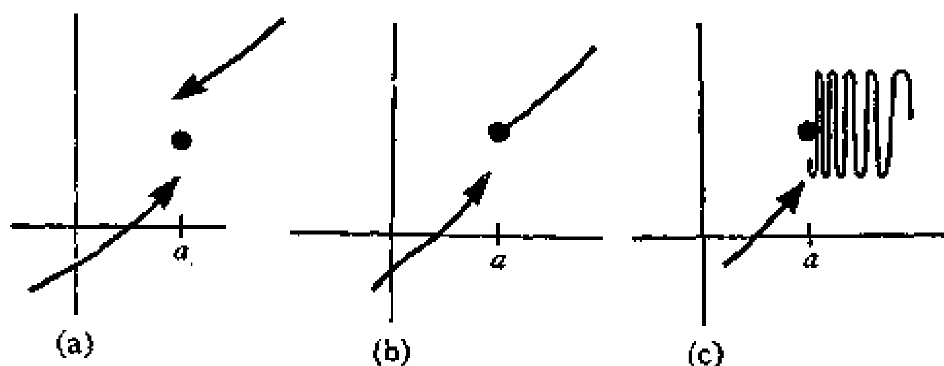


图　2

不等于 $f(a)$．

我们将这种类型的各种现象看成为非正态的，而对于不出现这些奇怪现象的函数姑且给它起一个名称．已经采用的名称是"连续"．从直观上看，若图形没有间断、跳跃或急速振动，则

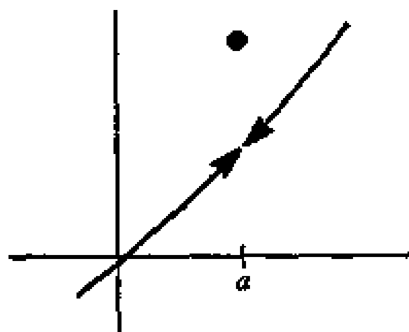


图　3

称此函数 f 是连续的. 虽然这种描述使我们能够从其图形(作图技巧很值得研究)看出该函数是否连续, 但这样做容易弄错, 因而精确的定义是很重要的.

定义

若

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

则称该函数 f 在 a 处连续.

我们不难找到许多函数在某数 a 处连续或不连续的例子——包含极限的每一例, 都提供了一个关于连续的例子, 第五章当然提供了够多的这类例子.

函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 0 处不连续, 因为它在 0 处甚至没有定义. 同样地, 函数 $g(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 0 处也不连续. 另一方面, 如果我们将上列函数中的第二个函数加以扩充, 即我们定义一个新的函数 G

$$G(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0, \end{cases}$$

那么, 可以这样选择 $a=G(0)$, 使 G 在 0 处连续——为此, 我们可以(其实, 我们必须)定义 $G(0)=0$(图 4). 这种扩充函数的办法,

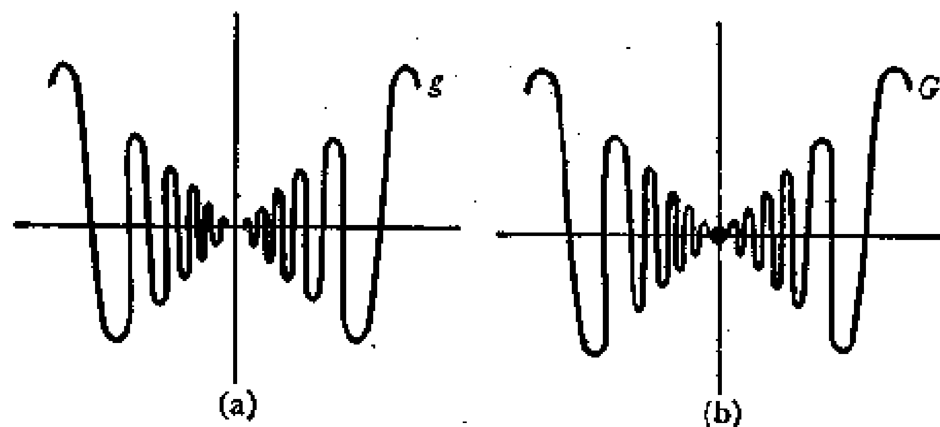


图 4

对 f 行不通；如果我们定义

$$F(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0,\end{cases}$$

则不论 a 等于什么，F 在 0 处都不连续，因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 a(设 $a\neq 0$)处不连续，因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在. 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，所以 f 只在一点 0 连续.

函数 $f(x)=c$，$g(x)=x$ 和 $h(x)=x^2$ 在所有数 a 处都连续. 因为

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}c=c=f(a),$$

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}x=a=g(a),$$

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}x^2=a^2=h(a).$$

最后，考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数}\\ 1/q, & x=p/q,\text{其中 } p/q \text{ 为既约分数.}\end{cases}$$

在第五章里，我们曾经指出，对于所有 a，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. 因为只有当 a 是无理数时，$0=f(a)$，故若 a 为无理数，则该函数在 a 处连续，若 a 为有理数，则不连续.

如果我们证明两个简单的定理，就更容易给出连续的例子.

定理 1 设 f 和 g 在 a 处连续，则

(1) $f+g$ 在 a 处连续，

(2) $f\cdot g$ 在 a 处连续.

并且，若 $g(a)\neq 0$，则

(3) $1/g$ 在 a 处连续.

证明 因为 f 和 g 在 a 处连续,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \text{ 和 } \lim_{x\to a}g(x)=g(a).$$

于是,根根第五章的定理 2(1),得

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a),$$

这正好就是断言 $f+g$ 在 a 处连续. 第(2),(3)部分的证明留给你们做.

由在任意 a 处连续的函数 $f(x)=c$ 和 $f(x)=x$ 出发, 我们可由定理 1 断定,下列函数

$$f(x)=\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}{c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0}$$

在它的定义域内的每一点都连续. 但很难知道得比这更多. 当我们详细讨论正弦函数时,容易证明 sin 在任意 a 处连续,目前让我们先假设有此事实. 现在可以证明一个如下的函数

$$f(x)=\frac{\sin^2x+x^2+x^4\sin x}{\sin^{27}x+4x^2\sin^2x}$$

在它的定义域内的每一点都连续. 但我们仍然不能证明象 $f(x)=\sin(x^2)$ 这样函数的连续性,我们显然需要一个关于连续函数的复合的定理. 在叙述该定理之前, 值得注意下列关于连续定义的论点. 如果我们用极限的定义来说明等式 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$,就可以这样写:对于任意 $\varepsilon>0$,总存在着一 $\delta>0$,使得当

$$0<|x-a|<\delta$$

时,便有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

但在本情形中,其极限是 $f(a)$,下式

$$0<|x-a|<\delta$$

可简写为 $$|x-a|<\delta,$$
因为当 $x=a$ 时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ 当然成立.

定理 2 设 g 在 a 处连续，f 在 $g(a)$ 处连续，则 $f\circ g$ 在 a 处连续.（注意：f 需在 $g(a)$ 处连续，不是在 a 处连续.）

证明 设 $\varepsilon>0$，我们需求一 $\delta>0$，使得当

$$|x-a|<\delta$$

时，便有

$$|(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)|<\varepsilon,$$

即 $$|f(g(x))-f(g(a))|<\varepsilon.$$

我们先根据 f 的连续性，来估计 $g(x)$ 必须与 $g(a)$ 接近到什么程度，才能使上列不等式成立. 因 f 在 $g(a)$ 处连续，故总存在着一 $\delta'>0$，使得

(1) 当 $|y-g(a)|<\delta'$ 时，便有 $|f(y)-f(g(a))|<\varepsilon$. 特别是，这表示

(2) 当 $|g(x)-g(a)|<\delta'$ 时，便有 $|f(g(x))-f(g(a))|<\varepsilon$.

现在我们根据 g 的连续性，来估计 x 必须与 a 接近到什么程度，才能使不等式 $|g(x)-g(a)|<\delta'$ 成立. 数 δ' 是一个正数，正如其他任何正数一样；因此，我们在 g 在 a 处连续的定义中，可以取 δ' 作为 ε.（注意！）于是，我们可以断定，总存在着一 $\delta>0$，使得

(3) 当 $|x-a|<\delta$ 时，便有 $|g(x)-g(a)|<\delta'$. 由(2)和(3)可见，当

$$|x-a|<\delta$$

时，便有 $$|f(g(x))-f(g(a))|<\varepsilon.$$

现在可以重新考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们曾经特别提到，f 在 0 处连续．应用定理 1 与 2 以及 sin 的连续性可推断，若 $a\neq 0$，则 f 在 a 处也连续．象 $f(x)=\sin(x^2+\sin(x+\sin^2(x^3)))$ 这样的函数，同样容易由你们来分析．

虽然本章的几个定理都是讲到了函数在一点的连续性，但直到我们着重研究在某一区间内所有的点都连续的函数时，连续的概念才会真正有意思．若 f 在 (a,b) 内的所有 x 都连续，则称 f **在 (a,b) 上连续**．在闭区间上连续的定义，稍有不同；若

(1) f 在 (a,b) 内所有 x 都连续，

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，

则称函数 **f 在 $[a,b]$ 上连续**．

通常认为，在一区间内连续的函数有特别好的性态；"合理的"函数必须满足的头一个条件的确是连续性．连续函数有时可以直观地表示为，其图形可以笔不离纸地一次绘出．考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

之后发现，这样形容连续函数有点太乐观，但在一区间上连续的函数确有许多重要的结果．这些定理一般地比本章的定理更难，但有一简单的定理，可作这两种结果之间的桥梁．虽然这一定理的假设只需要在一点的连续性，但其结论却描述了函数在包含该点的某个区间上的性态．虽然这定理实际上是后面论证的一个引理，但可作为预习把它列在这里．

定理 3 设 f 在 a 处连续，且 $f(a)>0$．则总存在着一 $\delta>0$，使得当 $|x-a|<\delta$ 时，便有 $f(x)>0$．同样地，若 $f(a)<0$，则总存在着一 $\delta>0$，使得当 $|x-a|<\delta$ 时，便有 $f(x)<0$．

证明 考虑 $f(a)>0$ 的情形．因为 f 在 a 处连续，故设 $\varepsilon>0$，则总存在着一 $\delta>0$，使得当

$$|x-a|<\delta$$

时，便有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

因为 $f(a)>0$，我们可以取 $f(a)$ 作为 ε。于是总存在着一 $\delta>0$，使得当

$$|x-a|<\delta$$

时，便有

$$|f(x)-f(a)|<f(a),$$

最后一个不等式意味着 $f(x)>0$。

同样可以证明 $f(a)<0$ 的情形. 取 $\varepsilon=-f(a)$，或者我们可以将第一种情形应用于函数 $-f$.

习　　题

1. 对于下列函数 f，是否存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的连续函数 F，使得对于 f 的定义域内所有的 x 均有 $F(x)=f(x)$？

   (i) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

   (ii) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

   (iii) $f(x)=0$，x 为无理数.

   (iv) $f(x)=1/q$，$x=p/q$ 为有理数，其中 p/q 为既约分数.

2. 习题四，第 15 和第 17 题的函数在哪些点连续？

3. (a) 设对于所有的 x，函数 f 满足 $|f(x)|\leqslant|x|$. 证明 f 在 0 处连续.（注意：$f(0)$ 必然等于 0.）

   (b) 有的函数 f 在任何 $a\neq0$ 处都不连续，试举其例.

   (c) 设 g 在 0 处连续，且 $g(0)=0$，以及 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$. 证明 f 在 0 处连续.

4. 有的函数 f 在任何点都不连续，但 $|f|$ 在所有点都连续. 试举其例.

5. 对于每一数 a，求一函数，使它在 a 处连续，但在其余各点都不连续.

6. (a) 求一函数 f，使它在 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 处不连续，但在其余所有的点都连续.

(b) 求一函数 f，使它在 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 和 0 处不连续，但在其余所有的点都连续.

7. 设 f 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，并且 f 在 0 处连续. 证明 f 在所有的 a 处连续.

8. 设 f 在 a 处连续且 $f(a)=0$. 证明，若 $\alpha\neq 0$，则在包含 a 的某一开区间内 $f+\alpha$ 是非零的.

9. (a) 设 f 在 a 处不连续. 证明对于某个 $\varepsilon>0$，有任意接近于 a 的数 x，使得 $|f(x)-f(a)|>\varepsilon$. 画图说明.

(b) 论证：对于某个 $\varepsilon>0$，不是有与 a 任意接近的 x 使 $f(x)<f(a)-\varepsilon$，就是有与 a 任意接近的 x 使 $f(x)>f(a)+\varepsilon$.

10. (a) 若 f 在 a 处连续，证明 $|f|$ 在 a 处连续.

(b) 证明每个连续的 f，都可以写成 $f=E+O$，其中 E 是偶函数并且连续，O 是奇函数并且连续.

(c) 设 f 和 g 连续，证明 $\max(f,g)$ 和 $\min(f,g)$ 连续.

(d) 证明所有连续的 f，都可以写成 $f=g-h$，其中 g 和 h 是非负并且连续的.

11. 用定理 2 和函数 $f(x)=1/x$ 的连续性，证明定理 1(3).

*12. (a) 证明若 f 在 l 处连续且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(l)$.（虽然你可以直接追溯到定义，但若考虑函数 G：当 $x\neq a$ 时 $G(x)=g(x)$，和 $G(a)=l$，则更方便.）

(b) 证明若不假设 f 在 l 处的连续性，则 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a}g(x))$ 一般不能成立. 提示：用当 $x\neq l$ 时 $f(x)=0$，和 $f(l)=1$ 来试.

13. (a) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，证明有一函数 g 在 $\mathbf{R}$ 上连续，并且对于 $[a,b]$ 内所有的 x，$g(x)=f(x)$. 提示：显然，你可以有多种选择，试令在 $(-\infty,a]$ 和 $[b,\infty)$ 上 g 为常数.

(b) 试举一例说明，若 $[a,b]$ 用 (a,b) 来代替，则上列的论断不成立.

14. (a) 设 g 和 h 在 a 处连续，并且 $g(a)=h(a)$. 定义 $f(x)$：当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)=g(x)$，而当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=h(x)$. 证明 f 在 a 处连续.

(b) 设 g 在 $[a, b]$ 上连续，而 h 在 $[b, c]$ 上连续，并且 $g(b)=h(b)$. 设对于 $[a, b]$ 内的 x，$f(x)=g(x)$，对于 $[b, c]$ 内的 x，$f(x)=h(x)$. 证明 f 在 $[a, c]$ 上连续.（这样，连续函数可以"粘起来".）

15. (a) 仿照定理 3，写出关于"右连续性"的定理，并证明之：设 $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，且 $f(a)>0$，则总存在着一个 $\delta>0$，使得当 $0\leqslant x-a<\delta$ 时，便有 $f(x)>0$. 同样地，若 $f(a)<0$，则总存在着一数 $\delta>0$，使得当 $0\leqslant x-a<\delta$ 时，便有 $f(x)<0$.

(b) 仿照定理 3，写出 $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ 时的定理，并证明之.

16. 若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，但 $\neq f(a)$，则称 f 在 a 处有**可去不连续性**.

(a) 设当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，且 $f(0)=1$，在 0 处 f 有没有可去不连续性？又当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，且 $f(0)=1$，这时有没有可去不连续性？

(b) 设 f 在 a 处有可去不连续性. 设当 $x\neq a$ 时，$g(x)=f(x)$，并设 $g(a)=\lim_{x\to a} f(x)$. 证明 g 在 a 处连续.（不费劲，这题很容易.）

(c) 设 x 为无理数时 $f(x)=0$，若 p/q 为既约分数时 $f(p/q)=1/q$. 由 $g(x)=\lim_{y\to x} f(y)$ 定义的函数 g 等于什么？

*(d) 设函数 f 具有这样的特性，每一不连续点都是可去不连续点. 这意味着，虽然对于所有 x，$\lim_{y\to x} f(y)$ 存在，但 f 在某些（甚至无穷多个）数 x 处不连续. 定义 $g(x)=\lim_{y\to x} f(y)$. 证明 g 是连续的.（这题不象(b)那么容易.）

**(e) 有没有这样的函数，它在所有的点都不连续，并且只有可去不连续点？（现在值得考虑这一问题，但主要是直观上检验；即使你猜出正确的答案，目前你也几乎无法证明它. 见习题二十一，24.）

选题解答

1. (i) $F(x)=x+2$，对于所有的 x.

(iii) $F(x)=0$，对于所有的 x.

第七章　三个难的定理

本章专门介绍关于连续函数的三个定理及其若干推论. 由于本章末尾所述的原因,这三个定理要到下一章才能证明.

定理 1　设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 并且 $f(a)<0<f(b)$, 则在 $[a,b]$ 内必有一 x 满足 $f(x)=0$.

(这个定理的几何意义是,连续函数的图形从水平轴的下方通到水平轴的上方,必与该轴相交于某点,如图 1 所示.)

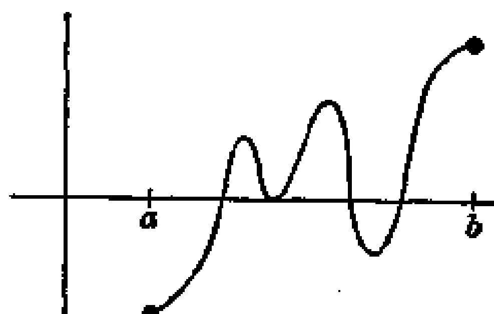


图 1

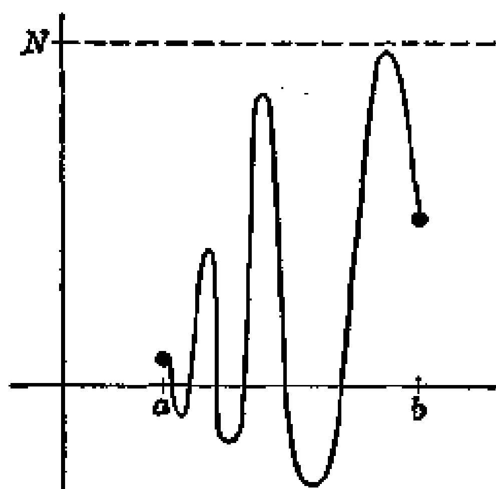


图 2

定理 2　若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上是上有界的,即存在某一数 N,能使 $[a,b]$ 内的一切 x 值满足 $f(x)\leqslant N$.

(这个定理的几何意义是, f 的图形位于与水平轴平行的某一直线之下,如图 2 所示.)

定理 3　若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则在 $[a,b]$ 内必存在某一数 y,能使 $[a,b]$ 内的一切 x 值满足 $f(y)\geqslant f(x)$(图 3).

这三个定理与第六章的各定理大不相同. 前一章各定理的假设都只涉及在一点的连续性; 现在这三个定理的假设需要在整个

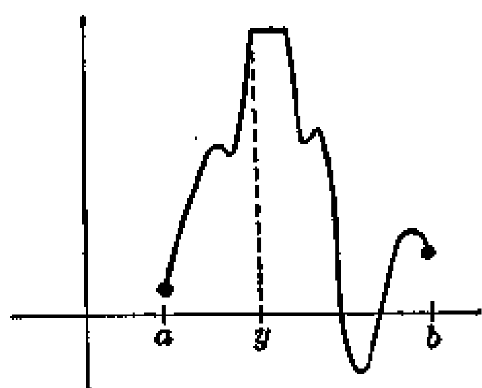


图 3

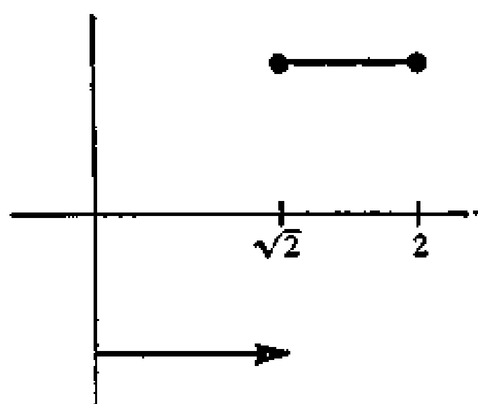


图 4

区间$[a, b]$上的连续性——如果在一点不连续，则定理的结论就可能不成立．例如，设f为如图 4 所示的函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant x\sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

虽然除了在$\sqrt{2}$处之外，f在$[0, 2]$上所有的点连续，并且$f(0)<0<f(2)$，但在$[0, 2]$内没有一点x能满足$f(x)=0$；一点$\sqrt{2}$的不连续性，足以使定理 1 的结论不成立．

同样地，设f为如图 5 所示的函数，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

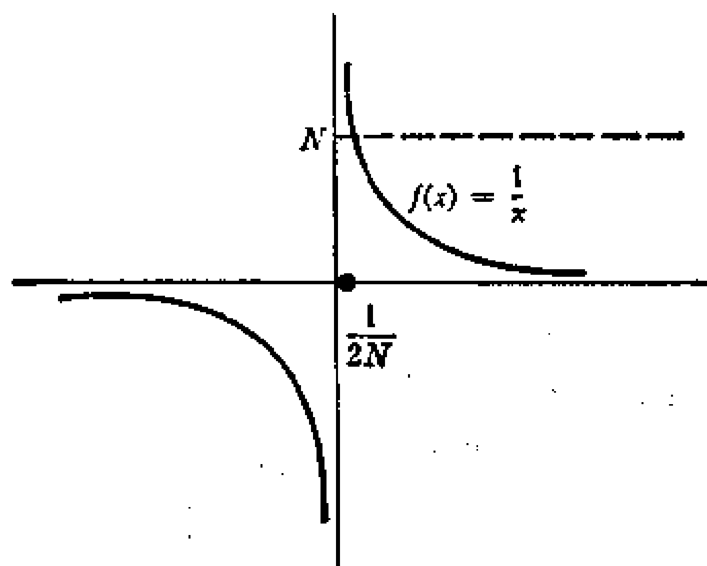


图 5

虽然 f 除了在点 0 之外，在$[0, 1]$上所有的点都连续，但 f 在$[0, 1]$上没有上界．事实上，对于任何数 $N>0$，恒有 $f\left(\frac{1}{2N}\right)=2N>N$．

从这个例中还可以看出，定理 2 中的闭区间不能用开区间来代替，因为函数 f 在$(0, 1)$上虽然连续，但却是无界的．

最后，考虑图 6 所示的函数，

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

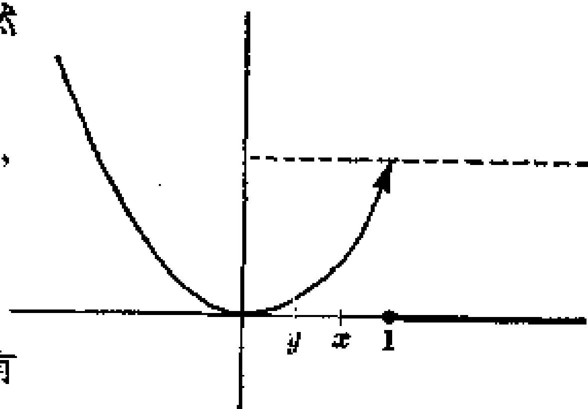


图 6

该函数 f 在区间$[0, 1]$上是上有界的，因此虽然 f 在$[0, 1]$上不连续，f 也能满足定理 2 的结论．但 f 不满足定理 3 的结论——在$[0, 1]$内没有一个 y 能使$[0, 1]$内的一切 x 值满足 $f(y)\geqslant f(x)$；事实上，对于$[0, 1]$内的一切 x 值，$f(1)\geqslant f(x)$当然不成立，因此我们不能取 $y=1$，我们也不能取 $0\leqslant y<1$，因为对于满足 $y<x<1$ 的任何一个 x，必有 $f(y)<f(x)$．

由上例可见，定理 3 比定理 2 强得多．通常将定理 3 解释为，闭区间上连续函数在该区间上"取得它的最大值"．

这三个定理的假设加强以后，其结论与先前定理的结论就属于完全不同的类型．它们不仅描述函数在某一点附近的特性，而且描述函数在整个区间的特性；函数的这种"整体"特性，往往比"局部"特性难证得多，但它有更大的用处．为了说明定理 1、2 和 3 的用处，我们本来可以紧接着推导出某些重要的推论，但先提出这些定理的某些简单的推广，是有帮助的．

定理 4 设 f 在$[a, b]$上连续，并且 $f(a)<c<f(b)$，则在$[a, b]$内必有一 x，能使 $f(x)=c$．

证明 令 $g=f-c$，则 g 是连续的，并且 $g(a)<0<g(b)$．根

据定理 1，在 $[a, b]$ 内必有一 x，能使 $g(x)=0$. 该式意味着 $f(x)=c$.

定理 5 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(a)>c>f(b)$，则在 $[a, b]$ 内必有一 x，能使 $f(x)=c$.

证明 函数 $-f$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $-f(a)<-c<-f(b)$. 根据定理 4，在 $[a,b]$ 内必有一 x，能使 $-f(x)=-c$，该式意味着 $f(x)=c$.

定理 4 和 5 表示，f 可取得介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何值. 我们甚至可以更进一步发挥：设 c 和 d 在 $[a,b]$ 内，则 f 可取得介于 $f(c)$ 和 $f(d)$ 之间的任何值. 其证明很简单：例如，$c<d$，则只需将定理 4 和 5 应用于区间 $[c,d]$ 即可. 总之，设连续函数在某一区间上取得两个值，它可取得介于这两值之间的所有的值；定理 1 的这个简单的推广通常称为介值定理.

定理 6 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上是下有界的，即存在一数 N，能使 $[a,b]$ 内的一切 x 满足 $f(x)\geqslant N$.

证明 函数 $-f$ 在 $[a,b]$ 上连续，由定理 2 知，这时必存在一数 M，能使 $[a,b]$ 内的一切 x 满足 $-f(x)\leqslant M$. 这意味着，能使 $[a, b]$ 内的一切 x 满足 $f(x)\geqslant -M$，于是，可取 $N=-M$.

由定理 2 和 6 可见，在 $[a,b]$ 上连续的函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，即存在一数 N，能使 $[a,b]$ 内的一切 x 满足 $|f(x)|\leqslant N$. 事实上，由定理 2 知，必有一数 N_1 能使 $[a,b]$ 内的一切 x 满足 $f(x)\leqslant N_1$，而由定理 6 知，必有一数 N_2 能使 $[a, b]$ 内的一切 x 满足 $f(x)\geqslant N_2$. 我们可取 $N=\max(|N_1|, |N_2|)$.

定理 7 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 内必存在某一 y，能使 $[a,b]$ 内的一切 x 满足 $f(y)\leqslant f(x)$.

（闭区间上连续函数在该区间上取得它的最小值.）

证明 函数 $-f$ 在 $[a,b]$ 上连续；由定理 3 知，在 $[a,b]$ 内必存

在某一y，能使$[a, b]$内的一切x满足$-f(y)\geqslant -f(x)$. 由此得，$[a, b]$内的一切x满足$f(y)\leqslant f(x)$.

我们已经导出了定理1,2和3的一些明显的推论，现在可以开始证明一些有趣的事情.

定理8 每一正数有一平方根. 换言之，设$\alpha>0$，则有一数x能满足$x^2=\alpha$.

证明 考虑函数$f(x)=x^2$，该函数当然是连续的. 注意，本定理可用f来表达："数α有一平方根"意味着f取得α值. 关于f的这个事实的证明，只是定理4的一个简单的推论.

显然有一数$b>0$能使$f(b)>\alpha$（如图7所示）；事实上，若$\alpha>1$，我们可取$b=\alpha$，若$\alpha<1$，我们可取$b=1$. 因为$f(0)<\alpha<f(b)$，于是将定理4应用于$[0, b]$便知，在$[0, b]$内有一x能满足$f(x)=\alpha$，即$x^2=\alpha$.

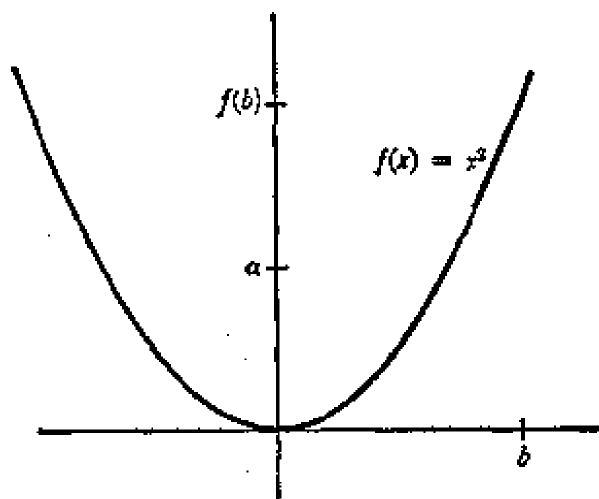


图 7

同理可证，一个正数有n次根，其中n为任意自然数. 若n恰好是奇数，我们可以有更好的结论：每一个数有一个n次根. 为了证明这一点，我们只要注意到，如果正数α有n次根x，即若$x^n=\alpha$，则$(-x)^n=-\alpha$（因为n是奇数），所以$-\alpha$有n次根$-x$. 对于奇数n，任何数α有n次根的论断，还可以陈述为：若n为奇数，

则下列方程

$$x^n-\alpha=0$$

有一个根. 用这种方式表达的结论,可推广如下.

定理9 若 n 为奇数,则任意方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

有一个根.

证明 显然我们要考虑这样的函数

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0;$$

我们需要证明 f 有时为正,有时为负. 从直观上看,对于大的 $|x|$,上列函数很象 $g(x)=x^n$,且因 n 为奇数,故对于大的正数 x,该函数是正的,而对于大(指绝对值)的负数 x,该函数是负的. 我们只要进行一些代数演算,即可得出这种直观的概念.

该函数的正式分析是根据

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right).$$

注意到

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right|\leqslant\frac{|a_{n-1}|}{|x|}+\cdots+\frac{|a_0|}{|x^n|},$$

因此,若选取 x 满足

$$(*)\qquad |x|\geqslant 1,\ 2n|a_{n-1}|,\ \cdots,\ 2n|a_0|,$$

则 $|x^k|\geqslant|x|$,以及

$$\frac{|a_{n-k}|}{|x^k|}\leqslant\frac{|a_{n-k}|}{|x|}\leqslant\frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|}=\frac{1}{2n},$$

于是 $$\left|\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right|\leqslant\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

换句话说, $$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\leqslant\frac{1}{2},$$

由上式得 $$\frac{1}{2}\leqslant 1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n},$$

因此，若取一个 $x_1>0$ 并满足(*)，则

$$\frac{x_1^n}{2}\leqslant x_1^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x_1}+\cdots+\frac{a_0}{x_1^n}\right)=f(x_1)$$

于是，$f(x_1)>0$．另一方面，设 $x_2<0$ 并满足(*)，则 $x_2^n<0$ 并且

$$\frac{x_2^n}{2}\geqslant x_2^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x_2}+\cdots+\frac{a_0}{x_2^n}\right)=f(x_2).$$

于是，$f(x_2)<0$.

现在将定理 1 应用于区间$[x_2, x_1]$，便得结论：在$[x_2, x_1]$内必有一x 满足 $f(x)=0$.

定理 9 令人满意地解决了奇次方程的问题，但对于偶次方程却一点也没涉及，有点使人失望．无论如何，这个问题初看起来好象无法解决．某些方程如 $x^2-1=0$有解，有些方程如 $x^2+1=0$ 无解——还有什么可说的？然而，如果我们想考虑更一般的问题，就有一些有趣的东西可以研究．研究解方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

的可能性，可用研究解下列方程的可能性来代替

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=c,$$

其中 c 为所有可能的数．这等于说允许改变常数项a_0．解这些方程的信息有赖于图 8 所示的事实.

若 n 为偶数，则函数 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 有一最低

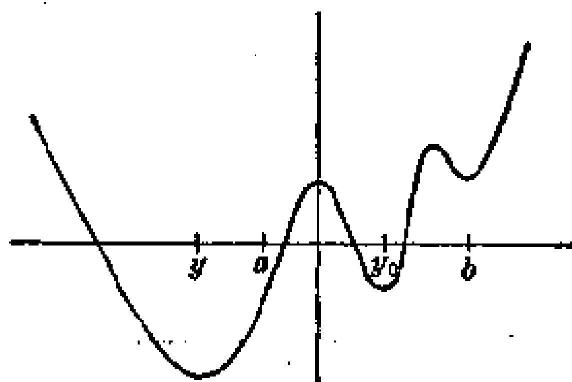


图 8

点，至少从图形上说是这样的．换言之，有一数 y 使得对于所有的数 x，$f(y)\leqslant f(x)$——函数 f 不仅在各个闭区间上而且在整条直线上取得最小值(注意，若 n 为奇数则此结论不成立．)其证明是根据定理 7，但要有一点技巧．我们可将定理 7 应用于任意区间 $[a,b]$，得到一点 y_0 能使 $f(y_0)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的最小值；但若 $[a,b]$ 刚好是如图 8 所示的区间，则点 y_0 就不是 f 在整条直线上取得它的最小值的位置．在下一定理中，证明的要点是选择一个不会发生上述情况的区间 $[a,b]$．

定理 10 若 n 为偶数，且 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，则必有一数 y 使对于一切 x 有 $f(y)\leqslant f(x)$．

证明 和定理 9 的证明一样，设

$$M=\max(1,2n|a_{n-1}|,\cdots,2n|a_0|),$$

则对于一切 $|x|\geqslant M$ 的 x，我们有

$$\frac{1}{2}\leqslant 1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}.$$

因为 n 是偶数，对于所有的 x，$x^n\geqslant 0$，故若 $|x|\geqslant M$，则有

$$\frac{x^n}{2}\leqslant x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}\right)=f(x).$$

现在考虑数 $f(0)$．设一数 $b>0$ 能满足 $b^n\geqslant 2f(0)$ 和 $b>M$．那

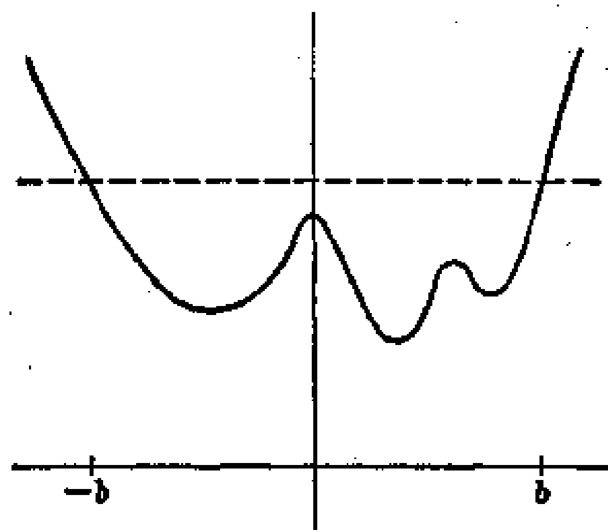


图 9

么，若 $x\geqslant b$，则有(图 9)

$$f(x)\geqslant\frac{x^n}{2}\geqslant\frac{b^n}{2}\geqslant f(0).$$

同样地，若 $x\leqslant -b$，则

$$f(x)\geqslant\frac{x^n}{2}\geqslant\frac{(-b)^n}{2}=\frac{b^n}{2}\geqslant f(0)$$

总括上述两点：若 $x\geqslant b$ 或 $x\leqslant -b$，则 $f(x)\geqslant f(0)$.

现在将定理 7 应用于区间 $[-b,\ b]$ 上的函数 f. 我们得出结论，必有一数 y 能满足

(1) 当 $-b\leqslant x\leqslant b$ 时，$f(y)\leqslant f(x)$.

特别，$f(y)\leqslant f(0)$. 于是

(2) 当 $x\leqslant -b$ 或 $x\geqslant b$ 时，$f(x)\geqslant f(0)\geqslant f(y)$.

由(1)和(2)可见，对于一切 x，$f(y)\leqslant f(x)$.

应用定理 10 现在我们就能证明下列结论.

定理 11 考虑方程

$$(*)\qquad x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=c,$$

并假设 n 为偶数. 则有一数 m，当 $c\geqslant m$ 时$(*)$有解，而当 $c<m$ 时无解.

证明 设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ (图 10).

由定理 10 知，必有一数 y 使得对于一切 x 都满足 $f(y)\leqslant f(x)$. 设 $m=f(y)$，若 $c<m$，则方程$(*)$显然无解，因为等式左边的值总是 $\geqslant m$，若 $c=m$，则 y 即为$(*)$的解. 最后，假设 $c>m$，设 b 为满足 $b>y$ 和 $f(b)>c$ 的一个数，则 $f(y)=m<c<f(b)$.

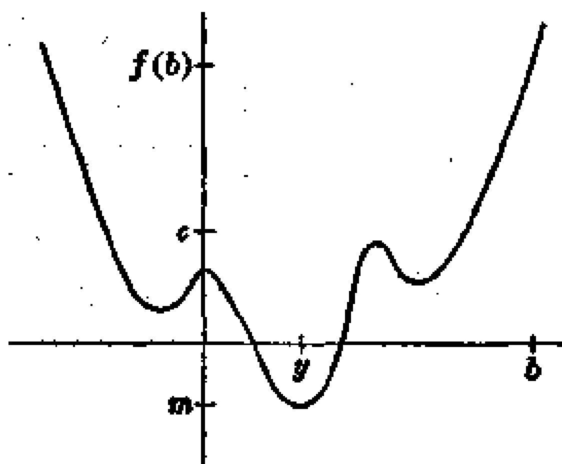


图 10

于是，由定理 4 知在$[y, b]$内必有一数 x 能使 $f(x)=c$，即 x 是$(*)$的解.

我们现在所证明的只是定理 1、2 和 3 的这些推论（但是这些定理将成为我们今后所有内容的基础）．现在只剩下一个内容未写——证明定理 1、2 和 3．不巧，我们无法解决这一问题——根据我们现在关于实数的知识（即 P1—P12），要证明这一问题是不可能的．有几个事例能说明我们这个悲观的结论确是事实．例如，定理 8 的证明只是以定理 1 为依据；如果我们能证明定理 1，则定理 8 的证明就完善了，从而每一正数有一平方根便得到证明．在第一部分中已经指出，根据 P1—P12 不可能证明这一结论．其次，让我们考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2},$$

若无满足 $x^2=2$ 的数 x，则 f 将是连续的，因为分母总不会等于 0．但 f 在$[0,2]$上却是无界的．于是，定理 2 必然依赖不同于有理数的数的存在，因此依赖不同于 P1—P12 的实数的某种性质.

尽管我们不能证明定理 1、2 和 3，但我们当然希望其结论是对的．如果我们所绘的图形和我们所讨论的数学问题有某种联系，如果连续函数的概念在某种程度上和我们的直观概念相对应，那么，定理 1，2 和 3 就应该成立．因为这些定理中的任何一个定理的证明都需要 $\mathbf{R}$ 的某种新的性质，而这种性质迄今被忽略了，我们现在遇到的困难提供了寻找这一性质的途径：作为一例，让我们试证定理 1，并看错在何处.

下列想法也许是有指望的：找出头一个 $f(x)=0$ 的点，即在$[a, b]$内满足 $f(x)=0$ 的最小的x．为求这一点，先考虑集A，它包含$[a, b]$上所有这样的数 x，这些 x 能使 f 在$[a, x]$上为负值．在图 11 中，x 是这样的点，而 x' 就不是．集 A 本身用粗线表示．因为

f 在 a 是负的，在 b 是正的，于是集 A 包含某些大于 a 的点，而充

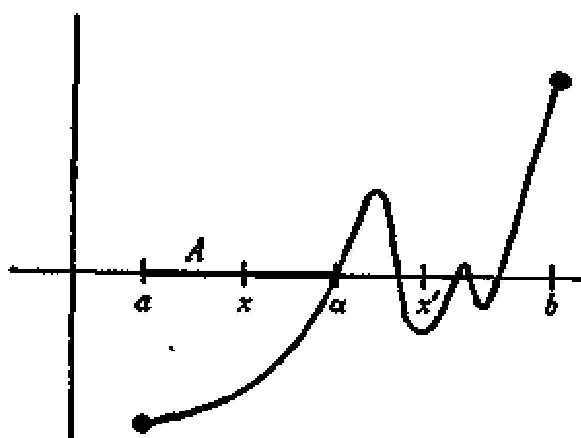


图 11

分接近 b 的所有的点则不在 A 内. (我们这里用 f 在$[a,b]$上的连续性以及习题六，15.)

现在假设 α 是大于 A 内所有数的最小的数，显然 $a<\alpha<b$. 我们说 $f(\alpha)=0$，为了证明这一点，我们只要排除 $f(\alpha)<0$ 和 $f(\alpha)>0$ 这两个可能性即可.

先假设 $f(\alpha)<0$. 根据第六章定理 3，对于包含 α 的一个小区间内的所有的 x，特别是对于这区间内某些大于 α 的数（图 12），$f(x)$小于 0；但这与 α 大于 A 内所有的数相矛盾，因为这些大于 α 的数也在 A 内. 所以 $f(\alpha)<0$ 不成立.

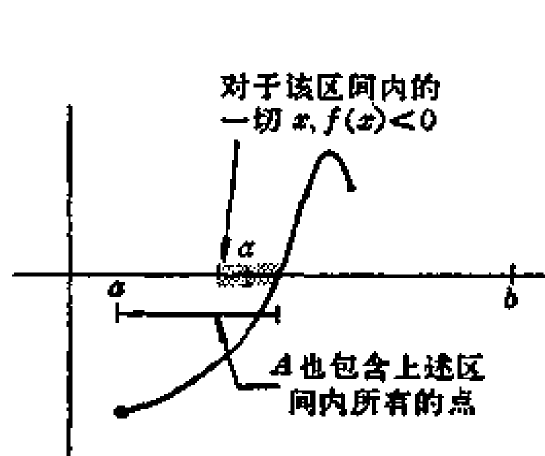


图 12

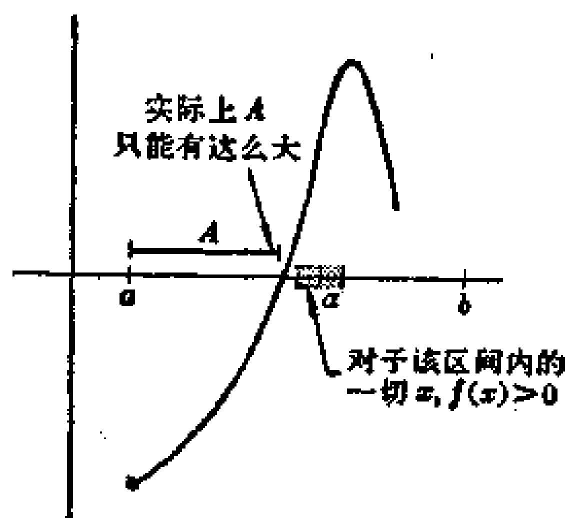


图 13

另一方面，假设$f(\alpha)>0$. 再应用上章定理3，对于包含α的一个小区间内所有的x，特别是对于这区间内某些小于α的数(图13)，$f(x)$是正的. 这说明这些小于α的数都不在A内. 因此，我们可取得一个更小的α，使它仍大于A内所有的数. 这里又出现矛盾；$f(\alpha)>0$也不成立. 因此$f(\alpha)=0$. 我们说"证毕".

无需细找，我们就能知道上述的证明无论如何总在某处弄错了，因为从未用到$\mathbf{R}$的新的性质. 显然，我们能取得比A内所有的数都大的数α(例如，可取$\alpha=b$)，但能取得最小的一个就不那么明显了. 事实上，假设A是由满足$x^2<2$的所有数$x\geqslant 0$组成的. 如果$\sqrt{2}$这个数不存在，就没有一个比A内所有的元都大的最小的数；因为对于我们所取的任何$y>\sqrt{2}$，总能取得更小的一个.

现在我们已找到其错处，至此大概可看到，需要添加一个怎样的实数性质. 我们所要做的就是，恰当地说出这个性质并且应用它. 而这是下一章的任务.

习　题

1. 下列各函数在指定的区间上哪些是上有界或下有界，哪些取得最大值或最小值.（注意，即使f不连续或所指定的区间不是闭区间，f也可能有上列的性质.）

(i) $f(x)=x^2$，在$(-1,1)$上.

(ii) $f(x)=x^3$，在$(-1,1)$上.

(iii) $f(x)=x^2$，在$\mathbf{R}$上.

(iv) $f(x)=x^2$，在$[0,\infty)$上.

(v) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant a\\ a+2, & x>a\end{cases}$ 在$(-a-1,a+1)$上.（需要考虑a的几种可能性.）

(vi) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<a\\ a+2, & x\geqslant a\end{cases}$ 在$[-a-1,a+1]$上.

(vii) $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为无理数} \\ 1/q, & x=p/q,\ p/q \text{ 为既约分数}\end{cases}$ 在$[0,1]$上.

(viii) $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数} \\ 1/q, & x=p/q,\ p/q \text{ 为既约分数}\end{cases}$ 在$[0,1]$上.

(ix) $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数} \\ -1/q, & x=p/q,\ p/q \text{ 为既约分数}\end{cases}$ 在$[0,1]$上.

(x) $f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 在$[0,a]$上.

(xi) $f(x)=\sin^2(\cos x+\sqrt{1+a^2})$, 在$[0,a^2]$上.

(xii) $f(x)=[x]$, 在$[0,a]$上.

2. 对于下列各多项式函数 f, 求一整数 n 使在 n 和 $n+1$ 之间的某一 x 满足 $f(x)=0$.

(i) $f(x)=x^3-x+3$.

(ii) $f(x)=x^5+5x^4+2x+1$.

(iii) $f(x)=x^5+x+1$.

(iv) $f(x)=4x^2-4x+1$.

3. 证明有某数 x 满足下列各式:

(i) $x^{179}+\dfrac{163}{1+x^2+\sin^2 x}=119$.

(ii) $\sin x=x-1$.

4. 本题是习题三, 7 的继续.

(a) 设 $n-k$ 是偶数并且 $\geqslant 0$, 求一 n 次多项式函数使它的根正好有 k 个.

(b) 若 $f(x)=(x-a)^m g(x)$, 其中 g 为多项式函数并且不以 a 为根, 则多项式函数 f 的根 a 称为 m 重的. 设 f 为 n 次多项式函数, 并设 f 有 k 个根, 计及重根, 即设 k 为所有根的重数的和. 证明 $n-k$ 是偶数.

5. 若 f 在$[a,b]$上连续并且 $f(x)$ 恒为有理数. f 应为怎样的函数?

6. 设 f 为$[-1,1]$上的连续函数, 并且对于所有的 x, 恒有 $x^2+(f(x))^2=1$. (这表示$(x,f(x))$恒在一单位圆上.) 证明对于所有的 x, 不是 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, 就是 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

7. 对于所有的 x 都满足$(f(x))^2=x^2$ 的连续函数 f 有多少个?

8. 设 f 和 g 是连续的并且 $f^2=g^2$, 对于所有的 x, $f(x)\neq 0$. 证明对于所

有的 x, 不是 $f(x)=g(x)$, 就是 $f(x)=-g(x)$.

9. (a) 设 f 是连续的, 并且只有当 $x=a$ 时 $f(x)=0$, 对于某个 $x>a$ 和某个 $x<a$ 有 $f(x)>0$. 那么, 对于所有 $x\neq a$, 关于 $f(x)$ 能说些什么?

*(b) 设 x 和 y 不同时为 0, 则 $x^2+xy+y^2\neq 0$, 用这个事实证明, 若 x 和 y 不同时为 0, 则 $x^2+xy+y^2>0$. (证明的技巧是考虑各个固定的 $y\neq 0$, 这样你可以定义一个函数.)

*(c) 同样地, 讨论当 x 和 y 不同时为零时 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ 的符号.

10. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续并且 $f(a)<g(a)$, 但 $f(b)>g(b)$. 证明 $[a,b]$ 内必有某数 x 满足 $f(x)=g(x)$. (如果你的证明不是很短的, 则一定不正确.)

11. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数并且对于每个 x, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内(绘一图). 证明必有某数 x 满足 $f(x)=x$.

12. (a) 第 11 题表示 f 与图 14 所示的正方形的对角线(实线)相交. 证明 f 必然也和另一对角线(虚线)相交.

(b) 证明下列更一般的事实: 设 g 在 $[0,1]$ 上连续并且 $g(0)=0$, $g(1)=1$ 或 $g(0)=1$, $g(1)=0$, 则必有某数 x 满足 $f(x)=g(x)$.

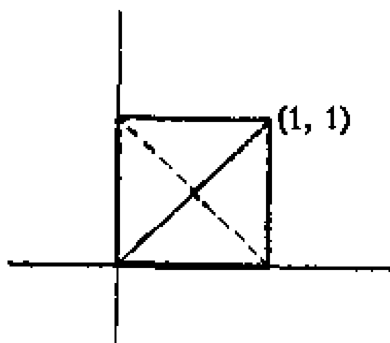


图 14

13. (a) 设当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\sin 1/x$, 而 $f(0)=0$. 则 f 在 $[-1,1]$ 上是否连续? 证明 f 在 $[-1,1]$ 上满足介值定理的结论; 换言之, 设 f 在 $[-1,1]$ 上任取两值, 则必取得介于这两值之间的所有的值.

*(b) 设 f 满足介值定理的结论, 并且对于每一值, f 只取得一次. 证明 f 是连续的.

*(c) 推广到对于每一值, f 只取得有限次的情形.

14. 设 f 是在 $[0,1]$ 上的连续函数, 令 $\|f\|$ 为 $|f|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值.

(a) 证明对于任何数 c, 我们有 $\|cf\|=|c|\cdot\|f\|$.

*(b) 证明 $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$. 举出 $\|f+g\|\neq\|f\|+\|g\|$ 的例子.

(c) 证明 $\|h-f\|\leqslant\|h-g\|+\|g-f\|$.

*15. 设 ϕ 是连续的并且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\phi(x)}{x^n}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\phi(x)}{x^n}$.

(a) 证明若 n 是奇数, 则有一数 x 满足 $x^n+\phi(x)=0$.

(b) 证明若 n 是偶数，必有一数 y 对于所有的 x 满足 $y^n+\phi(y)\leqslant x^n+\phi(x)$.

提示：本题检验你理解了哪一个证明？

*16. 设 f 为任意多项式函数，证明必有某数 y 对于所有 x 满足 $|f(y)|\leqslant|f(x)|$.

*17. 设 f 是一连续函数，并且对于所有的 x, $f(x)>0$ 以及 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$（绘一图）. 证明必有某数 y 对于所有 x 满足 $f(y)\geqslant f(x)$.

*18. (a) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续并且 x 为任意数. 证明在 f 的图形上有一点离点 $(x,0)$ 最近；换句话说，在 $[a,b]$ 内有某一 y 使由 $(x,0)$ 至 $(y,f(y))$ 的距离 $\leqslant$ 由 $(x,0)$ 至 $(z,f(z))$ 的距离，其中 z 为 $[a,b]$ 内的任意值.（见图 15.）

(b) 试证若 $[a,b]$ 用 (a,b) 来代替，则上列结论未必成立.

(c) 试证若 $[a,b]$ 用 $\mathbf{R}$ 来代替，则上列结论能成立.

(d) 在情形 (a) 和 (c) 中，设 $g(x)$ 为由 $(x,0)$ 至 f 图上一点的最小距离. 证明 $g(y)\leqslant g(x)+|x-y|$，并且 g 是连续的.

(e) 证明在 $[a,b]$ 内有数 x_0 和 x_1，使由 $(x_0,0)$ 至 $(x_1,f(x_1))$ 的距离 $\leqslant$ 由 $(x_0',0)$ 至 $(x_1',f(x_1'))$ 的距离，其中 x_0', x_1' 是在 $[a,b]$ 内的任意值.

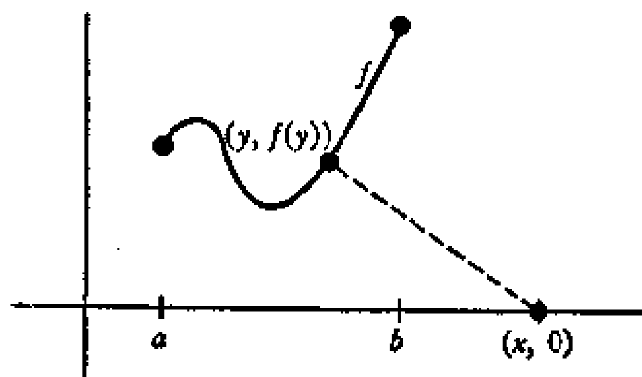


图 15

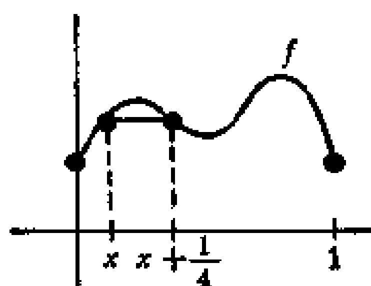


图 16

**19. (a) 设 f 在 $[0,1]$ 上连续并且 $f(0)=f(1)$. 设 n 为任意自然数. 证明有某数 x 满足 $f(x)=f(x+1/n)$，如图 16 所示，其中 $n=4$. 提示：考虑函数 $g(x)=f(x)-f(x+1/n)$；对于所有的 x 若 $g(x)\neq0$，结果将如何？

(b) 设 $0<a<1$，但 a 不等于 $1/n$，其中 n 为任意自然数．求一函数 f 使它在$[0, 1]$上连续，并且满足 $f(0)=f(1)$，但对于任意数 x 都不满足 $f(x)=f(x+a)$．

**20. (a) 证明不存在定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，对于任意值都正好只取得两次．提示：若对于 $a<b$，$f(a)=f(b)$，则对于(a, b)内所有的 x 必有 $f(x)>f(a)$，或对于(a, b)内所有的 x 必有 $f(x)<f(a)$．为什么？在第一种情形中，所有接近 $f(a)$但稍大于 $f(a)$的值可在(a, b)内某处取得；这意味着对于 $x<a$ 和 $x>b$，$f(x)<f(a)$．

(b) 通过证明下列结论将(a)说得更确切：没有连续函数 f 对于每一值取得 0 次或 2 次，即该函数若能取得某值必正好取得 2 次．提示：前面的提示意味着 f 不是有一最大值就是有一最小值（它必定取得两次）．接近于最大值的数值将如何？

(c) 求一连续函数 f，使它对于每一值都正好取得 3 次．更一般地，若 n 是奇数，求一连续函数 f，使它对于每一值都正好取得 n 次．

(d) 证明若 n 是偶数，没有一个连续函数对于任意值都正好取得 n 次．提示：例如对于 $n=4$ 的情形，若 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=a$．那么对于$(x_1, x_2)$，$(x_2, x_3)$，$(x_3, x_4)$这三个区间内两个区间的所有 x，$f(x)>a$，或这三个区间内两个区间的所有 x，$f(x)<a$．

选题解答

1. (i) 既是上有界又是下有界；最小值为 0；没有最大值．

(iii) 下有界但不是上有界；最小值为 0．

(v) 既是上有界又是下有界．不用说，当然 $a>-1$（这样才能使 $-a-1<a+1$）．若 $-1<a\leqslant-\frac{1}{2}$，则 $a\leqslant-a-1$，而对于$(-a-1, a+1)$内所有的 x 只有 $f(x)=a+2$，因此，$a+2$ 为最大值和最小值．若 $-\frac{1}{2}<a\leqslant0$，则 f 有最小值 a^2，而当 $a\geqslant0$ 时 f 有最小值 0．对于 $a>-\frac{1}{2}$，只有当 $a\leqslant[-1+\sqrt{5}]/2$ 时 f 才有最大值（最大值为 $a+2$），因为只有当$[-1-\sqrt{5}]/2\leqslant a\leqslant[-1+\sqrt{5}]/2$ 时 $a+2\geqslant f(-a-1)=(a+1)^2$．

(vii) 既是上有界又是下有界；最大值为 1；最小值为 0.

(ix) 既是上有界又是下有界；最大值为 1；最小值为 -1.

(xi) 因 f 是连续的故有最大值和最小值.

2. (i) 因 $f(-2)<0<f(-1)$，故 $n=-2$.

   (iii) 因 $f(-1)=-1<0<f(0)$，故 $n=-1$.

3. (i) 设 $f(x)=x^{179}+163/(1+x^2+\sin^2 x)-119$，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续并且 $f(2)>0$，而 $f(-2)<0$，因而在 $(-2,2)$ 内有某个 x 满足 $f(x)=0$.

5. f 是常数，因 f 若取两个不同的值，则 f 可取在这两值之间所有的值，而这些值必包含无理数.

7. (1) $f(x)=x$；

   (2) $f(x)=-x$；

   (3) $f(x)=|x|$；

   (4) $f(x)=-|x|$.

10. 将定理 1 应用于 $f-g$.

11. 若 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，则可取 $x=0$ 或 1（图 a）①. 若 $f(0)>0=I(0)$ 和 $f(1)<1=I(1)$，则将第 10 题应用于 f 和 I 便知必有某个 x 满足 $f(x)=x$（图 b）.

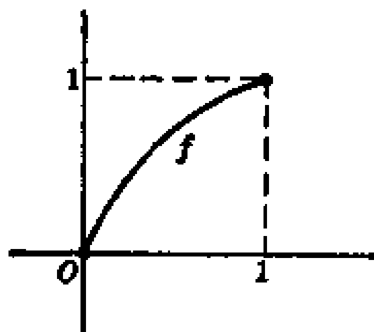


图 a

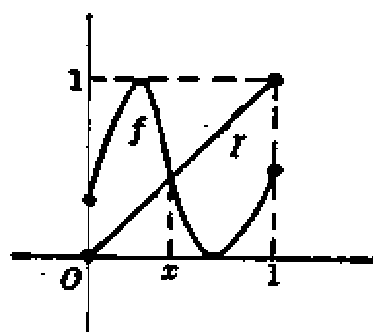


图 b

① 译注：图 a 和图 b 是译时加上的.

第八章 最小上界

本章揭示实数的最重要的性质．不过，本章只是第七章的继续；所要讨论的内容前面已经指出，现立即进行进一步讨论．

定义

> 若有一数 x，使对于一实数集合 A 内所有的 a，满足
> $$x \geqslant a$$
> 则称 A 是**上有界**的．这样的一数 x 称为 A 的**上界**.

显然，当且仅当有一数 x 为 A 的上界（在本情形中，A 有许多上界）时，A 才是上有界的；在英语习惯中，我们经常这样说，当有一数是 A 的上界时，则称"A 有一上界"．

注意"上有界"一词至此已在两个场合用到——头一处在第七章中关于函数问题用到它，现在关于集合问题又用到它．这种双重用法不会引起混淆，因为我们所讨论的究竟是数的集合还是函数，往往是清楚的．并且，这两个定义是紧密相关的：设 A 是这样的集合 $\{f(x): a \leqslant x \leqslant b\}$，则当且仅当 A 是上有界时，函数 f 在 $[a,b]$ 上才是上有界的．

例如，全部实数的集合 $\mathbf{R}$ 和自然数 $\mathbf{N}$ 都不是上有界的．而
$$A = \{x: 0 \leqslant x < 1\}$$
是上有界的．为了证明 A 是上有界的，我们只需指出 A 的某一上界即可，这是很容易的．例如，138 是 A 的一个上界，而 $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}$ 和 1 也是．显然，1 是 A 的最小上界；虽然最小上界一词是不解自明的，但为了避免任何可能发生的混淆（特别是，为了彻底弄

清“小”的最高级的意义)我们把它明确地定义如下.

定义

> 设 (1) x 是 A 的一个上界,
>
> (2) 若 y 是 A 的一个上界, 则 $x \leqslant y$,
>
> 则称数 x 为 A 的一个**最小上界**.

在该定义中,用了“一个”这个词,只是由于暂时对最小上界不了解. 下了精确定义之后,就容易看出,若 x 和 y 都是 A 的最小上界,则 $x=y$. 的确,此时

$x \leqslant y$, 因为 y 是一个上界,而 x 是一个最小上界,

并且 $y \leqslant x$, 因为 x 是一个上界,而 y 是一个最小上界;

由此得 $x=y$. 因此我们称它为 A 的最小上界. A 的**上确界**一词与 A 的最小上界是同义的,且有一优点,它可以很好地简写成

$$\sup A \quad (\text{读作“soup } A\text{”}),$$

并使我们可以避免如下的简写

$$\text{lub} A$$

(尽管有些作者用这种简写).

与上述定义相类似, 有一系列重要的定义现在可以更简便地给出. 设有一数 x, 使对于一实数集合 A 内的所有的 a 满足

$$x \leqslant a,$$

则称 A 是**下有界的**. 这样的一数 x 称为 A 的**下界**. 设

(1) x 是 A 的一个下界,

(2) 若 y 是 A 的一个下界, 则 $x \geqslant y$,

则称数 x 为 A 的**最大下界**. A 的最大下界也称为 A 的**下确界**, 简写为

$$\inf A;$$

有些作者用如下的简写

glb A.

我们讨论至今，有一个细节被忽略了——怎样的集合才会至少有一个从而恰好有一个最小上界或最大下界．我们只要考虑最小上界，因为这个问题解决之后，最大下界问题就容易解决(第2题).

如果A不是上有界的，则A根本就没有上界，因此，当然不能指望A有一个最小上界．设A有某一上界，则A一定有一最小上界，但和数学归纳法原则一样，对于很特殊的情形，这个断言未必成立．设$A=\varnothing$，则A是上有界的．的确，因在$\varnothing$中没有y，故任何数x都是$\varnothing$的一个上界：

$$x \geqslant y, \text{ 对于}\varnothing\text{中的所有的 } y.$$

由于所有的数都是$\varnothing$的一个上界，$\varnothing$当然就没有最小上界．然而，除了这个无足轻重的例外，我们的断言是对的——并且是非常重要的，值得详细考虑．现在我们可以叙述所需要的实数的最后一个性质．

(P13)（**最小上界性**）设A是一实数集合，$A\neq\varnothing$，且A是上有界的，则A有一最小上界．

在你看来，性质P13可能是很平常的，而这确实是它的一个优点．为了补全所列举的实数的基本性质，我们无需加添特别深奥的命题，只需一个这样简单的性质——可能觉得有点好笑，对于这样简单的性质我们却没有注意到．当然，最小上界性实际上并不全象上述的那样单纯；它在有理数$\mathbf{Q}$的范围内不成立．例如，设A为所有满足$x^2<2$的有理数x的集合，就没有这样的有理数y：它既是A的一个上界，同时又小于或等于作为A的上界的其他各个有理数．虽然只能逐渐地看出P13的重要性，但把它应用于第七章所未作的证明中，就能看出它的作用．

定理 7-1 设f在$[a, b]$上连续，并且$f(a)<0<f(b)$，则在

$[a, b]$内必有一 x 满足 $f(x)=0$.

证明 我们的证明只是对第七章末尾所述的要点作一严格的陈述——我们要在$[a, b]$内找出满足 $f(x)=0$的最小数 x.

如图 1 所示,定义集合 A 如下:

$$A=\{x: a\leqslant x\leqslant b, \text{且 } f \text{ 在区间}[a, x]\text{上是负的}\}.$$

显然 $A\neq\varnothing$,因为 a 在 A 内. 其实有某一 $\delta>0$ 使 A 包含所有满足 $a\leqslant x<a+\delta$ 的点 x; 这是由习题六,15 得来的,因为 f 在$[a, b]$上连续并且 $f(a)<0$. 同样地,b 是 A 的一个上界,并且事实上有一 $\delta>0$ 使所有满足 $b-\delta<x\leqslant b$ 的点 x 都是 A 的上界; 这也是由习题六,15 得来的,因为 $f(b)>0$.

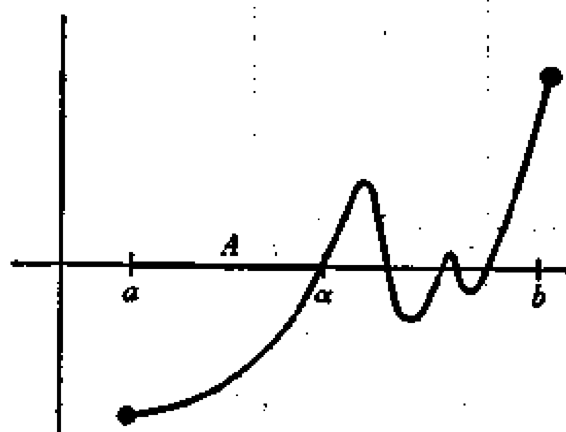


图 1

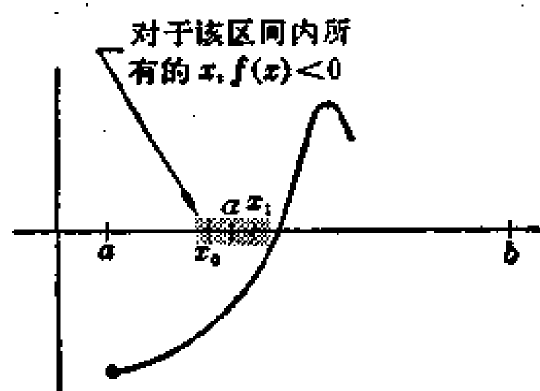


图 2

由上述可知 A 有一最小上界 α,并且 $a<\alpha<b$. 我们现在要证明 $f(\alpha)=0$. 用排除 $f(\alpha)<0$ 和 $f(\alpha)>0$ 可能性的方法来证明.

先假设 $f(\alpha)<0$. 由第六章定理 3 知,有一$\delta>0$ 使得当 $\alpha-\delta<x<\alpha+\delta$ 时有 $f(x)<0$(图 2). 今在 A 内有某数 x_0 满足 $\alpha-\delta<x_0<\alpha$ (因为否则 α 将不是 A 的最小上界). 这表示 f 在整个区间$[a, x_0]$上是负的. 但若 x_1 是在 α 和 $\alpha+\delta$ 之间的一个数,则 f 在整个区间$[x_0, x_1]$上也是负的. 因此 f 在区间$[a, x_1]$上是负的, 于是 x_1 在 A 内. 这与 α 是 A 的一个上界之事实相矛盾; 我们原假设 $f(\alpha)<0$ 必定不成立.

另一方面，假设 $f(\alpha)>0$. 有一数 $\delta>0$ 使得当 $\alpha-\delta<x<\alpha+\delta$ 时 $f(x)>0$ (图 3). 我们再次知道在 A 内有一 x_0 满足 $\alpha-\delta<x_0<\alpha$; 但这表示 f 在$[a, x_0]$上是负的，这是不可能的，因为 $f(x_0)>0$. 于是 $f(\alpha)>0$ 的假设也导致矛盾，剩下的只有 $f(\alpha)=0$ 可供选择.

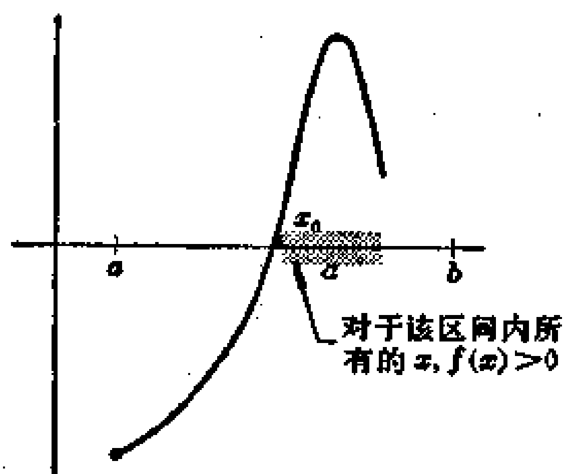


图 3

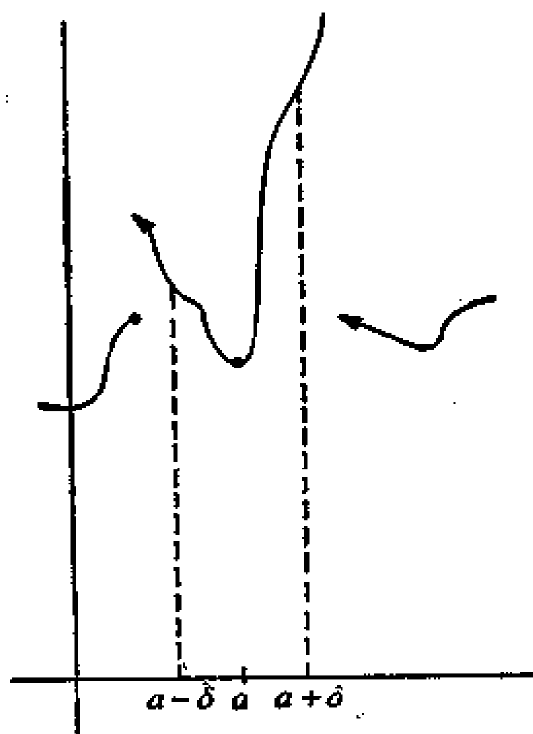


图 4

第七章的定理 2 和 3 的证明需要一个简单的预备定理，该定理所起的作用很象第六章定理 3 在前一证明中所起的作用.

定理 1 设 f 在点 a 连续，则有一数 $\delta>0$ 使 f 在区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 内是上有界的(见图 4).

证明 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，则对于每一 $\varepsilon>0$, 有一 $\delta>0$ 使得当

$$|x-a|<\delta$$

时，恒有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

只需将此陈述应用于某一特殊的 ε(任何一个都可以)，例如 $\varepsilon=1$. 我们断定必有一 $\delta>0$, 使得当

$$|x-a|<\delta$$

时，恒有

$$|f(x)-f(a)|<1.$$

特别是，由此可得，当$|x-a|<\delta$时$f(x)-f(a)<1$. 这就完成了证明：函数f在区间$(a-\delta, a+\delta)$上以$f(a)+1$为上界.

无需增加多少内容，我们现在也能证明f在某区间$(a-\delta, a+\delta)$上是下有界的，于是最后得到f在包含a的某一开区间内是有界的.

一个更有意义的论点是，若$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$，则有一$\delta>0$使$f$在集合$\{x: a\leqslant x<a+\delta\}$上有界；若$\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$，也有类似的结果. 有了这些结论（并假设你将补充其证明），我们现在证明第二个主要定理.

定理 7-2 设f在$[a,b]$上连续，则f在$[a,b]$上是上有界的.

证明 设

$$A=\{x: a\leqslant x\leqslant b \text{ 且 } f \text{ 在}[a,x]\text{上是上有界的}\}.$$

显然$A\neq\varnothing$（因为a在A内），且A是上有界的（界为b），因此A有

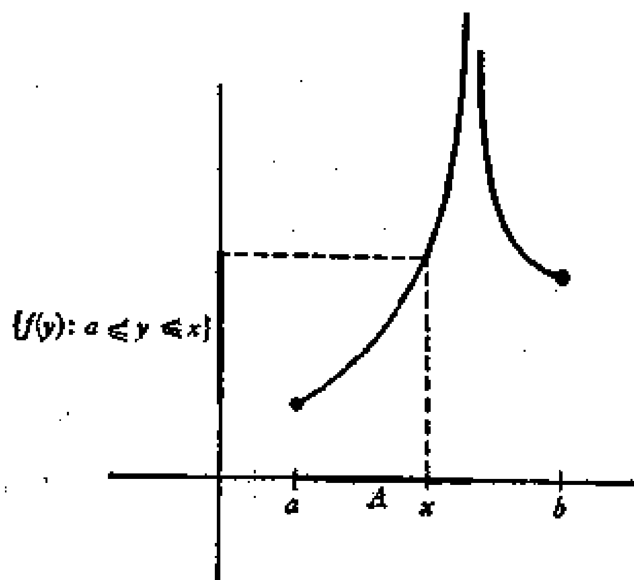


图 5

一最小上界α. 注意,我们这里将"上有界"一词用于集合A,它可以想象为位于水平轴上; 同时也用于f, 即用于集合$\{f(y):a\leqslant y\leqslant x\}$,它可以想象为位于直立轴上(图5).

头一步我们要证明实际上$\alpha=b$. 假设$\alpha<b$. 根据定理1,有$\delta>0$使f在$(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$上是上有界的. 因为$\alpha$是$A$的最小上界, 故在$A$内有某$x_0$满足$\alpha-\delta<x_0<\alpha$. 这意味着$f$在$[a,x_0]$上是上有界的. 但若$x_1$为满足$\alpha<x_1<\alpha+\delta$的任何数, 则$f$在$[x_0,x_1]$上是有界的. 因此, f在$[a,x_1]$上是有界的, 于是x_1在A内, 这与α是A的一个上界之事实相矛盾. 由这个矛盾得出$\alpha=b$. 有一个细节需要说明: 本证明暗中假设了$a<\alpha$ (因此f在某区间$(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$上有定义); 同样地,存在一$\delta>0$使$f$在$\{x:a\leqslant x<a+\delta\}$上是上有界的,故可排除$a=\alpha$的可能性.

这样证明不是十分完全的——我们只知道对于每个$x<b$, f在$[a,x]$上是有界的, 而f在$[a,b]$上未必有界. 只需稍加一些论证即可使它完全.

有一$\delta>0$使f在$\{x:b-\delta<x\leqslant b\}$上是有界的. 在$A$内有$x_0$使$b-\delta<x_0<b$. 于是$f$在$[a,x_0]$上同时也在$[x_0,b]$上是有界的, 因此$f$在$[a,b]$上是有界的.

为了证明第三个重要定理,我们要用一个技巧.

定理 7-3 若f在$[a,b]$上连续, 则在$[a,b]$内必存在某一数y,能使$[a,b]$内的一切x值满足$f(y)\geqslant f(x)$.

证明 我们已经知道f在$[a,b]$上是有界的,这表示集合

$$\{f(x):x\text{ 在}[a,b]\text{内}\}$$

是有界的. 该集合显然不是$\varnothing$, 因此它有一最小上界α. 因为对于$[a,b]$内的x,$\alpha\geqslant f(x)$. 所以只要证明对于$[a,b]$内的某个y,有$\alpha=f(y)$就已足够.

假设对于$[a,b]$内所有的y,$\alpha\neq f(y)$. 则由下式定义的函数g

$$g(x)=\frac{1}{\alpha-f(x)},\quad x\text{ 在}[a,b]\text{上}$$

在$[a,b]$上连续，因为右边的分母总不为0. 另一方面，α是$\{f(x):x$在$[a,b]$内$\}$的最小上界；这意味着

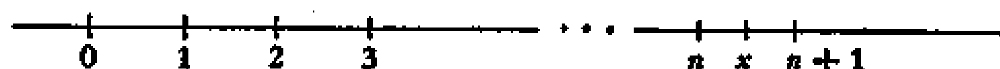
对于每一$\varepsilon>0$，在$[a,b]$内有x满足$\alpha-f(x)<\varepsilon$.

亦即

对于每一$\varepsilon>0$，在$[a,b]$内有x满足$g(x)>1/\varepsilon$.

但这表示g在$[a,b]$上不是有界的，与前一定理矛盾.

本章开头将自然数**N**的集合作为无界集合的一例. 我们现在要证明**N**是无界的. 在本章证了难的定理之后，你看到这样一个"明显"的定理缠住我们的进程，也许会感到吃惊. 如果是这样，你也许受**R**的几何图形的影响太深了. 你可能会说："看，因实数和下图一样，因此每一数x总在两个整数n和$n+1$之间(除非x本



身是一整数)". 然而，以几何图形为依据不能算是证明，并且几何图形还包含一个假设：若将单位线段一个接一个地连接起来，最终会得到一条线段，比任何已知线段都长. 这个公理(经常在几何人门时被忽略掉)通常认为是阿基米德发现的(并不十分公正)，而与此相对应的数的性质，即**N**是无界的，称为实数的阿基米德性. 当然，尽管这个性质对于**Q**成立，但它不是P1—P12的推论(见建议读物[17]). 但是，我们一旦有了P13，就不会再有任何问题了.

定理 2 **N**不是上有界的.

证明 设**N**是上有界的. 因$\mathbf{N}\neq\varnothing$，故**N**有一最小上界$\alpha$，于是

$$\alpha\geqslant n\quad\text{对于}\mathbf{N}\text{内所有的}n.$$

从而 $$\alpha\geqslant n+1\quad\text{对于}\mathbf{N}\text{内所有的}n,$$

因为若 n 在N内则 $n+1$ 在N内. 但这意味着

$$\alpha-1 \geqslant n \quad \text{对于N内所有的} n,$$

而这意味着 $\alpha-1$ 也是N的一个上界，与 α 是最小上界的事实相矛盾. ▌

定理 2 有一个推论(实为一个等价公式)，我们曾经常暗中假定它成立.

定理 3 对于任何 $\varepsilon>0$ 有一自然数 n 满足 $1/n<\varepsilon$.

证明 如果没有，则对于N内所有的 n 有 $1/n \geqslant \varepsilon$. 于是对于N内所有的 n, $n \leqslant 1/\varepsilon$. 但这意味着 $1/\varepsilon$ 是N的一个上界，与定理 2 矛盾. ▌

粗略地看一下第六章就会发现，在许多例子的讨论中都用到了定理 3 的结论. 当然，那时定理 3 并未证明，但因那些例子很重要，为了举出这些例子，只好忍受一些蒙混. 允许这样做的部分理由是我们从来没用这个结论来证明定理. 如有疑问，最好再看一下我们迄今所证明的所有定理. 侥幸的是我们无需再蒙混. 我们现在已列出我们所需要的实数的每一个性质，此后再无蒙混.

习　题

1. 求下列各集合的最小上界和最大下界(如果它们存在的话)．并确定哪些集合有最大元和最小元（即确定何时最小上界和最大下界恰好属于该集合）.

   (i) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ 在N内}\right\}$.

   (ii) $\left\{\frac{1}{n}: n \text{ 在 Z内且 } n \neq 0\right\}$.

   (iii) $\{x: x=0 \text{ 或 } x=1/n, n \text{ 是N内的一个数}\}$.

   (iv) $\{x: 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \text{ 且 } x \text{ 为有理数}\}$.

   (v) $\{x: x^2+x+1 \geqslant 0\}$.

   (vi) $\{x: x^2+x-1<0\}$.

(vii) $\{x: x<0$ 且 $x^2+x-1<0\}$.

(viii) $\left\{\frac{1}{n}+(-1)^n: n\right.$ 在 N 内 $\left.\right\}$.

2. (a) 设 $A\neq\varnothing$ 是下有界的. 令 $-A$ 表示所有 $-x$ 的集合, 而 x 在 A 内. 证明 $-A\neq\varnothing$, $-A$ 是上有界的, 且 $-\sup(-A)$ 是 A 的最大下界.

   (b) 设 $A\neq\varnothing$ 是下有界的, 设 B 为 A 的所有下界的集合. 证明 $B\neq\varnothing$, B 是上有界的, 且 $\sup B$ 是 A 的最大下界.

3. 设 f 为在 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)<0<f(b)$.

   (a) 定理 7-1 的证明指出在 $[a, b]$ 内有一最小的 x 满足 $f(x)=0$. 在 $[a, b]$ 内是否必有次最小的 x 满足 $f(x)=0$? 证明在 $[a, b]$ 内有一最大的 x 满足 $f(x)=0$. (考虑一个与 f 紧密相关的新的函数, 以便得到简便的证明.)

   (b) 定理 7-1 的证明是从 $A=\{x: a\leqslant x\leqslant b$ 且 f 在 $[a, x]$ 上是负的$\}$ 出发的. 试从 $B=\{x: a\leqslant x\leqslant b$ 且 $f(x)<0\}$ 出发来证明定理 7-1. 这个证明将确定在 $[a, b]$ 内哪一点 x 有 $f(x)=0$? 举例说明集合 A 和 B 不一样.

4. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$. 并设对于 $[a, b]$ 内的某个 x_0 有 $f(x_0)>0$. 证明: 存在满足 $a\leqslant c<x_0<d\leqslant b$ 的 c 和 d, 使得 $f(c)=f(d)=0$ 但对于 (c, d) 内所有的 x 有 $f(x)>0$. 提示: 可以很好地利用上一题.

5. (a) 假设 $y-x>1$. 证明有一整数 k 满足 $x<k<y$. 提示: 设 l 为满足 $l\leqslant x$ 的最大整数, 并考虑 $l+1$.

   (b) 设 $x<y$. 证明有一有理数 r 满足 $x<r<y$. 提示: 若 $1/n<y-x$, 则 $ny-nx>1$. (提问: 为什么推迟至第 5 题才出 (a) 和 (b) 题?)

   (c) 设 $r<s$ 是有理数. 证明在 r 与 s 之间有一无理数. 提示: 作为出发点, 你们知道在 0 与 1 之间有一无理数.

   (d) 设 $x<y$. 证明在 x 与 y 之间有一无理数. 提示: 无需任何更多的工作, 由 (b) 和 (c) 就可得出.

*6. 若每一开区间包含实数集 A 的点, 则称该实数集 A 为稠密的. 例如, 第 5 题指出有理数集和无理数集都是稠密的.

   (a) 证明: 若 f 是连续的, 且对于一稠密集合 A 的所有的 x 有 $f(x)=0$, 则对于所有的 x 有 $f(x)=0$.

(b) 证明：若 f 和 g 是连续的，且对于一稠密集合 A 内所有的 x 有 $f(x)=g(x)$，则对于所有的 x 有 $f(x)=g(x)$.

(c) 若将上题的假设改为对于 A 内所有的 x 有 $f(x)\geqslant g(x)$，证明对于所有的 x 有 $f(x)\geqslant g(x)$. $\geqslant$能否全用$>$来代替?

7. 证明：若 f 是连续的，且对于所有的 x 和 y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则有一数 c 对于所有的 x，满足 $f(x)=cx$.（应用前两题的结果容易证明这个结论.）一点信息：对于所有的 x 和 y，的确存在满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的非连续函数 f，但我们现在不能证明这一问题；其实，这个简单的问题包含着任何大学教程中都没有提到的概念. 建议读物中提到这个内容.

*8. 设 f 为满足当 $a<b$ 时 $f(a)\leqslant f(b)$ 的函数(图 6).

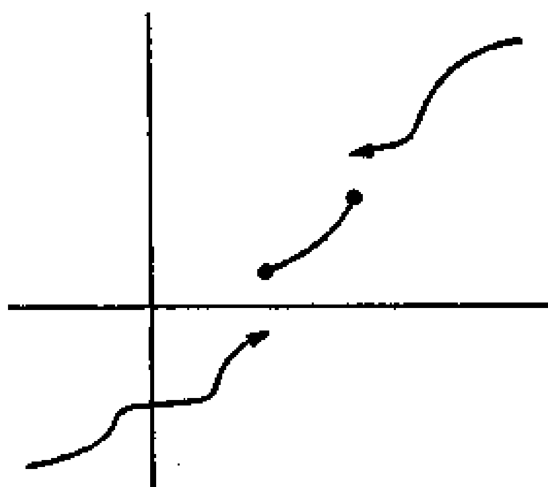


图 6

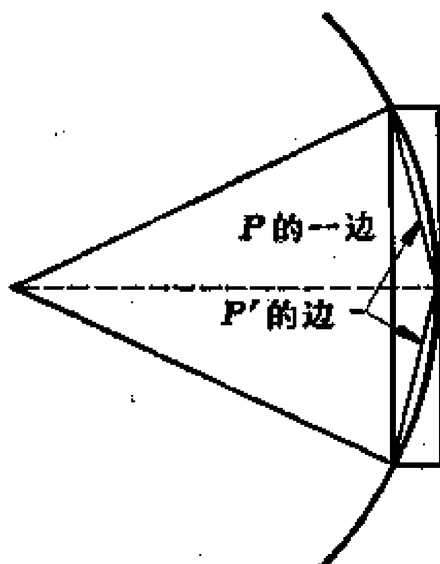


图 7

(a) 证明$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$都存在. 提示：为什么这一题放在本章里?

(b) 证明 f 决不会有可去不连续性(此术语由习题六，16 而来).

(c) 证明：若 f 满足介值定理的结论，则 f 是连续的.

*9. 设 f 在$[0, 1]$上是有界函数，令$|||f|||=\sup\{|f(x)|: x$ 在$[0,1]$内$\}$. 证明它与习题七，14 中的$\|\ \ \|$有类似性质.

10. 设 $a>0$. 证明每一数 x 都能唯一地写成这样的形式 $x=ka+x'$，其中 k 是一整数，而 $0\leqslant x'<a$.

11. (a) 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$是满足 $a_{n+1}\leqslant a_n/2$ 的正数序列. 证明对于任何 $\varepsilon>0$ 有某个 n 满足 $a_n<\varepsilon$.

(b) 设P为内接于一圆的正多边形。若P'为边数多一倍的内接正多边形，证明圆的面积与P'的面积之差小于圆的面积与P的面积之差的一半(应用图7)。

(c) 证明内接于一圆的正多边形的面积可以任意接近于该圆的面积。

为了证明(c)，你要应用(a)。希腊人对此问题是清楚的，他们对比例和面积的全部论述以(a)为基础。用计算多边形面积的方法("穷竭法")可将π算到任意的精确度；阿基米得用它算出$\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$。但它有更大的理论价值。

*(d) 边数相同的两个正多边形的面积之比等于它们边的平方之比。应用这个事实证明两圆面积之比等于它们半径的平方之比。提示：作圆的适当的内接多边形，假设其面积的比大于或小于半径平方的比，由此推出矛盾。

12. 设A和B是数的两个非空集合，并且对于A内所有的x和B内所有的y有$x\leqslant y$。

(a) 证明对于B内所有的y有$\sup A\leqslant y$。

(b) 证明$\sup A\leqslant\inf B$。

13. 设A和B为数的两个非空集合且为上有界，以$A+B$表示所有的数$x+y$的集合，其中x在A内而y在B内。证明$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$。提示：容易证明不等式$\sup(A+B)\leqslant\sup A+\sup B$，为什么？为了证明$\sup A+\sup B\leqslant\sup(A+B)$，只要证明对于所有的$\varepsilon>0$，$\sup A+\sup B\leqslant\sup(A+B)+\varepsilon$；先在$A$和$B$内分别取满足$\sup A-x<\varepsilon/2$和$\sup B-y<\varepsilon/2$的$x$和$y$。

14. (a) 考虑闭区间序列$I_1=[a_1, b_1]$, $I_2=[a_2, b_2]$, …设对于所有的n有$a_n\leqslant a_{n+1}$和$b_{n+1}\leqslant b_n$(图8)。证明有一点x在每个I_n内。



图 8

(b) 说明：若用开区间代替闭区间，则此结论不成立。

第14(a)题的简单结论称为"区间套定理"。它可用来证明定理1和2。在下列两题中扼要提出的论证说明一种一般的方法，称为"对分法"。

*15. 设f在$[a, b]$上连续且$f(a)<0<f(b)$。则或$f((a+b)/2)=0$，或f

在$[a, (a+b)/2]$的端点异号，或f在$[(a+b)/2, b]$的端点异号．为什么？若$f((a+b)/2)\neq 0$，设I_1为这两个区间中f在其上改变符号的那一个．再对分I_1，或f在中点处为零，或f在两个区间中的一个上改变符号，设I_2为这样的一个区间．继续用这个方法对于每个n来定义I_n（除非在某一中点f为0）．用区间套定理求满足$f(x)=0$的一点x．

*16. 假定f在$[a, b]$上连续但在$[a, b]$上是无界的，则f在$[a, (a+b)/2]$或$[(a+b)/2, b]$上是无界的．为什么？设I_1为这两个区间中的一个，在这个区间上f是无界的．和第15题一样进行，推出一个矛盾．

17. (a) 设$A=\{x: x<\alpha\}$．证明下列各题（这些题都是容易的）：

(i) 设x在A内且$y<x$，则y在A内．

(ii) $A\neq\varnothing$．

(iii) $A\neq\mathbf{R}$．

(iv) 设x在A内，则在A内有某数x'满足$x<x'$．

(b) 反之，设A满足(i)－(iv)．证明$A=\{x: x<\sup A\}$．

*18. 若在A内只有有限个y满足$y\geqslant x$，则此数x称为A的**殆上界**．**殆下界**的定义是类似的．

(a) 求第1题中各集合的殆上界和殆下界．

(b) 设A为有界的无穷集．证明A的所有殆上界的集合B是非空的，并且是下有界的．

(c) 由(b)知$\inf B$存在；此数称为A的**上极限**，用$\overline{\lim}\, A$或$\lim\sup A$表示．求第1题中每个集合的$\overline{\lim}\, A$．

(d) 定义$\underline{\lim}\, A$，并对第1题中所有的A求$\underline{\lim}\, A$．

*19. 设A为有界的无穷集，证明

(a) $\underline{\lim}\, A\leqslant\overline{\lim}\, A$．

(b) $\overline{\lim}\, A\leqslant\sup A$．

(c) 设$\overline{\lim}\, A<\sup A$，则$A$包含一最大元．

(d) 对于$\underline{\lim}$，证明与(b)及(c)相类似的命题．

*20. 设f为在$\mathbf{R}$上的连续函数．设有一数$y>x$满足$f(y)>f(x)$，则此点x称为f的**影点**．这个术语的来由如图9所示；平行线是太阳从东边（你面向北方）射来的光线．假设(a, b)内所有的点都是影点，但a和b不是影点．

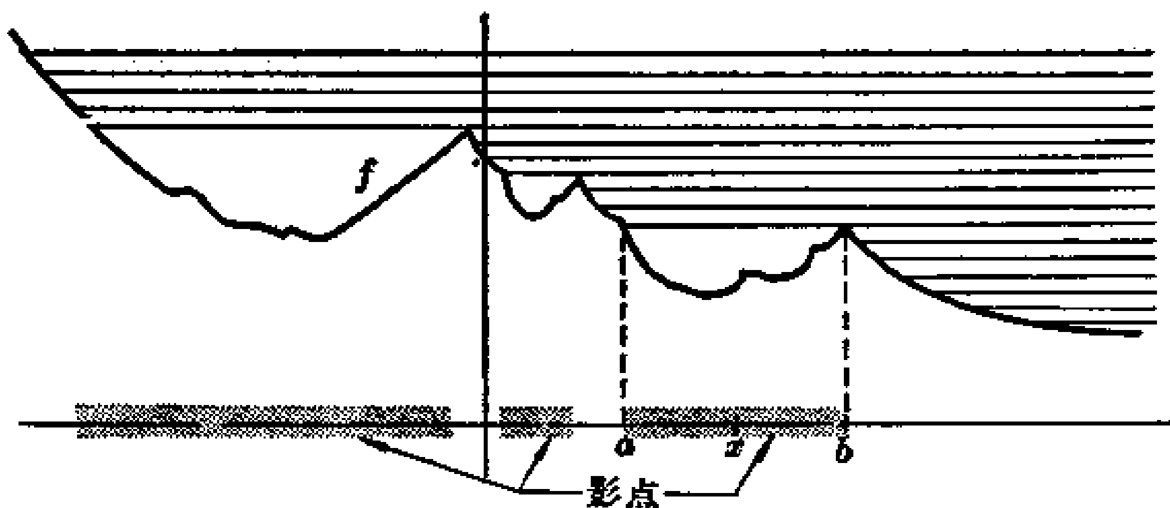


图 9

(a) 对于(a, b)内的x，证明$f(x)\leqslant f(b)$．提示：设$A=\{y: x\leqslant y\leqslant b$且$f(x)\leqslant f(y)\}$．若$\sup A$小于$b$，则$\sup A$将为一影点．由此推出与$b$不是影点这个事实矛盾．

(b) 现在证明$f(a)\leqslant f(b)$．(这是连续性的一个简单推论.)

(c) 最后，用a不是影点的事实证明$f(a)=f(b)$．

这个结论称为朝阳引理．除了能用它来很好地说明最小上界的应用之外，它可用来证明在本书中没有出现的几个绝妙的定理；见第二十章习题第*7 题后面的一段．

选 题 解 答

1. (i) 1 是最大元，最大下界是 0，它不在已知集合内．

   (iii) 1 是最大元，0 是最小元．

   (v) 因$\{x: x^2+x+1\geqslant 0\}=\mathbf{R}$，故无最小上界或最大下界．

   (vii) 因$\{x: x<0$ 和 $x^2+x-1<0\}=([-1-\sqrt{5}]/2, 0)$，故最大下界是$(-1-\sqrt{5})/2$，最小上界是 0；两者都不在已知集合内．

2. (a) 因$A\neq\varnothing$，故有某个x在A内．于是$-x$在$-A$内，故$-A\neq\varnothing$．因A是下有界的，故存在某个y使$y\leqslant x$对A内所有的x成立．于是$-x\leqslant -y$对A内所有的x成立，因此，$z\leqslant -y$对$-A$内所有的z成立，从而$-A$是上有界的．设$\alpha=\sup(-A)$，则α是$-A$的一个上界，因而将此处的推理过程反过来，即知$-\alpha$是A的一个下界．其次，如果β是A的任一个下界，则$-\beta$是$-A$的任一个上界，于是

$-\beta \geqslant \alpha$，从而 $\beta \leqslant -\alpha$. 这样，$-\alpha$ 是 A 的最大下界.

5. (a) 设 l 为满足 $l \leqslant x$ 的最大整数，则 $l+1>x$，但 $l+1 \leqslant x+1<y$. 因此我们可设 $k=l+1$.（证明这样一个最大整数 l 存在：因为 N 没有上界，故有某个自然数 n 满足 $-n<x<n$. 从而只有有限个整数 l 满足 $-n \leqslant l \leqslant x$. 可取其最大者.）

   (b) 因 $y-x>0$，故有某一自然数 n 满足 $1/n<y-x$. 因 $ny-nx>1$，于是由(a)可知，有一整数 k 满足 $nx<k<ny$，这意味着 $x<k/n<y$.

   (c) 取 $r+\sqrt{2}(s-r)/2$.

   (d) 根据(b)，有一有理数 r 满足 $x<r<y$，因此有一有理数 s 满足 $x<r<s<y$. 将(c)应用于 $r<s$.

10. 设 k 为 $\leqslant x/\alpha$ 的最大整数（由第 5 题的题解知这样的 k 存在），并设 $x'=x-k\alpha \geqslant 0$. 若 $x-k\alpha=x' \geqslant \alpha$，则 $x \geqslant (k+1)\alpha$，故 $k+1 \leqslant x/\alpha$，与 k 的选法相矛盾. 故 $0 \leqslant x'<\alpha$.

12. (a) 因为对于 A 内所有的 x，B 内的任何 y 满足 $y \geqslant x$，B 内的任意 y 是 A 的一个上界，故 $y \geqslant \sup A$.

    (b) 由(a)知 $\sup A$ 是 B 的一个下界，故 $\sup A \leqslant \inf B$.

13. 因为对于 A 内每个 x 和 B 内每个 y 有 $x \leqslant \sup A$ 和 $y \leqslant \sup B$，由此得 $x+y \leqslant \sup A+\sup B$. 于是 $\sup A+\sup B$ 是 $A+B$ 的一个上界，故 $\sup(A+B) \leqslant \sup A+\sup B$. 若 x 和 y 各在 A 和 B 内选取，使 $\sup A-x<\varepsilon/2$ 和 $\sup B-y<\varepsilon/2$，则 $\sup A+\sup B-(x+y)<\varepsilon$. 因此

$$\sup(A+B) \geqslant x+y>\sup A+\sup B-\varepsilon.$$

第三部分　导数与积分

1604年，在伽利略学术生涯鼎盛时期，他认为直线运动速度与经过的距离成比例，其运动规律恰好为 $x=ct^2$，这是他研究落体时发现的．在1695年至1700年间莱比锡发行的 Acta Eruditorum 月刊中，没有一期没有莱布尼兹、伯努利兄弟或罗必塔侯爵的文章，这些文章论述了微分学、积分学和变分法的许多问题，他们所用的记号和我们现在所用的没有多大差别．这样，在大约一世纪的时间里，无穷小演算或我们现在所称的微积分学——这个卓越的计算工具已稳步发展起来；在近三个世纪的经常应用中，也丝毫没有磨灭这个无与伦比工具的犀利锋芒．

尼古拉斯·布巴吉

第九章 导 数

函数的导数是这一部分两个主要概念中的头一个，它同积分一起成为微积分学独特风韵的源泉. 的确，函数概念是基本的；没有极限和连续性，后面就进行不下去；而最小上界是必不可少的. 至此我们所作的一切，已为真正令人兴奋的概念——成为微积分学特征的很有用的概念的到来作好准备. 只要准备充分，这一部分将比前几章容易.

或许（有人会说“当然”）对这一部分所述的概念的兴趣是因数学概念和某些物理概念有密切联系而引起的. 许多定义甚至某些定理可用物理问题来叙述，通常用启发的方式. 事实上，微积分学的这些基本概念最初是因物理的需要而产生的. 我们将经常提及物理的解释. 但我们总是先用精确的数学形式来定义这些概念，并用数学问题来论述其意义.

由于函数的多样性，以致几乎无法找到属于所有函数的任何感兴趣的一般性质. 连续函数是较有规则的一类，我们可以期望找到某些有关的重要定理，第六章之后迅速出现的许多定理说明这种期望是有根据的. 但只有当我们将注意力集中于“合理”的函数（它比大多数连续函数更规则）时，才能得到关于函数的最感兴趣和最有用的结果.

图 1 表示连续函数可能出现的某些不规则形式. 这些函数的图形在点(0, 0)是“曲折”的，不象图 2 的曲线那样在每一点都能绘出一条“切线”. 这里用引号的目的，是为了使我们不至于以为已对“曲折”或“切线”下过定义，尽管我们知道，在无法绘出“切线”之点，图形可能“曲折”. 你也许已经注意到，不能将切线定义为与图

形只相交一次的直线——这样的定义限制得既太紧同时又太松．照此定义，图 3 所示的直线就不是图示曲线的切线，而抛物线在每

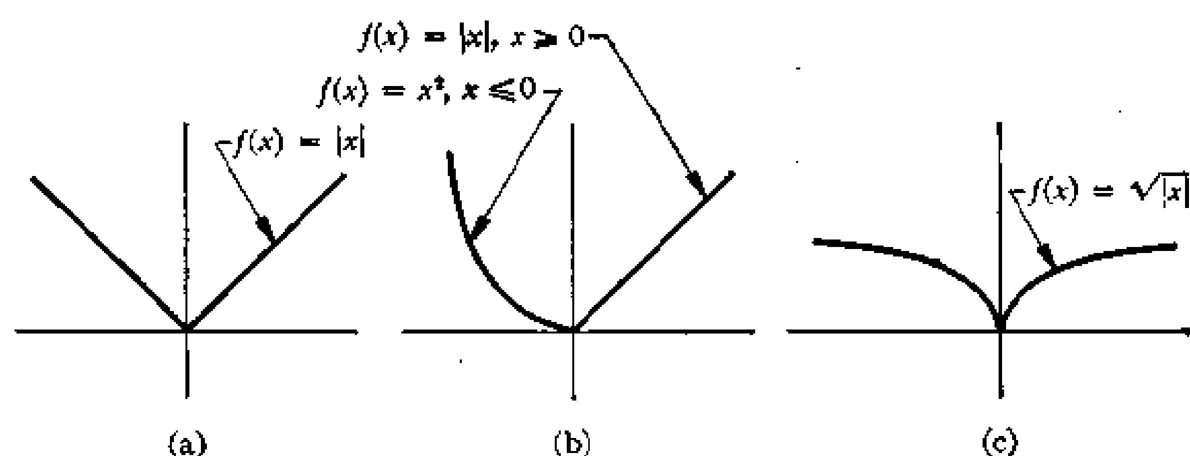


图 1

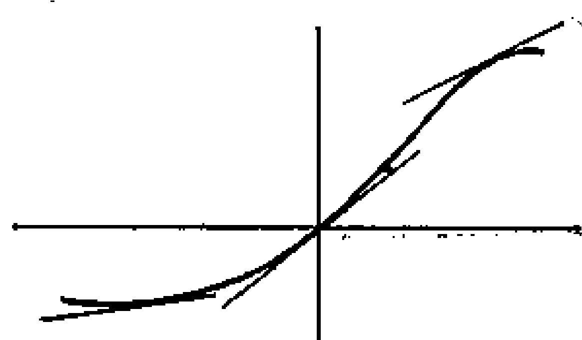


图 2

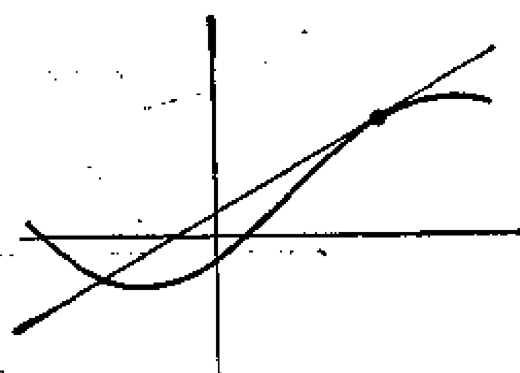


图 3

一点却都有两条切线（图 4），而图 5 所示的三个函数在“曲折”点将有不止一条切线．

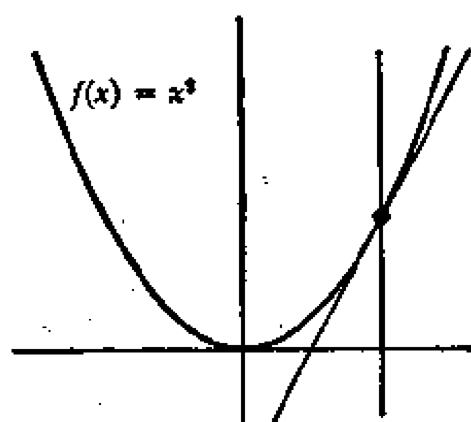


图 4

定义切线的可行途径是从“割线”开始，并应用极限概念．如图 6 所示，设 $h\neq 0$，则不同的两点 $(a, f(a))$ 和 $(a+h, f(a+h))$ 确定一条直线，其斜率为

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

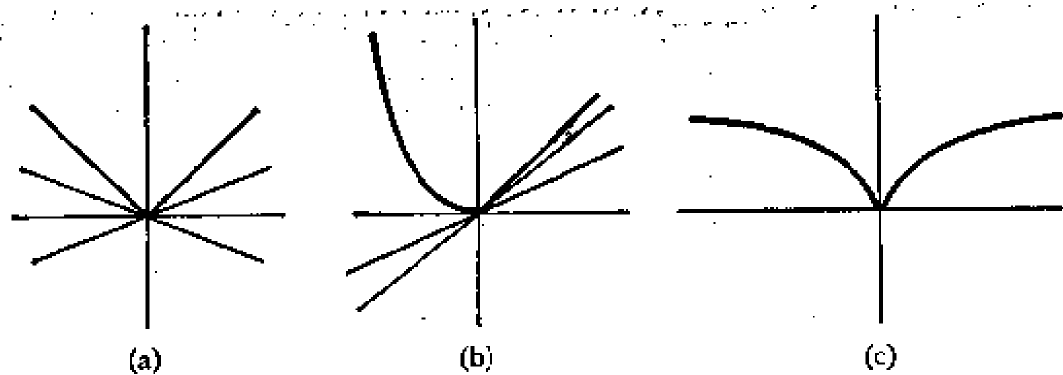


图 5

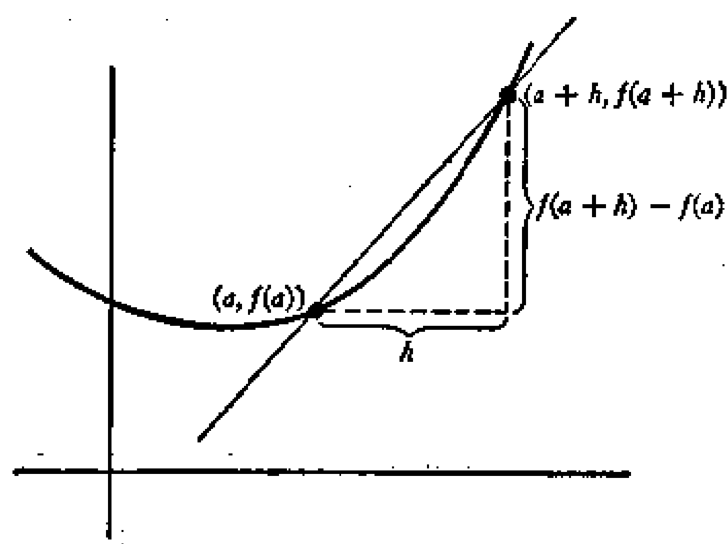


图 6

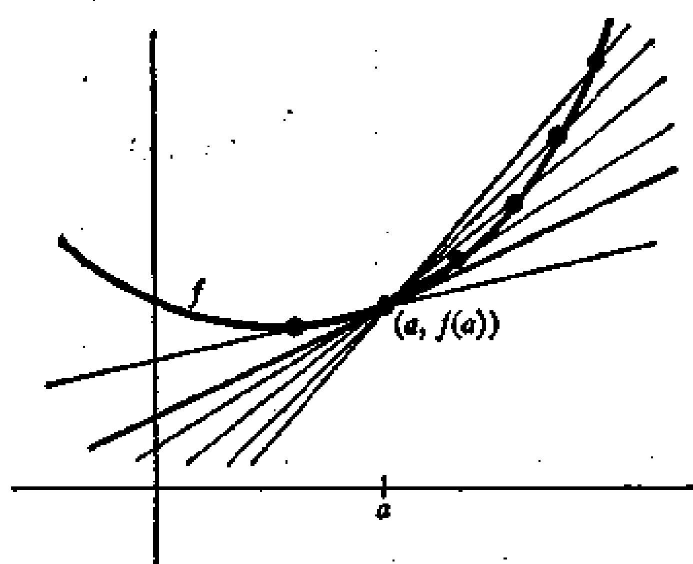


图 7

如图 7 所示，在点$(a,f(a))$的"切线"，在某种意义上说，好象是这些"割线"当 h 趋近 0 时的极限. 以前我们从未讲过直线的"极限"，但我们可以说它们斜率的极限：通过点$(a,f(a))$的切线斜率为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

我们现在可以下定义，并作一些说明.

定义

> 设
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> 存在，则称函数 f **在点 a 是可微的**. 这个极限用 $f'(a)$表示，并称之为 **f 在点 a 的导数**.（我们还说：对于 f 的定义域内每一点 a，若 f 都是可微的，则称 f 是可微的.）

对我们定义所作的头一个说明实际上是一个补充. 我们将 f 的图形在点 $(a,f(a))$ 的切线定义为通过点 $(a,f(a))$，且斜率为 $f'(a)$ 的直线. 这意味着只有当 f 在点 a 可微时在点 $(a,f(a))$ 的切线才能确定.

第二个是关于记号的说明. 符号 $f'(a)$ 当然会使人联想到函数的记号. 事实上，对于任何函数 f，我们用 f' 表示这样的函数：它的定义域是使 f 在点 a 是可微的所有数 a 的集合，并且它在这样的点 a 处的值为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

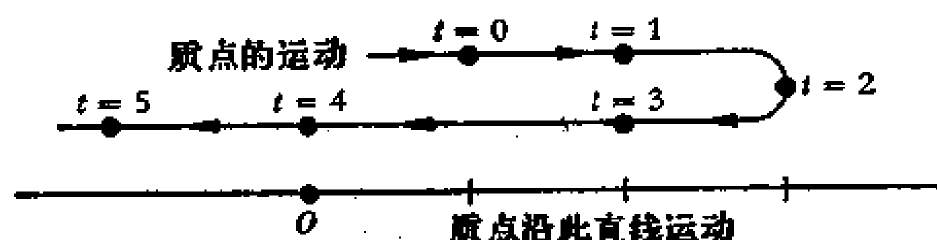
（十分精确地说：f' 是所有数偶

$$\left(a,\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

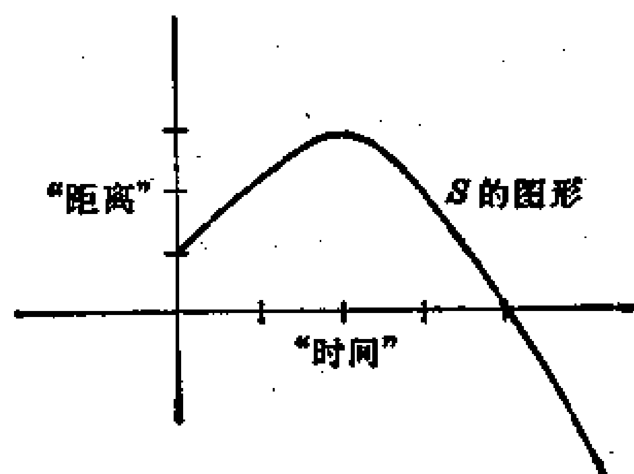
的集合，其中 $\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$ 存在.）函数 f' 称为 f 的

导数.

第三个说明，比头两个稍微长些，是关于导数的物理解释. 考虑沿直线运动的质点(图 8(a))，在该直线上我们选一"原点"O和一个方向，使沿这一方向的点至O的距离为正数，而在另一方向的点至O的距离为负数. 以$s(t)$表示质点在时刻t至O的距离. 这个有启发性的符号$s(t)$是特意选择的，因为距离$s(t)$是由每一数t确定的，物理问题自动确定某一函数s. s的图形是用时间(在水平轴上)来表示质点至O的距离(在直立轴上)(图 8(b)).



(a)



(b)

图 8

商
$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$
有一个很自然的物理解释. 它是在a到$a+h$的时间区间内质点的"平均速度". 对于任何特定的a，这个平均速率当然依h而定. 另一方面，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

只取决于 a(以及特定的函数 s)，考虑这个极限是有重要的物理原因的. 虽然我们喜欢说"质点在时刻 a 的速度"，但通常速度的定义实际上是平均速度的定义. "在时刻 a 的速度"（所谓"瞬时速度"）唯一合理的定义是这样的极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}.$$

于是我们将质点在 a 的(瞬时)速度定义为 $s'(a)$. 注意 $s'(a)$很可能为负；绝对值$|s(a)|$有时称为(瞬时)速率.

瞬时速度是一理论概念，一个抽象概念，它与任何观测得出的量都不同，领会这一点是重要的. 然而，认为瞬时速度与平均速度无关也是不对的，记住 $s'(t)$不等于当 h 为任何特定值时的

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h},$$

而是当 h 趋近 0 时这些平均速度的极限. 这样，当物理上测量速度时，物理学家实际测得的速度是在某一(非常小的)时间区间内的平均速度. 这样的过程虽然不能得出精确答案，但确实不能算是缺陷，因为任何一种的物理测量都不可能精确.

质点的速度通常称为"位置变化率". 导数的概念作为一个变化率，也可用于有某个量随时间而变的其他任何物理问题中. 例如，一个增长着的物体的"质量变化率"表示函数 m 的导数，其中 $m(t)$是在时刻 t 的质量.

为了熟悉本章的基本定义，我们将花一些时间来研究一些特殊函数的导数. 在证明第十一章重要的理论结果之前，我们希望对函数导数的形象有一个清晰概念. 下一章专论函数导数的一个方面——计算复杂函数的导数. 本章将通过一些简单例子来着重说明导数的概念，而不注重计算. 所有例子中最简单的是常值函数

$f(x)=c$. 在此情形中

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=0.$$

于是对于每一数 a, f 在 a 是可微的,并且 $f'(a)=0$. 这说明 f 图形切线的斜率恒等于 0,因此其切线总与 f 图形相重合.

并非只有常值函数的图形才与其切线相重合——任何线性函数 $f(x)=cx+d$ 都有这种情况. 事实上

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{c(a+h)+d-[ca+d]}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{ch}{h}=c,\end{aligned}$$

切线的斜率为 c, 与 f 图形的斜率相同.

$f(x)=x^2$ 的情况就大不相同. 这时

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\&=\lim_{h\to0}(2a+h)\\&=2a.\end{aligned}$$

f 图形的一些切线如图 9 所示. 在该图中每条切线与 f 的图形似乎都只相交一次,这个事实很容易验证:因为通过点 (a,a^2) 的切线的斜率为 $2a$, 该切线是下列函数

$$g(x)=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$$

的图形. 现在设 f 和 g 的图形相交于一点 $(x,f(x))=(x,g(x))$, 则

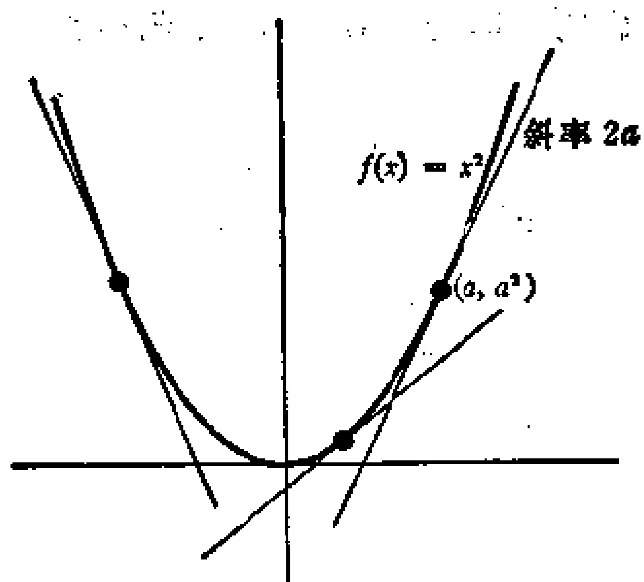


图 9

$$x^2 = 2ax - a^2$$

或

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0;$$

于是

$$(x-a)^2 = 0$$

或

$$x = a.$$

换句话说，(a, a^2)是唯一的交点.

就这一点来说，函数 $f(x)=x^2$ 恰巧是很特殊的. 通常一条切线与图形不只相交一次. 例如，考虑函数 $f(x)=x^3$，在此情形中

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2) \\
&= 3a^2.
\end{aligned}$$

这样，f 图形在点(a, a^3)的切线的斜率为 $3a^2$. 这说明切线是

$$g(x)=3a^2(x-a)+a^3=3a^2x-2a^3$$

的图形.

当
$$x^3=3a^2x-2a^3$$
或
$$x^3-3a^2x+2a^3=0$$
时，f 和 g 的图形相交于点$(x,f(x))=(x,g(x))$. 这个方程容易解出：只要记住其中一个解必定是 $x=a$，于是 $x-a$ 是该方程左边的一个因子，另一因子可用除法求出. 我们得
$$(x-a)(x^2+ax-2a^2)=0,$$
$x^2+ax-2a^2$ 又含有 $x-a$ 这一因子，我们最后得
$$(x-a)(x-a)(x+2a)=0.$$
于是，如图10所示，经过点(a,a^3)的切线与图形还相交于点$(-2a,-8a^3)$. 除非 $a=0$，这样的两点总是不同的.

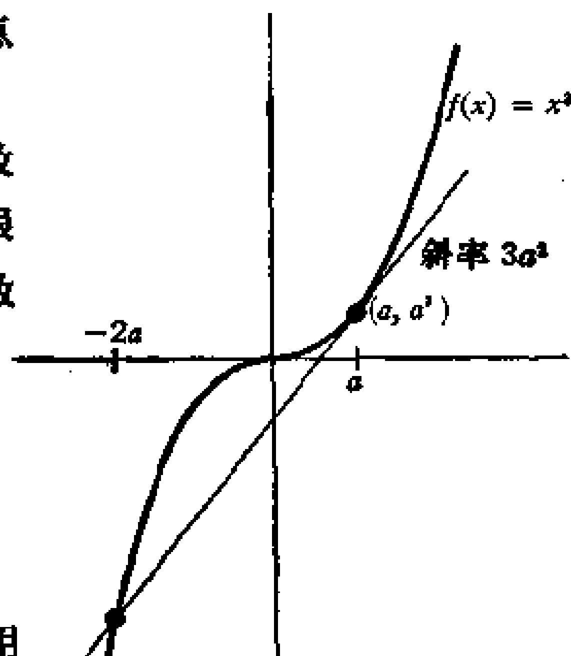


图 10

我们已经准备了够多的函数导数，可用以说明古典的且仍很常用的导数记号. 对于已知函数 f，其导数 f' 通常表示为
$$\frac{df(x)}{dx}.$$
例如，记号
$$\frac{dx^2}{dx}$$
表示函数$f(x)=x^2$ 的导数. 不用说，不能将下列符号
$$\frac{df(x)}{dx}$$
的各部分看成为独立存在的—— d 不是数，不能相约，并且整个记号不是另外两数“$df(x)$”和“dx”的商. 这个记号属于莱布尼兹(通常认为他和牛顿同为微积分的独立发现者)，并被称为莱布尼

兹记号*. 记号 $df(x)/dx$ 好象很复杂,但实际上是较简短的. 事实上,这个记号 dx^2/dx 毕竟比短语"函数 $f(x)=x^2$ 的导数"简洁.

将我们迄今所求得的导数用标准的莱布尼兹记号表示如下:

$$\frac{dc}{dx}=0,$$

$$\frac{d(ax+b)}{dx}=a,$$

$$\frac{dx^2}{dx}=2x,$$

$$\frac{dx^3}{dx}=3x^2.$$

虽然这些公式的含意是够清楚的, 但对这些公式作字面上的解释就有困难了, 因为一个等式不能一边代表一个函数而另一边代表一个数. 例如, 如果第三个等式成立, 那么或者 $df(x)/dx$ 一定表示 $f'(x)$ 而不是 f', 或者反过来, $2x$ 一定不表示一个数而表示其在点 x 的函数值为 $2x$ 的函数. 的确不可能断定它是指其中的哪一个. 实际上 $df(x)/dx$ 有时表示 f', 有时表示 $f'(x)$, 而 $2x$ 可以表示一个数或表示一个函数. 因为有此不明确之处, 所以许多作者勉强用

$$\frac{df(x)}{dx}(a)$$

来表示 $f'(a)$; 通常用通俗但不含糊的记号

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

---

* 莱布尼兹根据他对导数的直观想法引出这个记号, 他不是将导数看成为商 $[f(x+h)-f(x)]/h$ 的极限, 而是看成为当 h 是一"无穷小"数时这个商的"值". 这个"无穷小"量用 dx 表示, 而相应的"无穷小"差 $f(x+dx)-f(x)$ 用 $df(x)$ 表示. 虽然这种观点不可能与实数的性质(P1)-(P13)相一致, 但有人觉得对导数的这种见解是适宜的.

来代替 $f'(a)$. 除了这些困难之外,莱布尼兹记号还有一个更不明确的地方. 虽然记号 dx^2/dx 是绝对标准的, 但记号 $df(x)/dx$ 却常用 df/dx 代替. 这当然是与将函数和它在点 x 的函数值混杂一起的习惯分不开的. 由于这种习惯已很深固, 所以为了指明函数往往要附加诸如这样一句:"考虑函数 $y=x^2$." 我们有时按古典的习惯, 用 y 作为函数的名称, 但还是要注意将函数与函数值区分开来——我们总是要加上诸如"考虑由 $y(x)=x^2$ 定义的函数"一语.

尽管莱布尼兹记号有许多不明确之处, 但在较老的数学著作中几乎专用这个记号, 并且现在仍很常用. 最坚决反对莱布尼兹记号的人也承认在相当长的一段时间里仍将沿用这个记号; 而喜欢这个记号的人就说它要一直用下去, 并且也是一件好事! 总之, 不会完全不用莱布尼兹记号.

本书采用的办法是, 在正文中不用莱布尼兹记号, 但在习题中有这个记号; 某些章特意选些习题(一下子就可看出的), 用来说明莱布尼兹记号的巧妙想法. 希望通过这些习题能熟练一下这个记号. 我们回到我们的基本任务上来——研究某些简单导数的例子.

迄今所研究的一些函数都是可微的. 为了充分了解导数的意义, 知道一些不可微函数的例子, 是同样重要的. 可供选择的明显例子是在本章开头所讨论的如图 1 所示的三个函数, 如果它们在点0 也成了可微的, 显然在某些地方弄错了.

首先考虑 $f(x)=|x|$, 在此情形中

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}.$$

现在当 $h>0$ 时 $|h|/h=1$, 而当 $h<0$ 时 $|h|/h=-1$. 这说明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

不存在. 事实上,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1$$

和 $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-1.$$

(这两个极限有时分别称为 f 在点 0 的右导数和左导数.)

设 $a\neq 0$, 则 $f'(a)$ 的确存在. 事实上

若 $x>0$, 则 $f'(x)=1$,

若 $x<0$, 则 $f'(x)=-1$.

这个事实留给你们来证明(如果你记住线性函数的导数, 就很容易). f 及 f' 的图形如图 11 所示.

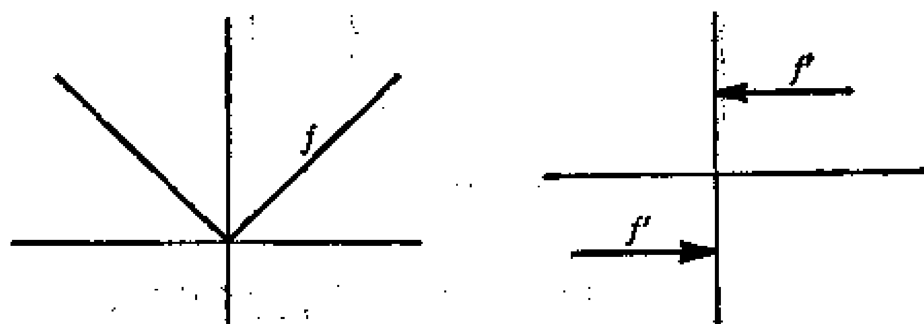


图 11

对于函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

麻烦同样在 $f'(0)$. 我们有

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases}\dfrac{h^2}{h}=h, & h<0\\[2ex] \dfrac{h}{h}=1, & h>0.\end{cases}$$

因此 $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0,$$

但 $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1,$$

故 $f'(0)$ 不存在; f 在点 0 不可微. 不过, 当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)$ 却又

存在．容易看出

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 1\ , & x>0.\end{cases}$$

f 和 f' 的图形如图 12 所示．

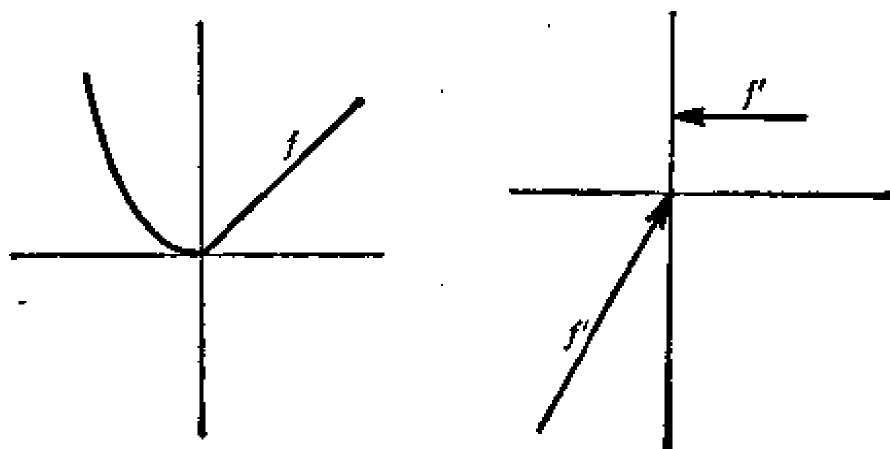


图 12

$f(x)=\sqrt{|x|}$出现更讨厌的情况．对于这个函数，

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}, & h>0\\ \dfrac{\sqrt{-h}}{h}=-\dfrac{1}{\sqrt{-h}}, & h<0\end{cases}$$

这时右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}$$

不存在；当 h 趋近 0 时 $1/\sqrt{h}$ 可任意增大，并且 $-1/\sqrt{-h}$的绝对值任意增大，但是负的（图 13）．

函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 虽然在点 0 不可微，但至少比上一例稍微规则些．当 h 趋近 0 时，商

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\frac{h^{1/3}}{h}=\frac{1}{h^{2/3}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2}$$

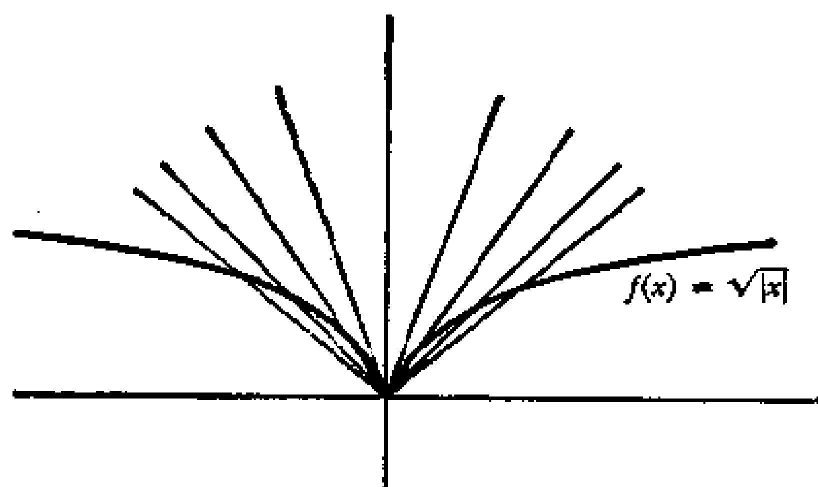


图 13

只是任意增大. 我们有时说 f 在点 0 有一个"无穷大"导数, 其几何意义是 f 图形的"切线"与直立轴平行(图 14). 当然, $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ 有同样的几何特性, 只是我们应说 f 在点 0 有一个"负无穷大"导数.

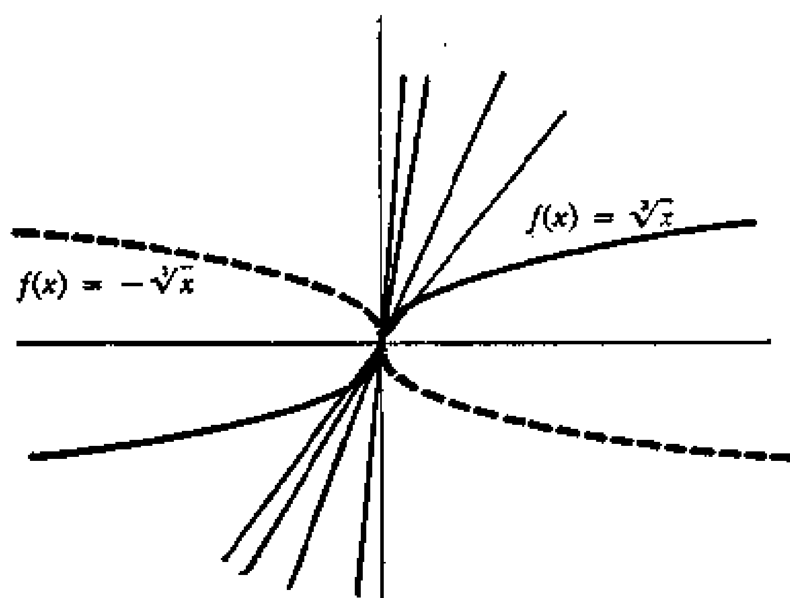


图 14

记得我们假定可微是对单纯连续的一个改进, 有许多连续但不可微的函数的例子能证实这种想法. 然而还有一个重要的问题需特别指出:

定理 1 如果 f 在点 a 是可微的, 则 f 在点 a 是连续的.

证明 $\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=f'(a)\cdot 0=0.$$

正如我们在第五章中所指出的，等式$\lim_{h\to 0}f(a+h)-f(a)=0$相当于$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$；因此，$f$ 在点 a 是连续的. ▮

记住定理 1 很重要，而且记住其逆不真也一样重要．可微函数是连续的，但连续函数未必是可微的（记住函数 $f(x)=|x|$，你就决不会忘记哪一种说法成立，哪一种不成立）.

虽然迄今所考虑的连续函数在所有地方（至多只在一点例外）都是可微的，但容易举出连续函数在几点甚至在无穷多个点不可微的例子（图 15）．实际上，我们能举出比这更坏的例子．有这样

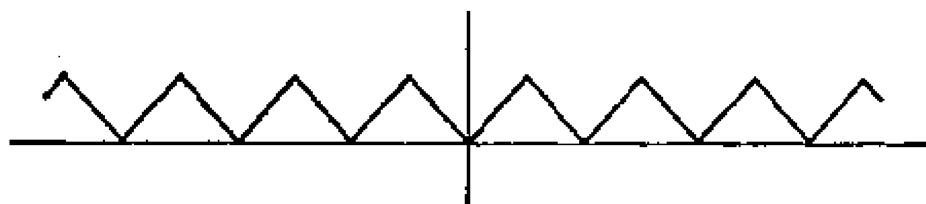


图 15

一个函数，它处处连续且处处不可微！遗憾的是，这样函数的定义在第二十三章之前我们不可能得到，并且我无法说服画家绘出它的图形（仔细想想看这个图形象什么样子，你就会和他有同感）．然而，我们能够绘出该图的粗略的近似形状；几个逐步接近的图形如图 16 所示.

虽然这样惊人的不可微的例子须待以后再讲，但我们只要稍微动点脑筋就能找出一个在[0, 1]内的无穷多个点不可微的连续函数．一个这样的函数如图 17 所示．读者已练习过精确地定义这类函数；它由下列函数的图形改直而成：

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

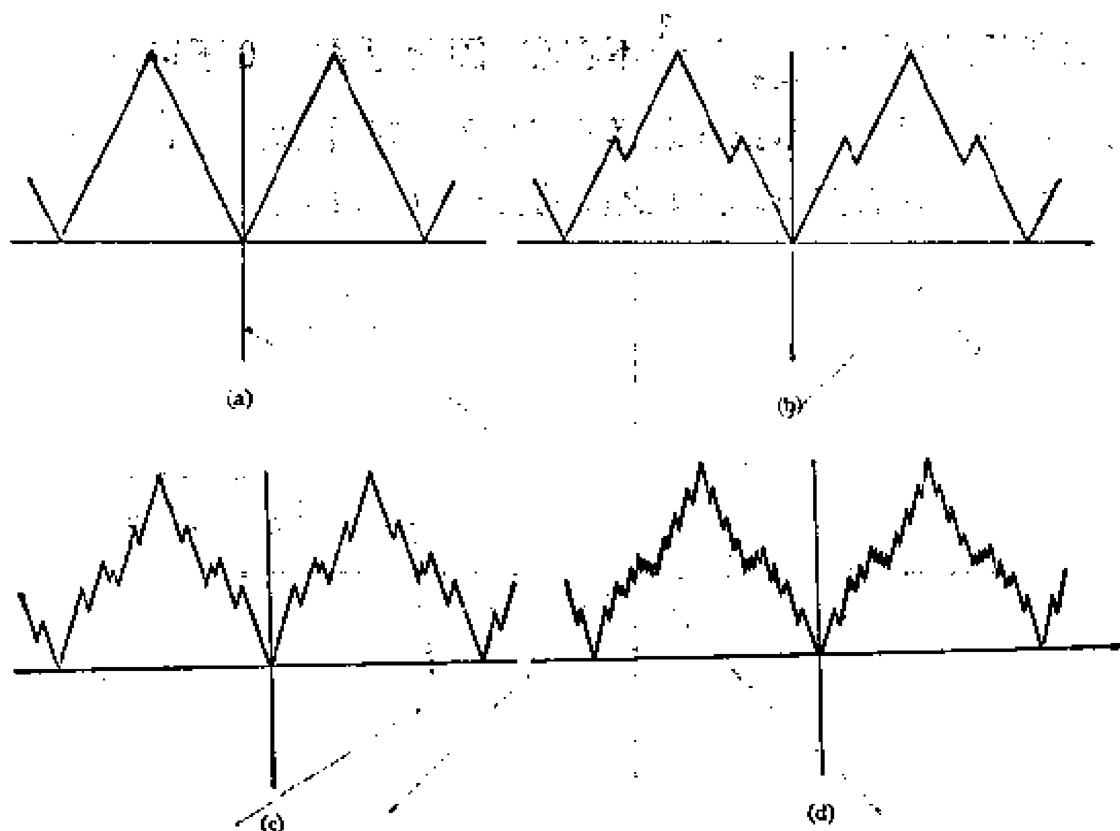


图 16

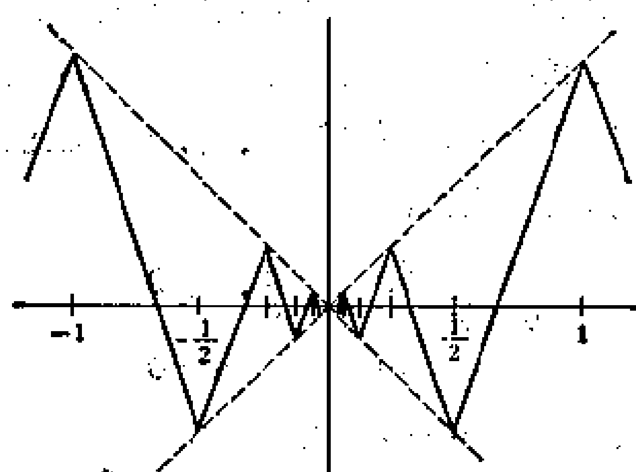


图 17

这个特殊函数 f 本身对可微性问题很敏感. 事实上，对于 $h\neq 0$，我们有

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\sin\frac{1}{h},$$

我们老早已经证明$\lim\limits_{h\to 0}\sin\dfrac{1}{h}$不存在，因此，$f$在点0不可微．从几何上看，我们知道：不论$h$怎样小，通过图18中$(0,0)$和$(h,\ f(h))$两点的割线具有在$-1$和1之间的任何斜率，因此，切线不存在．

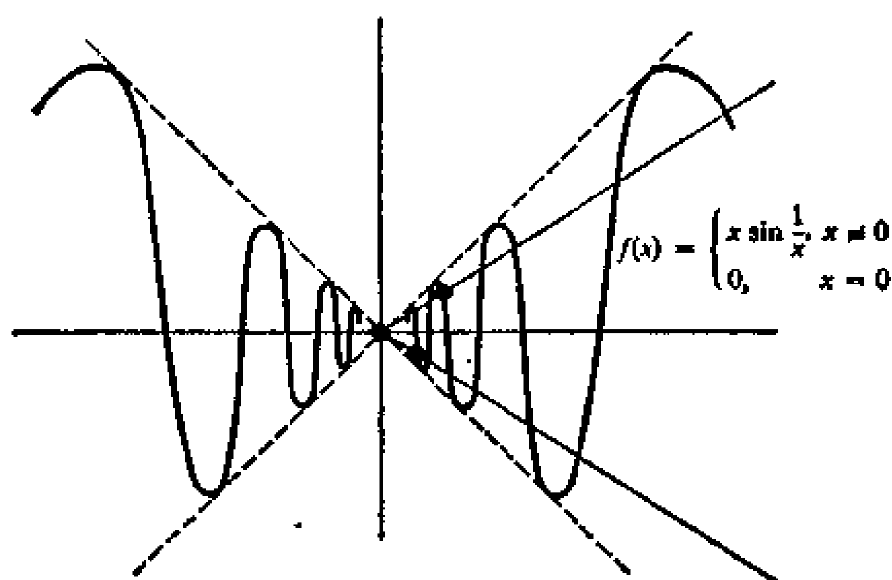


图 18

这个发现表示取得某些成功，函数f虽然连续，但不知为啥总象是很不合理．现在我们能说明这个函数的一个在数学上所不希望有的特性——它在点0是不可微的．然而，我们不要只满足于可微性这个判断标准．例如，函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点0是可微的．事实上$g'(0)=0$：

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{h}}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}\\ &=0.\end{aligned}$$

因而g图形在点$(0,0)$的切线是水平轴(图19)．

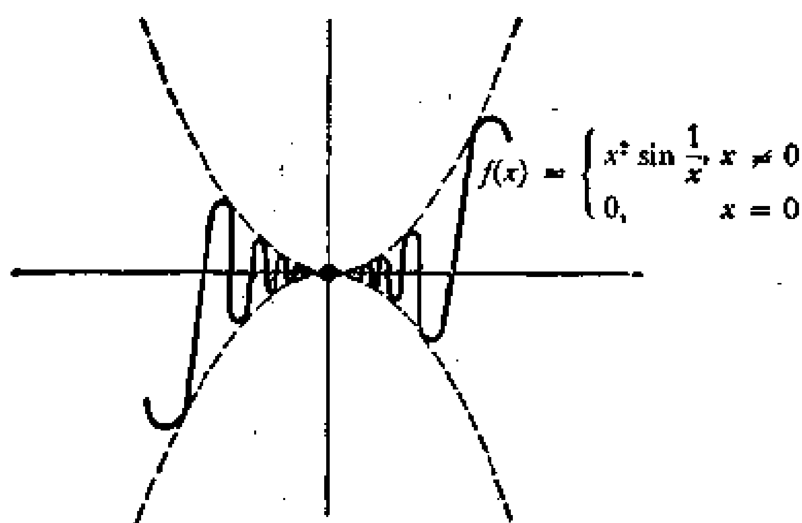


图 19

该例提醒我们，对函数必须找出甚至比可微性更多的限制条件．在本章末尾引入另一些定义，我们就能用导数表述这些条件．

对于任何函数 f，取其导数，我们得一新函数 f'(它的定义域可以远小于 f 的定义域)．可微性概念当然可应用于函数 f'，得到另外函数 $(f')'$，它的定义域是由使 f' 在 a 可微的所有点 a 组成的．函数$(f')'$通常简写成 f''，并称之为 f 的**二阶导数**．如果 $f''(a)$ 存在，则称 f 为在点 a 是二次可微的，而数 $f''(a)$称为 **f 在点 a 的二阶导数**．

在物理学中，二阶导数特别重要．设 $s(t)$为沿直线运动的质点在时刻 t 的位置，则 $s''(t)$称为在时刻 t 的**加速度**．在物理学中加速度起特别重要的作用，因如牛顿的运动定律所述，作用于质点上的力等于其质量和加速度的乘积．因而当你坐在一辆加速的车内时，就会意识到二阶导数．

没有理由停止在二阶导数上——我们可以定义 $f'''=(f'')'$，$f''''=(f''')'$，等等．这样记法很快就会变得不便于使用，因此经常采用下列的简写法(它实际上是递推定义)：

$$f^{(1)}=f',$$
$$f^{(k+1)}=(f^{(k)})'.$$

于是

$$f^{(1)}=f',$$
$$f^{(2)}=f''=(f')',$$
$$f^{(3)}=f'''=(f'')',$$
$$f^{(4)}=f''''=(f''')',$$

等等，

对于 $k\geqslant 2$ 的各种函数 $f^{(k)}$ 有时称为 f 的**高阶导数**.

通常只有当 $k\geqslant 4$ 时才用记号 $f^{(k)}$，但当 k 较小时，用 $f^{(k)}$ 也很方便．事实上，可对 $f^{(0)}$ 下一个合理的定义，即

$$f^{(0)}=f.$$

还要提一下高阶导数的莱布尼兹记号．对于 $f''(x)$，莱布尼兹记号自然是

$$\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx},$$

可简写为
$$\frac{d^2f(x)}{(dx)^2},$$

或更经常写成
$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

对于 $f^{(n)}(x)$ 可用类似的记号.

下例说明记号 $f^{(k)}$，并通过一个非常简单的情形说明各高阶导数与原函数的关系．设 $f(x)=x^2$．那么，我们曾经验证过

$$f'(x)=2x,$$
$$f''(x)=2,$$
$$f'''(x)=0,$$
$$f^{(k)}(x)=0,\text{ 当 } k\geqslant 3 \text{ 时}.$$

图 20 表示函数 f 和它的各阶导数.

下列函数是一个更有启发性的例子，其图形如图 21(a)所示：

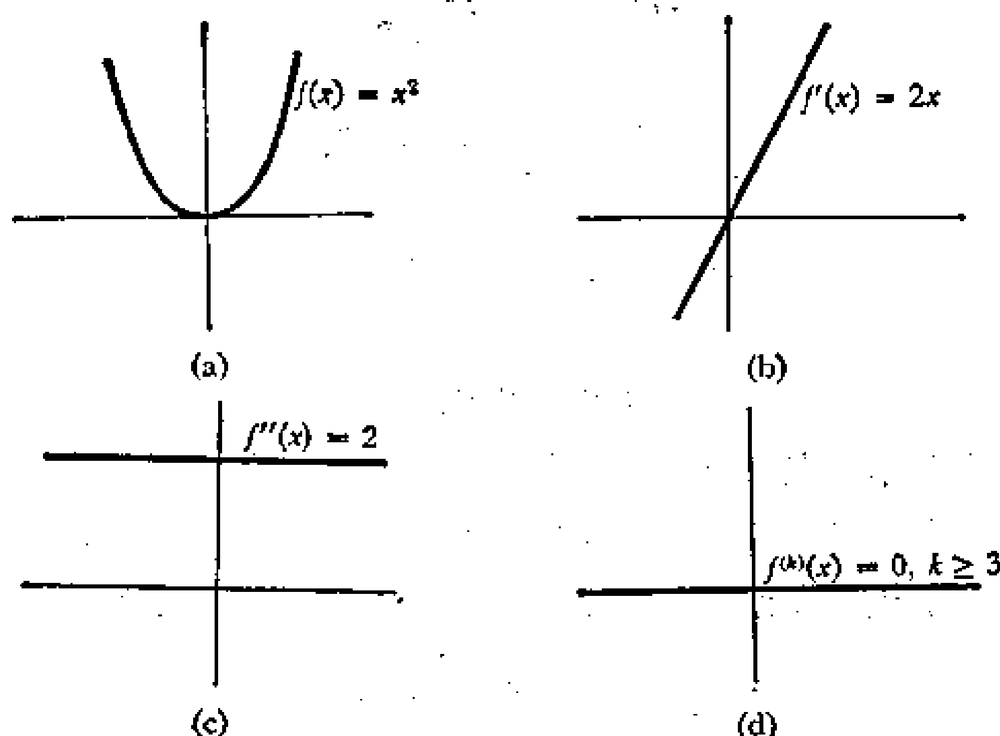


图 20

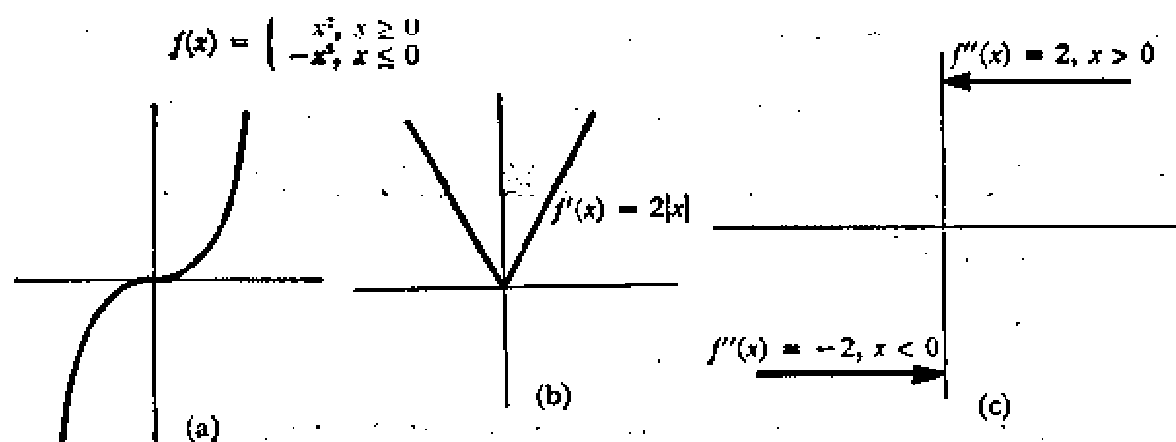


图 21

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

容易看出 $\qquad f'(a)=2a,\quad$ 当 $a>0$ 时，

$$f'(a)=-2a,\quad \text{当 } a<0 \text{ 时.}$$

并且

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}.$$

现在 $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=0$$

和 $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2}{h}=0,$$

于是 $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

上述内容可概括如下：

$$f'(x)=2|x|.$$

可见 $f''(0)$ 不存在！于是二阶导数的存在是一个函数必须满足的更强的判断标准。甚至象 f 那样"好象光滑"的函数，当用二阶导数来检查时，也呈现出某种不规则性. 这例提醒我们，对于下列函数

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的不规则性也可用二阶导数把它揭示出来. 这时我们知道 $g'(0)=0$，但对于任意的 $a\neq 0$，我们不知道 $g'(a)$ 等于多少，因此无从着手计算 $g''(0)$。在我们完全掌握求导数的技巧之后，将在下章末尾再回到这个问题上来.

习　题

1. (a) 直接用定义证明：如果 $f(x)=1/x$，则对于 $a\neq 0$ 有
$$f'(a)=-1/a^2.$$
   (b) 证明 f 的图形在点 $(a,1/a)$ 的切线，除了在点 $(a,1/a)$ 之外，不与 f 的图形相交.
2. (a) 如果 $f(x)=1/x^2$，证明当 $a\neq 0$ 时 $f'(a)=-2/a^3$.
   (b) 证明 f 在点 $(a,1/a^2)$ 的切线与 f 相交于另一点，这一点位于直立轴的另一边.
3. 如果 $f(x)=\sqrt{x}$，证明当 $a>0$ 时 $f'(a)=1/2\sqrt{a}$.（你所得到的关于 $[f(a+h)-f(a)]/h$ 的式子，将需某些代数方面的演化，但在解答中已提出了适当的技巧.）

4. 对于每个自然数 n, 设 $S_n(x)=x^n$. 记得 $S_1'(x)=1$, $S_2'(x)=2x$ 和 $S_3'(x)=3x^2$, 推测 $S_n'(x)$ 的公式. 证明你的推测. (式 $(x+h)^n$ 可用二项式定理展开.)
5. 设 $f(x)=[x]$, 求 f'.
6. 由定义出发证明(并作图说明):
   (a) 如果 $g(x)=f(x)+c$, 则 $g'(x)=f'(x)$;
   (b) 如果 $g(x)=cf(x)$, 则 $g'(x)=cf'(x)$.
7. 如果 $f(x)=x^3$.
   (a) $f'(9)$, $f'(25)$, $f'(36)$ 等于多少?
   (b) $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$ 等于多少?
   (c) $f'(a^2)$, $f'(x^2)$ 等于多少?
   如果你不觉得本题无聊, 你就是未领会一个要点: $f'(x^2)$ 表示 f 在我们恰好称之为 x^2 这一点的导数, 不是函数 $g(x)=f(x^2)$ 在点 x 的导数. 下面一题正是为了帮助你理解这一要点:
   (d) 对于 $f(x)=x^3$, 比较 $f'(x^2)$ 和 $g'(x)$, 其中 $g(x)=f(x^2)$.
8. (a) 假设 $g(x)=f(x+c)$. (从定义出发)证明 $g'(x)=f'(x+c)$. 并绘图说明. 证明本题时你必须正确写出 $g'(x)$ 和 $f'(x+c)$ 的定义. 第 7 题的目的是为了使你相信这一题虽然容易, 但不是完全没有价值的, 有一点需要证明: 你不能在等式 $g(x)=f(x+a)$ 中简单地加上撇号. 为了强调这一点:
   (b) 设 $g(x)=f(cx)$, 证明 $g'(x)=c\cdot f'(cx)$. 并从图上来看为什么这是真的.
   (c) 设 f 是可微的并且是周期的, 其周期为 a(即 $f(x+a)=f(x)$, 对于所有的 x). 证明 f' 也是周期的.
9. 在下列各题中, 求 $f'(x)$ 和 $f'(x+3)$. 必须很有条理地来做, 否则你必然会在某处疏忽了. 查阅解答(当然要在你做完本题之后).
   (i) $f(x)=(x+3)^5$.
   (ii) $f(x+3)=x^5$.
   (iii) $f(x+3)=(x+5)^7$.
10. 若 $f(x)=g(t+x)$, 求 $f'(x)$; 又若 $f(t)=g(t+x)$, 求 $f'(x)$. 它们的答案不同.
11. (a) 证明伽利略是错的: 设一物体在 t 秒内落下的距离为 $s(t)$, 且 s'

与 s 成比例，则 s 不能是 $s(t)=ct^2$ 形式的函数：

(b) 设 $s(t)=(a/2)t^2$，证明下列关于 s 的事实成立（由第一个事实可见我们为什么要将 c 换成 $a/2$）：

(i) $s''(t)=a$（加速度是常数）.

(ii) $[s'(t)]^2=2as(t)$.

(c) 设 s 用英尺度量，a 的值为 32. 一枝形吊灯从 400 英尺高的天花板上下落要多少秒？如果不去碰它，当枝形吊灯落到地面时速度是多少？当枝形吊灯的速度达到这个数值的一半时，它在何处？

12. 设想有一条道路，在该路上每一处的速度都是限定的。换句话说，有某一函数 L 使距道路起点 x 英里处的限定速度为 $L(x)$. A 和 B 两辆车子在这条路上行驶；在时刻 t 车 A 的位置在 $a(t)$；而车 B 在 $b(t)$.

(a) 当车 A 恒以限定速度行驶时，用什么方程表示这种情况？（答案不是 $a'(t)=L(t)$.）

(b) 如果 A 恒以限定速度行驶，且 B 在时刻 t 的位置是 A 在时刻 $t-1$ 的位置. 证明 B 在全部时间内也都是以限定速度行驶.

(c) 如果 B 恒跟在 A 后面相距一个不变的距离. 在什么情况下 B 将仍然恒以限定速度行驶？

13. 设 $f(a)=g(a)$ 并且 f 在点 a 的左导数等于 g 在点 a 的右导数. 定义 $h(x)=f(x)$，对于 $x\leqslant a$；$h(x)=g(x)$，对于 $x\geqslant a$. 证明 h 在点 a 是可微的.

14. 设当 x 为有理数时 $f(x)=x^2$；当 x 为无理数时 $f(x)=0$. 证明 f 在点 0 是可微的.（不要被这个函数吓住，只要写出 $f'(0)$ 的定义.）

*15. (a) 设 f 为满足如下关系的函数：$|f(x)|\leqslant x^2$，对于所有的 x. 证明 f 在点 0 是可微的.（如果你已做过第 14 题，你就能够证明这一题.）

(b) 若 x^2 用 $|g(x)|$ 来代替，则 g 应具有什么性质上面结果可以推广？

16. 设 $\alpha>1$，并且 f 满足 $|f(x)|\leqslant|x|^\alpha$. 证明 f 在点 0 是可微的.

17. 设 $0<\beta<1$，f 满足 $|f(x)|\geqslant|x|^\beta$ 以及 $f(0)=0$. 证明 f 在点 0 是不可微的.

*18. 设 $f(x)=0$，对于无理数 x；$f(x)=1/q$，对于 $x=p/q$，其中 p/q 为既约分数. 证明对于任何 a，f 在点 a 不可微.（提示：显然只要对无理数来证明即已足够，为什么？设 $a=n.a_1a_2a_3\cdots$ 是 a 的十进小数表示；分别考虑当 h 为有理数时及 $h=-0.00\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots$ 时的

$$[f(a+h)-f(a)]/h.$$

19. (a) 设 $f(a)=g(a)=h(a)$；$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，对于所有的 x；以及 $f'(a)=h'(a)$. 证明 g 在点 a 是可微的，并且 $f'(a)=g'(a)=h'(a)$. (由 $g'(a)$ 的定义开始.)

    (b) 试证：如果去掉 $f(a)=g(a)=h(a)$ 这个假设，便无法得出上述的结论.

20. 设 f 为任意多项式函数，在下一章中我们将看到 f 是可微的. f 在点 $(a, f(a))$ 的切线是 $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ 的图形. 因而 $f(x)-g(x)$ 是多项式函数 $d(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$. 我们已经知道，若 $f(x)=x^2$，则 $d(x)=(x-a)^2$，以及若 $f(x)=x^3$，则 $d(x)=(x-a)^2\cdot(x+2a)$.

    (a) 当 $f(x)=x^4$ 时，求 $d(x)$，并证明它能被 $(x-a)^2$ 整除.

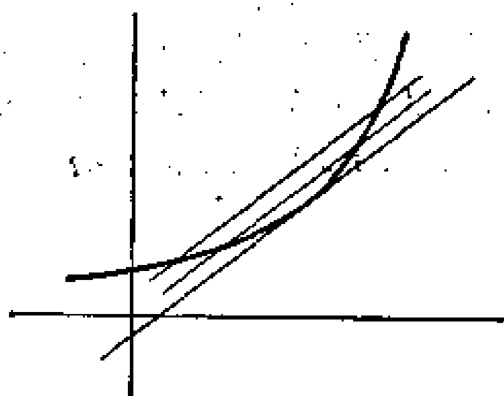


图 22

    (b) 好象当然有某种根据能证明 $d(x)$ 总能被 $(x-a)^2$ 整除. 图 22 提供一直观的论据：与切线平行的直线通常与图形相交于两点；切线与图形在切点附近只相交一次，故其交点应为一"二重交点". 为了严格证明这一问题，首先注意

$$\frac{d(x)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a).$$

    现在回答下列问题：为什么 $f(x)-f(a)$ 能被 $x-a$ 整除？为什么有一多项式函数 h 满足 $h(x)=d(x)/(x-a)$，其中 $x\neq a$？为什么 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=0$？为什么 $h(a)=0$？为什么这样就能解决这个问题？

21. (a) 证明 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]/(x-a)$. (本题不难.)

    (b) 证明导数是一"局部性质"：设对于包含 a 的某一开区间内所有的

x 有 $f(x)=g(x)$，则 $f'(a)=g'(a)$．（这意味着在计算 $f'(a)$ 时，对于任何特定的 $x\neq a$，你可以不管 $f(x)$ 是多少．当然不能对于所有的 $x\neq a$ 全都不管相应的 $f(x)$ 是多少！）

*22．（a）设 f 在点 x 是可微的．证明

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

提示：回忆一个熟悉的代数技巧——对某数加上并减去同量，则该数不变．

**(b) 证明更一般的情况

$$f'(x)=\lim_{h,k\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k}.$$

*23．证明若 f 是偶函数，则 $f'(x)=-f'(-x)$．（为了减少混淆，设 $g(x)=f(-x)$；求 $g'(x)$，然后回忆 g 另外表示什么．）绘出一图！

*24．证明：若 f 是奇函数，则 $f'(x)=f'(-x)$．再绘一图．

25．第 23 和 24 题指出，若 f 是奇函数，则 f' 是偶函数，若 f 是偶函数则 f' 是奇函数．由此推想：对于 $f^{(k)}$，结果将如何？

26．求 $f''(x)$，若

（i）$f(x)=x^3$．

（ii）$f(x)=x^5$．

（iii）$f'(x)=x^4$．

（iv）$f(x+3)=x^5$．

27．如果 $S_n(x)=x^n$，且 $0\leqslant k\leqslant n$，证明

$$S_n^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$
$$=k!\binom{n}{k}x^{n-k}.$$

*28．（a）如果 $f(x)=|x|^3$，求 $f'(x)$，求 $f''(x)$．对于所有的 x，$f'''(x)$ 是否存在？

（b）如果 $f(x)=x^4$，对于 $x\geqslant 0$；以及 $f(x)=-x^4$，对于 $x\leqslant 0$．试对 f 作同样的分析．

*29．设 $f(x)=x^n$，对于 $x\geqslant 0$；并设 $f(x)=0$，对于 $x\leqslant 0$．证明 $f^{(n-1)}$ 存在（并求出一个关于它的公式），但 $f^{(n)}(0)$ 不存在．

30．解释下列莱布尼兹记号的范例；每一记号都是将以前各题的某些结果

以新的形式重新陈述。

(i) $\dfrac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$。

(ii) $\dfrac{dz}{dy}=-\dfrac{1}{y^2}$，如果 $z=\dfrac{1}{y}$。

(iii) $\dfrac{d[f(x)+c]}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}$。

(iv) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx}=c\dfrac{df(x)}{dx}$。

(v) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$，如果 $z=y+c$。

(vi) $\left.\dfrac{dx^3}{dx}\right|_{x=a^2}=3a^4$。

(vii) $\left.\dfrac{df(x+a)}{dx}\right|_{x=b}=\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=b+a}$。

(viii) $\left.\dfrac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b}=c\cdot\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$。

(ix) $\dfrac{df(cx)}{dx}=c\cdot\left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=cx}$。

(x) $\dfrac{d^k x^n}{dx^k}=k!\dbinom{n}{k}x^{n-k}$。

选题解答

1\. (a) $f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}.$$

(b) 通过点$(a, 1/a)$的切线是

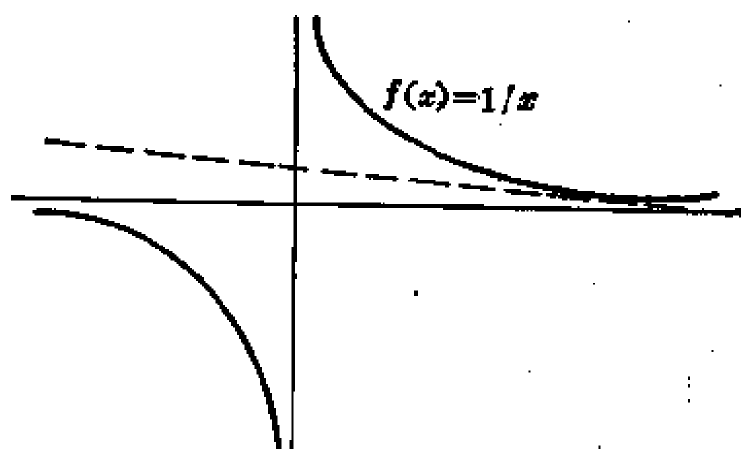
$$g(x)=\frac{-1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}$$

$$=\frac{-x}{a^2}+\frac{2}{a}$$

的图形，若 $f(x)=g(x)$，则

$$\frac{1}{x}=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}$$

或 $$x^2-2ax+a^2=0,$$
于是 $$x=a.$$
下图表示 $f(x)=1/x$ 图形的切线.



2. (a) $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(a+h)^2}-\frac{1}{a^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-2ah-h^2)}{ha^2(a+h)^2}=-\frac{2}{a^3}.$$

(b) 通过点$(a, 1/a^2)$的切线是

$$g(x)=-\frac{2}{a^3}(x-a)+\frac{1}{a^2}$$
$$=-\frac{2x}{a^3}+\frac{3}{a^2}$$

的图形. 若 $f(x)=g(x)$, 则

$$\frac{1}{x^2}=\frac{-2x}{a^3}+\frac{3}{a^2},$$

或

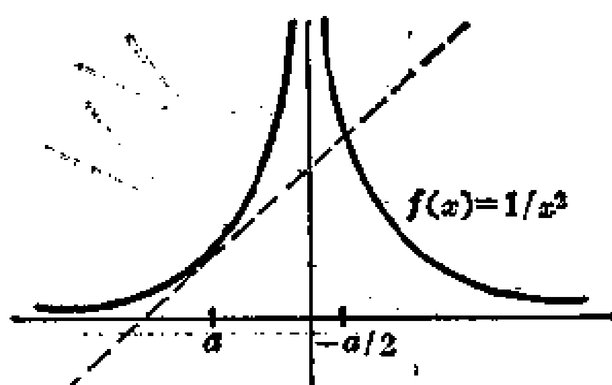
$$2x^3-3ax^2+a^3=0,$$

或

$$0=(x-a)(2x^2-ax-a^2)$$
$$=(x-a)(2x+a)(x-a).$$

于是 $x=a$ 或 $x=-a/2$; 点$(-a/2, 4/a^2)$与点$(a, 1/a^2)$位于直立轴的两侧.

下图表示 $f(x)=1/x^2$ 图形的切线.



3. $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

4. 推测：$S'_n(x)=nx^{n-1}$. 证明：

$$S'_n(x)=\lim_{h\to 0}\frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}h^j-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}h^{j-1}$$

$$=\binom{n}{1}x^{n-1}\text{（因为对于 } j>1,\ \lim_{h\to 0}h^{j-1}=0\text{）}$$

$$=nx^{n-1}.$$

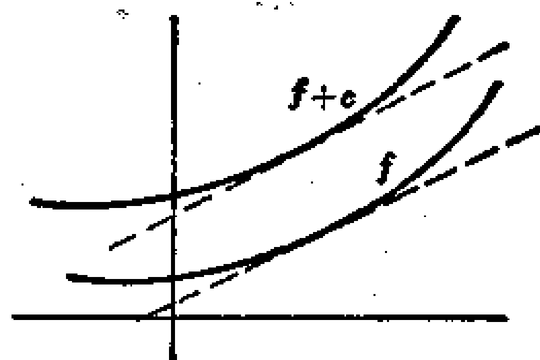
5. 当 x 不是整数时 $f'(x)=0$，而当 x 是整数时 $f'(x)$ 无定义。

6. (a) $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+c]-[f(x)+c]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

下图表示 f' 和 $(f+c)'$ 之间的关系。

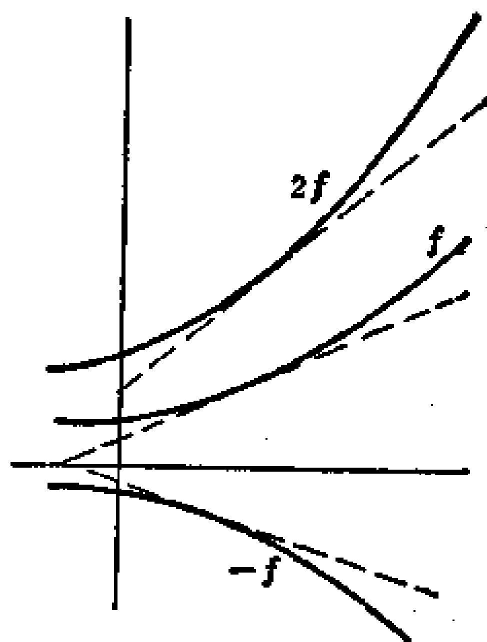


(b) $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$

$=c\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x).$

下图表示 f' 和 $(cf)'$ 之间的关系.



7. (a) $f'(9)=3\cdot 9^2$; $f'(25)=3\cdot(25)^2$; $f'(36)=3\cdot(36)^2$.

(b) $f'(3^2)=f'(9)=3\cdot 9^2$; $f'(5^2)=f'(25)=3\cdot(25)^2$;

$f'(6^2)=f'(36)=3\cdot(36)^2$.

(c) $f'(a^2)=3(a^2)^2=3a^4$; $f'(x^2)=3(x^2)^2=3x^4$.

(d) $f'(x^2)=3x^4$; 但 $g(x)=x^6$, 故 $g'(x)=6x^5$.

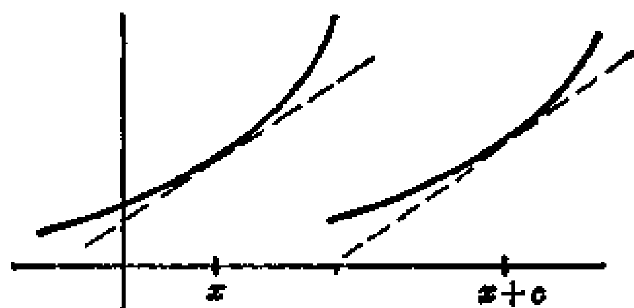
8. (a) $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h+c)-f(x+c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f([x+c]+h)-f(x+c)}{h}$$

$$=f'(x+c).$$

下图表示 f' 和 g' 之间的关系。



(b)

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(cx+ch)-f(cx)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c[f(cx+ch)-f(cx)]}{ch}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{c[f(cx+k)-f(cx)]}{k}$$

$$=c\cdot\lim_{k\to 0}\frac{f(cx+k)-f(cx)}{k}=c\cdot f'(cx).$$

(将本题证法的技巧与习题五,13 比较.)

(c) 设 $g(x)=f(x+a)$, 则由 (a) 知 $g'(x)=f'(x+a)$. 但因 $g=f$, 故 $f'(x)=g'(x)=f'(x+a)$, 对于所有的 x. 这意味着 f' 是周期的, 其周期为 a.

9. (i) 如果 $g(x)=x^5$, 则 $g'(x)=5x^4$. 现在 $f(x)=g(x+3)$, 于是根据第 8 (a)题得 $f'(x)=g'(x+3)=5(x+3)^4$.

(ii) 与(i)一样, $f(x)=(x-3)^5$, 故 $f'(x)=5(x-3)^4$.

(iii) 与(i)一样, $f(x)=(x+2)^7$, 故 $f'(x)=7(x+2)^6$.

10. 如果 $f(x)=g(t+x)$, 则根据第 8(a)题得 $f'(x)=g'(t+x)$.

如果 $f(t)=g(t+x)$, 则由第 8(a) 题知 $f'(t)=g'(t+x)$, 故 $f'(x)$

$=g'(2x)$.

11. (a) 如果 $s(t)=ct^2$, 则 $s'(t)=2ct$, 没有一数 k 能对所有的 t 满足 $s'(t)=ks(t)$[即 $2ct=kct^2$]. (顺便指出, 关于这个问题我们不知道任何非零函数 f 能使 f' 与 f 成比例. 在第十七章之后将有趣地断定, 如果伽利略是对的话, 世界将象什么样子.)

    (b) (i) 如果 $s(t)=(a/2)t^2$, 则 $s'(t)=at$, 故 $s''(t)=a$.

    (ii) $[s'(t)]^2=(at)^2=2a\cdot(a/2)t^2=2as(t)$.

    (c) 枝形吊灯在 t 秒内降落 $s(t)=16t^2$ 英尺, 这样, 如果它在 t 秒内降落 400 英尺, $400=16t^2$ 即 $t=5$. 5 秒后的速度将为 $s'(5)=5a=5\cdot 32=160$ 英尺/秒. 当 $80=s'(t)=32t$ 即 $t=5/2$ 时, 其速度为上列数值的一半.

21. (a) 这是用另一种方式来写定义(见习题五, 8).

    (b) 将习题五, 10 应用于函数 $\alpha(h)=[f(a+h)-f(a)]/h$ 和 $\beta(h)=[g(a+h)-g(a)]/h$.

26. (i) $f''(x)=6x$.

    (iii) $f''(x)=4x^3$.

30. (i) 表示 $f'(a)=na^{n-1}$, 如果 $f(x)=x^n$.

    (iii) 表示 $g'(a)=f'(a)$, 如果 $g(x)=f(x)+c$.

    (v) 意义与(iii)同.

    (vii) 表示 $g'(b)=f'(b+a)$, 如果 $g(x)=f(x+a)$.

    (ix) 表示 $g'(b)=cf'(cb)$, 如果 $g(x)=f(cx)$.

第十章 微 分 法

求函数的导数的方法称为微分法．在前一章中你可能得到这样的印象，认为这种方法往往是艰难的，要用到导数的定义，还要依靠成功地求得某个极限．的确，这个过程经常是唯一可行的途径——如果你忘记导数的定义，大概就会无法进行下去．尽管这样，在本章里我们将学会对许多函数进行微分，而无需回忆导数的定义．一些定理将提供微分一大类函数的机械的方法，而这类函数是由少数几个简单函数经加、乘、除以及复合而成的．这提醒我们应该证明什么样的定理．我们先求一些简单函数的导数，然后证明关于可微函数的和、积、商以及复合的定理．头一个定理只是正式承认前一章所进行的计算．

定理 1 若 f 为常值函数，$f(x)=c$，则对于所有的 a，

$$f'(a)=0.$$

证明 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=0.$

第二个定理也是前一章所计算过的一个特殊情形．

定理 2 若 f 为恒等函数，$f(x)=x$，则对于所有的 a，

$$f'(a)=1.$$

证明

$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1. \end{aligned}$$

两个函数的和的导数，正是我们所希望的，等于它们导数的

和.

定理3 如果 f 和 g 在点 a 可微，则 $f+g$ 在点 a 也可微，并且

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a).$$

证明

$$\begin{aligned}(f+g)'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\&=f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

乘积导数的公式虽不如我们所希望的那么简单，但它仍然是很对称的，且其证明只需一个先前已经用过的简单的代数技巧——对一个数加上并减去相同的量，则该数不变.

定理4 如果 f 和 g 在点 a 可微，则 $f\cdot g$ 在点 a 也可微，并且

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

证明

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)[g(a+h)-g(a)]}{h}\right.\\&\qquad\left.+\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a)}{h}\right]\end{aligned}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a)$$

$$=f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a).$$

(注意,我们用了第九章定理 1 来断定$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$.)

在一种特殊情形中,定理 4 可以相当简单:

定理5 如果 $g(x)=cf(x)$,并且 f 在点 a 可微,则 g 在点 a 可微,并且

$$g'(a)=c\cdot f'(a).$$

证明 设 $h(x)=c$,使得 $g=h\cdot f$,于是由定理 4 知

$$\begin{aligned}g'(a)&=(h\cdot f)'(a)\\&=h(a)\cdot f'(a)+h'(a)\cdot f(a)\\&=c\cdot f'(a)+0\cdot f(a)\\&=c\cdot f'(a).\end{aligned}$$

注意,特别是$(-f)'(a)=-f'(a)$,因而$(f-g)'(a)=(f+[-g])'(a)=f'(a)-g'(a)$.

为了说明我们已经收到了效果,现在来计算一些比较特殊的函数的导数.

定理6 若 $f(x)=x^n$,其中 n 为某一自然数,则对于所有的 a,

$$f'(a)=na^{n-1}.$$

证明 对于 n 用归纳法来证明. 当 $n=1$ 时,这就是定理 2. 现在假设本定理对 n 成立,这样,当 $f(x)=x^n$ 时,则对于所有的 a,

$$f'(a)=na^{n-1},$$

设 $g(x)=x^{n+1}$. 设 $I(x)=x$,则对于所有的 x,方程 $x^{n+1}=x^n\cdot x$ 可以写成

$$g(x)=f(x)\cdot I(x);$$

于是 $g=f\cdot I$. 由定理 4 知,对于所有的 a,

$$\begin{aligned}g'(a)=(f\cdot I)'(a)&=f'(a)\cdot I(a)+f(a)\cdot I'(a)\\&=na^{n-1}\cdot a+a^n\cdot 1\\&=na^n+a^n\\&=(n+1)a^n.\end{aligned}$$

这就是我们所要证明的 $n+1$ 的情形.

同时应用迄今已证明的定理,我们现在能对形如

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

的 f 求 f'. 我们得

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1.$$

我们还能求出 f'':

$$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+2a_2.$$

这种过程容易继续下去. 每次微分使 x 的最高次幂减低一次,并再去掉一个 a_i. 这个想法有助于求导数 f''', $f^{(4)}$, 也许还要 $f^{(5)}$, 直到其格式变得十分清楚为止. 最后一个有意思的导数是

$$f^{(n)}(x)=n!a_n;$$

对于 $k>n$, 我们有

$$f^{(k)}(x)=0.$$

显然,按照我们的计划,下一步是求商 f/g 的导数. 这是一个很简单的问题,由于有了定理 4,显然求出 $1/g$ 的导数就够了.

定理 7 如果 g 在点 a 可微,并且 $g(a)\neq 0$, 则 $1/g$ 在点 a 可微,并且

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

证明 在我们写出

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

之前，须先证实该式有意义——需要证明对于足够小的 h，

$$(1/g)(a+h)$$

是有定义的．这只要说明两点：根据假设，g 在点 a 可微，于是由第九章定理 1 知，g 在点 a 是连续的．因为 $g(a)\neq 0$，于是由第六章定理 3 知，存在着某一 $\delta>0$，使得当 $|h|<\delta$ 时恒有 $g(a+h)\neq 0$．因此，对于足够小的 h，$(1/g)(a+h)$ 确实有意义，于是我们可以写

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h[g(a)\cdot g(a+h)]}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{-[g(a+h)-g(a)]}{h}\cdot\frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{-[g(a+h)-g(a)]}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)}\\
&=-g'(a)\cdot\frac{1}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

（注意，我们再次用了 g 在点 a 的连续性．）

现在容易导出商的导数的一般公式，这个公式虽不特别令人感兴趣，但却是重要的，必须用简便的方式把它记住（我常用这样的口诀："底乘顶的导数，减去顶乘底的导数，除以底的平方．"）

定理 8 如果 f 和 g 在点 a 可微，并且 $g(a)\neq 0$，则 f/g 在点 a 可微，并且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{g(a)\cdot f'(a)-f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

证明 因 $f/g=f\cdot(1/g)$，我们有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a)&=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)\\
&=f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a)+f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)
\end{aligned}$$

$$=\frac{f'(a)}{g(a)}+\frac{f(a)(-g'(a))}{[g(a)]^2}$$

$$=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

我们现在能微分更多一些的函数. 例如,

若
$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1},$$

则
$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2};$$

若
$$f(x)=\frac{x}{x^2+1},$$

则
$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};$$

若$f(x)=\frac{1}{x}$, 则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}=(-1)x^{-2}$.

注意, 最后一例可以推广: 若对于某一自然数 n,

$$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^n},$$

则
$$f'(x)=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=(-n)x^{-n-1}.$$

于是定理 6 实际上对于正、负整数都成立. 如果我们将 $f(x)=x^0$ 解释成 $f(x)=1$, 以及 $f'(x)=0\cdot x^{-1}$ 解释成 $f'(x)=0$, 则定理 6 对于 $n=0$ 也成立. ("解释成"这三个字是必要的, 因为对于应如何定义0^0还不清楚, 并且无论如何, $0\cdot 0^{-1}$ 是没有意义的.)

要进一步讨论微分问题, 需要知道以后研究的某些特殊函数的导数, 其中一个是正弦函数. 我们暂不加以证明而先给出并应用下列关系式:

$$\sin'(a)=\cos a, \text{对于所有的 } a,$$

$$\cos'(a)=-\sin a, \text{对于所有的 } a.$$

应用这些关系式, 我们就能微分许多其他的函数. 例如, 设

$$f(x)=x\sin x$$

则
$$f'(x)=x\cos x+\sin x,$$
$$f''(x)=-x\sin x+\cos x+\cos x$$
$$=-x\sin x+2\cos x.$$

设
$$g(x)=\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x,$$

则
$$g'(x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x$$
$$=2\sin x\cos x,$$
$$g''(x)=2[(\sin x)(-\sin x)+\cos x\cos x]$$
$$=2[\cos^2 x-\sin^2 x].$$

设
$$h(x)=\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x,$$

则
$$h'(x)=(\cos x)(-\sin x)+(-\sin x)\cos x$$
$$=-2\sin x\cos x,$$
$$h''(x)=-2[\cos^2 x-\sin^2 x].$$

注意
$$g'(x)+h'(x)=0$$
是意料中的事，因为$(g+h)(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$. 正如我们所希望的，还有 $g''(x)+h''(x)=0$.

以上例题只涉及两个函数的乘积．包含三重积的函数，也可以用定理 4 来解决，实际上它可用两种方式来解．回忆 $f\cdot g\cdot h$ 是下式的简写

$$(f\cdot g)\cdot h \text{ 或 } f\cdot(g\cdot h).$$

以这两种中的头一种为例，我们有

$$(f\cdot g\cdot h)'(x)=(f\cdot g)'(x)\cdot h(x)+(f\cdot g)(x)h'(x)$$
$$=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$
$$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)$$
$$+f(x)g(x)h'(x).$$

当然，选择$f\cdot(g\cdot h)$将能得出同样的结果，只是中间步骤不同．最后的答案是完全对称的，并且容易记住：

$(f\cdot g\cdot h)'$ 等于下列三项的和：

微分 f,g 和 h 中的每一个，乘以其余的两个.

例如，设 $$f(x)=x^3\sin x\cos x,$$

则 $$f'(x)=3x^2\sin x\cos x+x^3\cos x\cos x+x^3(\sin x)(-\sin x).$$

3 个以上的函数的乘积，可以用同样的方法来解决. 例如，你应该不会有什么困难导出下式

$$(f\cdot g\cdot h\cdot k)'(x)=f'(x)g(x)h(x)k(x)+f(x)g'(x)h(x)k(x)$$
$$+f(x)g(x)h'(x)k(x)+f(x)g(x)h(x)k'(x).$$

你甚至可以试证(用归纳法)一般公式：

$$(f_1\cdots f_n)'(x)=\sum_{i=1}^{n}f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f'_i(x)f_{i+1}(x)\cdots f_n(x).$$

微分最有意思的函数，显然需要一个以 f' 和 g' 表示 $(f\circ g)'(x)$ 的公式. 为了保证 $f\circ g$ 在点 a 可微，一个合理的假设似乎是 g 在点 a 可微. 由于 $f\circ g$ 在点 a 附近的性态，取决于 f 在点 $g(a)$ 附近(不是 a 附近)的性态，这样，假设 f 在点 $g(a)$ 可微，好象也是合理的. 的确，我们将证明，若 g 在点 a 可微，并且 f 在点 $g(a)$ 可微，则 $f\circ g$ 在点 a 可微，并且

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

这个非常重要的公式称为链式法则，这大概是因为函数的复合可以称为函数"链". 注意，$(f\circ g)'$ 虽然实际上是 f' 和 g' 的乘积，但又不完全一样：f' 必须在点 $g(a)$ 计值，而 g' 在点 a. 在证明该定理之前，我们先看它的一些应用. 假设

$$f(x)=\sin x^2.$$

让我们暂时用 S 表示("平方")函数 $S(x)=x^2$. 则

$$f=\sin\circ S.$$

于是我们有

$$f'(x)=\sin'(S(x))\cdot S'(x)$$

$$=\cos x^2\cdot 2x.$$

若
$$f(x)=\sin^2 x,$$
则结果就完全不同. 在此情形中
$$f=S\circ\sin x,$$
于是
$$f'(x)=S'(\sin x)\cdot\sin'(x)$$
$$=2\sin x\cdot\cos x.$$
注意, 这与写 $f=\sin\cdot\sin$ 并用乘积的公式所得到的结果相同(它也应该).

虽然我们用了一个特殊的记号 S 来表示"平方"函数, 但不要做很多的练习, 就会解这类问题而不必将函数用特殊的记号写出来, 甚至不必把 f 是怎样特殊的函数复合写出来——我们很快就会习惯于在头脑里拆开 f. 下列的微分可用来作为这种心算的练习. 如果你觉得需要, 在纸上少许做一下, 当然是可以的, 但要设法找出一个窍门, 使得当一看 f 的定义, 就能立刻写出 f'; 这类问题很简单, 只要记住链式法则, 不用动多大脑筋就能解决.

设 $f(x)=\sin x^3$ 则 $f'(x)=\cos x^3\cdot 3x^2$

$f(x)=\sin^3 x$ $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x$

$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ $f'(x)=\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

$f(x)=\sin(\sin x)$ $f'(x)=\cos(\sin x)\cdot\cos x$

$f(x)=\sin(x^3+3x^2)$ $f'(x)=\cos(x^3+3x^2)\cdot(3x^2+6x)$

$f(x)=(x^3+3x^2)^{53}$ $f'(x)=53(x^3+3x^2)^{52}\cdot(3x^2+6x)$.

象
$$f(x)=\sin^2 x^2=[\sin x^2]^2$$
的函数, 是三个函数的复合,

$$f=S\circ\sin\circ S,$$

也可用链式法则来微分. 只要记住三重复合 $f\circ g\circ h$ 表示$(f\circ g)\circ h$ 或 $f\circ(g\circ h)$. 这样, 如果

$$f(x)=\sin^2 x^2,$$

我们可以写成

$$f=(S\circ\sin)\circ S,$$

$$f=S\circ(\sin\circ S).$$

这两式的导数都可由两次应用链式法则求出, 唯一的疑点是这两式是否都能导致同样简单的计算. 事实上, 正如任何有经验的求微分的人所知道的, 最好采用第二式:

$$\boxed{f=S\circ(\sin\circ S)}$$

现在我们能够一下子写出 $f'(x)$. 首先注意头一个需要微分的函数是 S, 所以 $f'(x)$的式子开始是

$$f'(x)=2(\quad)\cdot$$

括号内我们必须填入 $\sin x^2$, 即第二个函数 $\sin\circ S$ 在点 x 的值. 于是我们开始可以写

$$f'(x)=2\sin x^2\cdot$$

(最后实际上不需要括号). 我们现在必须用它来乘 $\sin\circ S$ 在点 x 的导数, 这一部分是容易的——它包含两个函数的复合, 我们已经知道怎样求出它. 最后答案是

$$f'(x)=2\sin x^2\cdot\cos x^2\cdot 2x.$$

下例可用同样方法解决. 设

$$\boxed{f(x)=\sin(\sin x^2)}$$

甚至无需将 f 写成三个函数的复合 $g\circ h\circ k$, 我们可以看到最左边的一个函数是 sin, 于是关于 $f'(x)$的式子可由下式写起

$$f'(x)=\cos(\quad)\cdot$$

括号内我们必须填入 $h\circ k(x)$ 的值；它就是 $\sin x^2$(从 $\sin(\sin x^2)$ 中删去第一个 sin 之后得到)．于是关于 $f'(x)$ 的式子可由下式写起

$$f'(x)=\cos(\sin x^2)\cdot$$

我们现在可以不管 $\sin(\sin x^2)$ 中的头一个 sin；我们必须将已得到的结果，乘以在点 x 其值是 $\sin x^2$ 的那个函数的导数——这又是一个我们已经知道如何解的问题：

$$f'(x)=\cos(\sin x^2)\cdot\cos x^2\cdot 2x.$$

最后，下面是另外一些 sin 和 S 的复合以及三重复合的函数的导数．你大概能"看到"这些答案是对的——不然，可将 f 写成一个复合函数：

设 $f(x)=\sin((\sin x)^2)$ 　　则 $f'(x)=\cos((\sin x)^2)\cdot 2\sin x\cdot\cos x$

$f(x)=[\sin(\sin x)]^2$ 　　$f'(x)=2\sin(\sin x)\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$

$f(x)=\sin(\sin(\sin x))$ 　　$f'(x)=\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$

$f(x)=\sin^2(x\sin x)$ 　　$f'(x)=2\sin(x\sin x)\cdot\cos(x\sin x)\cdot[\sin x+x\cos x]$

$f(x)=\sin(\sin(x^2\sin x))$ 　　$f'(x)=\cos(\sin(x^2\sin x))\cdot\cos(x^2\sin x)\cdot[2x\sin x+x^2\cos x]$.

处理四个(甚至更多个)函数复合问题的法则是容易的——总是(在心中)从右边开始加括号，

$$f\circ(g\circ(h\circ k)),$$

并化为求一个小一点数目的函数复合的导数

$$f'(g(h(k(x))))\cdot$$

例如，设

$$f(x)=\sin^2(\sin^2 x) \qquad [f=S\circ\sin\circ S\circ\sin$$
$$=S\circ(\sin\circ(S\circ\sin))]$$

则 $\quad f'(x)=2\sin(\sin^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x.$

设 $\quad f(x)=\sin((\sin x^2)^2) \qquad [f=\sin\circ S\circ\sin\circ S$
$$=\sin\circ(S\circ(\sin\circ S))]$$

则 $\quad f'(x)=\cos((\sin x^2)^2)\cdot 2\sin x^2\cdot\cos x^2\cdot 2x.$

设 $f(x)=\sin^2(\sin(\sin x)) \qquad$ [如有必要，你自己补上]

则 $f'(x)=2\sin(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x.$

用这些例子作参考，你只要做一件事——练习，就可成为一个熟练的求微分者. 你能够轻松地做本章末尾的练习，而现在该是证明链式法则的时候了.

下列论述，不是证明，而是指出可能采用的某些技巧以及遇到的某些困难. 我们当然还是由定义开始，

$$(f\circ g)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}.$$

我们希望其中某处有 $g'(a)$ 的表达式. 一个办法是依要求把它加上去:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

这看来不坏，如果写成下列形式，好象更好

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+[g(a+h)-g(a)])-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

第二个极限是我们所需要的因子 $g'(a)$. 若令 $g(a+h)-g(a)=k$（精确的写法应为 $k(h)$），则第一个极限为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}.$$

此极限好象应为 $f'(g(a))$，因为 g 在 a 的连续性意味着，当 h 趋近 0 时 k 就趋近 0. 事实上，我们能够而且即将使这种推论成为正确. 可是，如果你不盲从，你将会注意到已经有了一个问题. 即使 $h\neq 0$，我们也还可能有 $g(a+h)-g(a)=0$，致使除以和乘上 $g(a+h)-g(a)$ 变成没有意义. 的确，我们只关心小的 h，但对于任意小的 h，$g(a+h)-g(a)$ 都可能等于 0. 产生这种情况的最容易的方法是，使 g 为一常值函数 $g(x)=c$. 那么对于所有的 h 有 $g(a+h)-g(a)=0$. 假若这样，$f\circ g$ 也是一常值函数 $(f\circ g)(x)=f(c)$，于是链式法则的确成立：

$$(f\circ g)'(a)=0=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

可是，也有非常值函数 g，对于任意小的 h 有 $g(a+h)-g(a)=0$. 例如，设 $a=0$，函数 g 为

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

假若是这样，如我们在第九章中所述，$g'(0)=0$. 如果链式法则成立，则对于任何可微的 f，我们必定有 $(f\circ g)'(0)=0$，但这不是那么容易看出. 通过单独考虑这些难弄的函数，虽也可找到链式法则的一个证明，但不用这种方法而用一点技巧会更容易些.

定理 9（链式法则） 若 g 在 a 可微，且 f 在 $g(a)$ 可微，则 $f\circ g$ 在 a 可微，且

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

证明 定义一函数 ϕ 如下.

$$\phi(h)=\begin{cases}\dfrac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}, & \text{当 } g(a+h)-g(a)\neq 0 \text{ 时},\\ f'(g(a)), & \text{当 } g(a+h)-g(a)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

从直观上容易看出，ϕ 在点 0 是连续的：当 h 是很小时，$g(a+h)-g(a)$ 也很小，故若 $g(a+h)-g(a)$ 不等于 0，则 $\phi(h)$ 将接近 $f'(g(a))$；如果它等于 0，则 $\phi(h)$ 实际上等于 $f'(g(a))$，这甚至更好些. 由于 ϕ 的连续性是整个证明中的难点，我们将仔细解释这个直观的论点.

我们知道 f 在点 $g(a)$ 可微，这意味着

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}=f'(g(a)).$$

这样，设 $\varepsilon>0$，则有某个 $\delta'>0$，使得

(1) 当 $0<|k|<\delta'$ 时，就有

$$\left|\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}-f'(g(a))\right|<\varepsilon.$$

现在 g 在点 a 可微，因而在点 a 连续，于是有一 $\delta>0$，使得

(2) 当 $|h|<\delta$ 时，就有 $|g(a+h)-g(a)|<\delta'$.

现在考虑满足 $|h|<\delta$ 的任何 h. 若 $k=g(a+h)-g(a)\neq 0$，则

$$\phi(h)=\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k};$$

由(2)知 $|k|<\delta'$，从而由(1)得

$$|\phi(h)-f'(g(a))|<\varepsilon.$$

另一方面，若 $g(a+h)-g(a)=0$，则 $\phi(h)=f'(g(a))$，因此，下式当然成立

$$|\phi(h)-f'(g(a))|<\varepsilon.$$

于是我们证明了

$$\lim_{h\to 0}\phi(h)=f'(g(a)),$$

因而 ϕ 在点 0 连续．其余的证明是容易的．设 $h\neq 0$，那么我们有

$$\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}=\phi(h)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

即使 $g(a+h)-g(a)=0$ 也如此(因为此时，两边都为 0)．因此

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\phi(h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\&=f'(g(a))\cdot g'(a).\end{aligned}$$

现在我们能够很容易地微分许多函数，我们可以再考虑下列函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在第九章中我们指出 $f'(0)=0$，这是直接由定义得出的(唯一可能的方法)．对于 $x\neq 0$，我们可用本章的方法．我们有

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

于是

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

如该式所示，第一次导数 f' 在点 0 的性态的确很不好——它在该点甚至不连续．如果我们另外考虑

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在此情形中，f' 在点 0 是连续的，但 $f''(0)$ 不存在（因为虽然式 $3x^2\sin 1/x$ 定义一个在点0可微的函数，但式子 $-x\cos 1/x$ 却不然）.

如同你所猜想的，增加 x 的幂的次数将再次得到类似的改善. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

直接根据定义容易求出 $(f')'(0)=0$，对于 $x\neq 0$，$f''(x)$ 也容易求出：

$$f''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\frac{1}{x}-4x\cos\frac{1}{x}-2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在此情形中，二阶导数 f'' 在点 0 不连续. 现在你也许已经猜出这两个问题要你建立的一般形式：若

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f'(0), \cdots, f^{(n)}(0)$ 存在，但 $f^{(n)}$ 在点 0 不连续；若

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f'(0), \cdots, f^{(n)}(0)$ 存在，且 $f^{(n)}$ 在点 0 连续，但 $f^{(n)}$ 在点 0 不可

微. 这些例子意味着所谓“合理”函数的特性可用其所具有的高阶导数来刻划——不管我们将$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$的无穷振动掩蔽得多么严，足够高阶的导数似乎总能揭示出其根本的不规则性. 不幸，我们以后会看到出现更坏的事情.

在这些计算之后，我们将作些小评论来结束本章. 常常会诱使我们将本章的某些定理写成函数方程而不写成函数值方程，这样好象会更简洁些. 这样，定理 3 可以写成

$$(f+g)'=f'+g',$$

定理 4 可以写成 $$(f\cdot g)'=f\cdot g'+f'\cdot g,$$

而定理 9 往往写成下列形式

$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'.$$

严格地说，这些方程可能不成立，因为左边函数可能比右边函数有更大的定义域. 但这几乎不值得担心. 若f和g在它们的定义域内处处可微，则这些等式，以及其他和它们相类似的等式，都能成立，而这正是任何人所关心的.

习　　题

1. 作为初步的练习，求下列每个f的$f'(x)$. (不要为f或f'的定义域担心；只要求出$f'(x)$的公式，当它有意义时就给出正确的答案.)
   (i) $f(x)=\sin(x+x^2)$.
   (ii) $f(x)=\sin x+\sin x^2$.
   (iii) $f(x)=\sin(\cos x)$.
   (iv) $f(x)=\sin(\sin x)$.
   (v) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.
   (vi) $f(x)=\dfrac{\sin(\cos x)}{x}$.
   (vii) $f(x)=\sin(x+\sin x)$.

(viii) $f(x)=\sin(\cos(\sin x))$.

2. 求下列各函数 f 的 $f'(x)$.(作者用 20 分钟时间就求出了下列各题的导数，要是你来做，也不会用很多时间. 尽管快速计算不是数学的目的，但是如果你要自如地研究链式法则在理论上的应用的话，这些具体应用应当是极容易的事——尽管数学家喜欢自称甚至连加法都不会，但当必须做的时候，他们中的大多数都会.)

(i) $f(x)=\sin((x+1)^2(x+2))$.

(ii) $f(x)=\sin^3(x^2+\sin x)$.

(iii) $f(x)=\sin^2((x+\sin x)^2)$.

(iv) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

(v) $f(x)=\sin(x\sin x)+\sin(\sin x^2)$.

(vi) $f(x)=(\cos x)^{31^2}$

(vii) $f(x)=\sin^2 x\sin x^2\sin^2 x^2$.

(viii) $f(x)=\sin^3(\sin^2(\sin x))$.

(ix) $f(x)=(x+\sin^5 x)^6$.

(x) $f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))$.

(xi) $f(x)=\sin((\sin^7 x^7+1)^7)$.

(xii) $f(x)=(((x^2+x)^3+x)^4+x)^5$.

(xiii) $f(x)=\sin(x^2+\sin(x^2+\sin x^2))$.

(xiv) $f(x)=\sin(6\cos(6\sin(6\cos 6x)))$.

(xv) $f(x)=\dfrac{\sin x^2\sin^2 x}{1+\sin x}$.

(xvi) $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x+\sin x}}$.

(xvii) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}\right)$.

(xviii) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{x-\sin\left(\dfrac{x}{x-\sin x}\right)}\right)$.

3. 求 tan, cot, sec 和 cosec 各函数的导数.(你不需要记住这些公式，尽管偶尔要用到它们；如果你用适当方式写出答案，它们会较简单并且有

点对称.)

4. 对于下列各函数 f, 求 $f'(f(x))$(不是 $(f\circ f)'(x)$).

(i) $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

(ii) $f(x)=\sin x$.

(iii) $f(x)=x^2$.

(iv) $f(x)=17$.

5. 对于下列各函数 f, 求 $f(f'(x))$.

(i) $f(x)=\frac{1}{x}$.

(ii) $f(x)=x^2$.

(iii) $f(x)=17$.

(iv) $f(x)=17x$.

6. 用 g' 表示 f', 设

(i) $f(x)=g(x+g(a))$.

(ii) $f(x)=g(x\cdot g(a))$.

(iii) $f(x)=g(x+g(x))$.

(iv) $f(x)=g(x)(x-a)$.

(v) $f(x)=g(a)(x-a)$.

(vi) $f(x+3)=g(x^2)$.

7. (a) 一圆形物的大小按照某种未指明的方式增加, 但已知当其半径为6时, 其半径的变化率是4. 求当其半径为6时其面积的变化率. (设 $r(t)$ 和 $A(t)$ 代表在时刻 t 的半径和面积, 则函数 r 和 A 满足 $A=\pi r^2$; 需要直接应用链式法则.)

(b) 假设上题的圆形物是球形物体的截面(过球心). 求当半径为6时球的体积变化率. (你需要清楚地知道球体积的公式; 如果你忘了, 其体积是半径立方的 $\frac{4}{3}\pi$ 倍.)

(c) 假设当半径是3时圆形截面(过球心)的面积变化率是5. 求当半径是3时球的体积变化率. 你可用两种方法来做: 第一种采用半径表示面积和体积的公式; 第二种采用面积表示体积的公式(用此法时, 你要用到习题九, 3).

8. 设 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, 当 $x\neq 0$ 时; $f(0)=0$. 并假设 h 和 k 是使

$$h'(x)=\sin^2(\sin(x+1)),\qquad k'(x)=f(x+1),$$
$$h(0)=3,\qquad\qquad k(0)=0$$
的两个函数. 求

(i) $(f\circ h)'(0)$,

(ii) $(k\circ f)'(0)$,

(iii) $\alpha'(x^2)$, 其中 $\alpha(x)=h(x^2)$. 要很留神.

9. 设
$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$
和
$$g(0)=g'(0)=0,$$
求 $f'(0)$.

10. 应用习题九, 1 所求得的 $f(x)=1/x$ 的导数, 根据链式法则求
$$(1/g)'(x).$$

11. (a) 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. 对于 $-1<x<1$, 应用习题九, 3 求 $f'(x)$.
    (b) 证明 f 图形在点 $(a,\sqrt{1-a^2})$ 的切线与该图形只相交于该点(可见初等几何的切线定义和我们的定义一致).

12. 同样证明椭圆或双曲线的切线与它们只相交一次.

13. 若 $f+g$ 在点 a 可微, 那么 f 和 g 在点 a 是否必然可微?
若 $f\cdot g$ 和 f 在点 a 可微, 则 f 应具有什么条件才能推出 g 在点 a 可微?

14. (a) 证明: 若 f 在点 a 可微, 则 $|f|$ 在点 a 也是可微的, 假设 $f(a)\neq 0$.
    (b) 如果 $f(a)=0$, 举出反例.
    (c) 证明: 若 f 和 g 在点 a 可微, 则函数 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$ 在点 a 可微, 假设 $f(a)\neq g(a)$.
    (d) 如果 $f(a)=g(a)$, 举出反例.

15. 设 $f^{(n)}(a)$ 和 $g^{(n)}(a)$ 存在. 证明**莱布尼兹公式**:
$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a).$$

16. 证明: 若 $f^{(n)}(g(a))$ 和 $g^{(n)}(a)$ 同时存在, 则 $(f\circ g)^{(n)}(a)$ 存在. 稍微试验一下, 你就会相信, 去找 $(f\circ g)^{(n)}(a)$ 的公式是不高明的. 为了证明 $(f\circ g)^{(n)}(a)$ 存在, 你必须想出一个能用归纳法证明的关于 $(f\circ g)^{(n)}(a)$

的合理的断言．试按这样写："$(f\circ g)^{(n)}(a)$存在，并且是具有…形式的乘积的各项的和"．

17. (a) 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，求一函数$g$使$g'=f$．再求一个．

(b) 设

$$f(x)=\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\cdots+\frac{b_m}{x^m},$$

求一函数g使$g'=f$.

(c) 有没有一个如下的函数

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}$$

能使$f'(x)=1/x$？

18. 证明有一n次多项式函数f能使

(a) 恰有$n-1$个数x满足$f'(x)=0$.

(b) 当n是奇数时，没有x满足$f'(x)=0$.

(c) 当n是偶数时，恰有一个x满足$f'(x)=0$.

(d) 当$n-k$是奇数时，恰好有k个数x满足$f'(x)=0$.

19. (a) 若$f(x)=(x-a)^2g(x)$，其中g为某一多项式函数，则数a称为多项式函数f的**二重根**．证明：当且仅当a同时是f和f'的根时，a才是f的二重根．

(b) $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$何时有二重根？这个条件的几何意义是什么？

20. 如果f在点a可微，令$d(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$，求$d'(a)$．结合第19题，它给出习题九，20的另一解法．

*21. 本题与习题三，6是成对的．设$a_1,\cdots,a_n$和$b_1,\cdots,b_n$为已知数．

(a) 若$x_1,\cdots,x_n$为不同的数，证明有一$2n-1$次的多项式函数f，使$f(x_j)=f'(x_j)=0$，对于$j\neq i$；以及$f(x_i)=a_i$和$f'(x_i)=b_i$．提示：回忆第19题．

(b) 证明：有$2n-1$次的多项式函数f，对于所有的i，满足$f(x_i)=a_i$和$f'(x_i)=b_i$.

*22. 设a和b为多项式函数f的两个相邻根，但a和b都不是二重根．这样，我们可以写成$f(x)=(x-a)(x-b)g(x)$，其中$g(a)\neq0$和$g(b)\neq0$.

(a) 证明 $g(a)$ 和 $g(b)$ 具有相同的符号.（记住 a 和 b 是相邻根.）

(b) 证明有某数 x 满足 $a<x<b$ 和 $f'(x)=0$.（并绘一图说明此事实.）提示：比较 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 的符号.

(c) 即使 a 和 b 是多重根，现在证明同一论点. 提示：若 $f(a)=(x-a)^m(x-b)^n g(x)$，其中 $g(a)\neq 0$ 和 $g(b)\neq 0$，考虑多项式函数 $h(x)=f'(x)/(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$.

本定理是由法国数学家罗尔在研究多项式的近似根的问题时证明，但其结果原先没有用导数来表述. 事实上，罗尔是从来未接受微积分新概念的数学家之一. 这并不是一种顽固态度，而是由于在一百年时间内，没有人能够不是近于神秘地来定义极限，总的看来，历史上提到罗尔时还是特别亲切，在下一章出现的一个更一般的结果已与他的名字联系在一起，而这个结果成为微积分中那些最重要的理论结果的基础.

23. 设对于在点 0 连续的某一函数 g，有 $f(x)=xg(x)$. 证明 f 在点 0 可微，并求用 g 表示的 $f'(0)$.

*24. 设 f 在点 0 可微而且 $f(0)=0$. 证明对于在点 0 连续的某一函数 g，有 $f(x)=xg(x)$. 提示：如果你写 $g(x)=f(x)/x$，将会出现什么情况？

25. 设对于 $\mathbf{N}$ 内的 n 有 $f(x)=x^{-n}$，证明

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}x^{-n-k}$$

$$=(-1)^k k!\binom{n+k-1}{n-1}x^{-n-k}, \text{ 当 } x\neq 0 \text{ 时.}$$

*26. 证明：当 f 和 g 可微且 $f(0)=g(0)=0$ 时，不可能有 $x=f(x)g(x)$. 提示：将它微分.

27. 设

(a) $f(x)=1/(x-a)^n$,

*(b) $f(x)=1/(x^2-1)$.

则 $f^{(k)}(x)$ 等于什么？

*28. 设 $f(x)=x^{2n}\sin\frac{1}{x}$，当 $x\neq 0$ 时；并设 $f(0)=0$. 证明 $f'(0),\cdots,f^{(n)}(0)$ 存在，并且 $f^{(n)}$ 在点 0 不连续.（你将遇到与第 16 题相似的基本困难.）

*29. 设 $f(x)=x^{2n+1}\sin\frac{1}{x}$，当 $x\neq 0$ 时；并设 $f(0)=0$. 证明 $f'(0),\cdots,$

$f^{(n)}(0)$存在，$f^{(n)}$在点0连续，以及$f^{(n)}$在点0不可微。

30. 用莱布尼兹记号，链式法则应写成

$$\frac{df(g(x))}{dx}=\frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=g(x)}\cdot\frac{dg(x)}{dx}.$$

通常用下列陈述替代它："设 $y=g(x)$ 和 $z=f(y)$，则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}."$$

注意，dz/dx 中的 z 表示复合函数 $f\circ g$，而在 dz/dy 中的 z 表示函数 f；不用说，dz/dy 是"一个包含 y 的式子"，而在最后答案中，需用 $g(x)$ 来代替 y. 用此公式求下列各题的 dz/dx，然后与第1题相比较.

(i) $z=\sin y,\quad y=x+x^2$.

(ii) $z=\sin y,\quad y=\cos x$.

(iii) $z=\sin u$[①]，$u=\sin x$.

(iv) $z=\sin v,\quad v=\cos u,\quad u=\sin x$.

选 题 解 答

1. (i) $(1+2x)\cdot\cos(x+x^2)$.

   (iii) $(-\sin x)\cdot\cos(\cos x)$.

   (v) $\cos\left(\frac{\cos x}{x}\right)\cdot\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$.

   (vii) $(\cos(x+\sin x))\cdot(1+\cos x)$.

2. (i) $(\cos((x+1)^2(x+2)))\cdot[2(x+1)(x+2)+(x+1)^2]$.

   (iii) $[2\sin((x+\sin x)^2)\cdot\cos((x+\sin x)^2)]\cdot 2(x+\sin x)\cdot(1+\cos x)$.

   (v) $(\cos(x\sin x))\cdot(\sin x+x\cos x)+(\cos(\sin x^2))(\cos x^2)\cdot 2x$.

   (vii) $(2\sin x\cos x\sin x^2\sin^2 x^2)+(2x\cos x^2\sin^2 x\sin^2 x^2)$

   $\quad+(4x\sin x^2\cos x^2\sin^2 x\sin x^2)$.

   (ix) $6(x+\sin^5 x)^5(1+5\sin^4 x\cos x)$.

   (xi) $\cos(\sin^7 x^7+1)^7\cdot 7(\sin^7 x^7+1)^6\cdot(7\sin^6 x^7\cdot\cos x^7\cdot 7x^6)$.

   (xiii) $\cos(x^2+\sin(x^2+\sin x^2))\cdot$

   $\quad(2x+\cos(x^2+\sin x^2)\cdot(2x+2x\cos x^2))$.

---

① 译注：为了依题意"与第1题相比较"，故将原文的"$z=\cos u$"改为"$z=\sin u$"。

(xv) $\dfrac{(1+\sin x)(2x\cos x^2\cdot\sin^2 x+\sin x^2\cdot 2\sin x\cos x)}{(1+\sin x)^2}$

$$-\frac{\cos x\sin x^2\sin^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

(xvii) $\cos\left(\dfrac{x^3}{\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}\right)\cdot$

$$\frac{3x^2\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)-x^3\left(\cos\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)\right)\cdot\left(\dfrac{3x^2\sin x-x^3\cos x}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}.$$

4. (i) $-\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$.

   (iii) $2x^2$.

5. (i) $-x^2$.

   (iii) 17.

6. (i) $f'(x)=g'(x+g(a))$.

   (iii) $f'(x)=g'(x+g(x))(1+g'(x))$.

   (v) $f'(x)=g(a)$.

7. (a) $A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$. 因当 t 满足 $r(t)=6$ 时, $r'(t)=4$, 故当 $r(t)=6$ 时 $A'(t)=2\pi\cdot 6\cdot 4=48\pi$.

   (b) 设 $V(t)$ 为在时刻 t 的体积, 则 $V(t)=4\pi r(t)^3/3$, 故当 $r(t)=6$ 时 $V'(t)=4\pi r(t)^2 r'(t)=4\pi\cdot 6^2\cdot 4=576\pi$.

   (c) 第一种方法: 因为 $A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$ 以及当 $r(t)=3$ 时 $A'(t)=5$, 故当 $r(t)=3$ 时

$$r'(t)=\frac{A'(t)}{2\pi r(t)}=\frac{5}{6\pi}.$$

这样, 当 $r(t)=3$ 时

$$V'(t)=4\pi r(t)^2 r'(t)$$
$$=4\pi\cdot 9\cdot\frac{5}{6\pi}=30.$$

为了应用第二种方法, 我们首先注意, 设

$$f(t)=A(t)^{3/2}=\sqrt{A(t)^3},$$

那么应用习题九, 3 和链式法则, 得

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{A(t)^3}}\cdot 3A(t)^2A'(t)$$

$$=\frac{1}{2A(t)^{3/2}}3A(t)^2A'(t)$$

$$=\frac{3}{2}A(t)^{1/2}A'(t)$$ （正如我们所猜测的）.

现在

$$V(t)=\frac{4\pi r(t)^3}{3}=\frac{4\pi[r(t)^2]^{3/2}}{3}$$

$$=\frac{4[\pi r(t)^2]^{3/2}}{3\pi^{1/2}}$$

$$=\frac{4A(t)^{3/2}}{3\pi^{1/2}}.$$

于是

$$V'(t)=\frac{4}{3\pi^{1/2}}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{A(t)}A'(t)$$

$$=\frac{2}{\pi^{1/2}}\cdot\pi^{1/2}r(t)A'(t)$$

$$=2\cdot 3\cdot 5=30.$$

8. (i) $(f\circ h)'(0)=f'(h(0))\cdot h'(0)=f'(3)\cdot\sin^2(\sin 1)$

$$=\left(6\sin\frac{1}{3}-\cos\frac{1}{3}\right)\sin^2(\sin 1)$$

(iii) $\alpha'(x^2)=h'(x^4)\cdot 2x^2=\sin^2(\sin(x^4+1))\cdot 2x^2.$

10. 链式法则意味着

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=-\frac{1}{g(x)^2}\cdot g'(x).$$

30. (i) $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(\cos y)\cdot(1+2x)=(\cos(x+x^2))\cdot(1+2x).$

(iii) $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\cos u)\cdot(\cos x)=(\cos(\sin x))\cdot\cos x.$

第十一章　导数的意义

本章的一个目的是要说明：我们花时间来学习求函数的导数是有道理的. 正如我们将要看到的，只要知道一些关于 f' 的信息，就能知道不少关于 f 的信息. 由 f' 的信息推断出关于 f 的信息，要做一些艰难的工作. 不过，我们将从一个实在很容易的定理开始.

本定理涉及函数在一区间上的最大值的问题. 虽然我们在第七章里曾经非正式地用过这个名词，但它值得精确地并且更一般地加以描述.

定义

> 设 f 为一函数，而 A 为包含在 f 的定义域内的一个数集. x 是 A 内的一点，若对于 A 内所有的 y 有
>
> $$f(x)\geqslant f(y),$$
>
> 则点 x 称为 f 在 A 上的**最大点**. 数 $f(x)$ 称为 f 在 A 上的**最大值**（我们也说“f 在点 x 有它在 A 上的**最大值**”）.

注意 f 在 A 上的最大值可以是对应于几个不同 x 的 $f(x)$（图 1）；换言之，一个函数 f 在 A 上可以有几个不同的最大点，尽管它

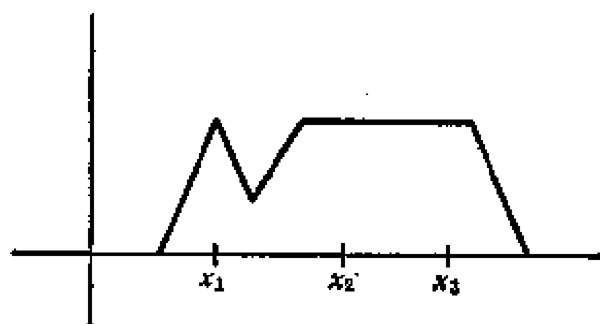


图　1

至多只有一个最大值. 通常我们对 A 为闭区间 $[a, b]$ 的情形感兴趣; 如果 f 是连续的, 则第七章定理 3 保证 f 在 $[a, b]$ 上的确有一最大值.

f 在 A 上最小值的定义留给你们来下.(也可定义如下: 若 $-f$ 在点 x 有它在 A 上的最大值, 则 f 在点 x 有它在 A 上的最小值.)

我们现在已为一个定理作好准备, 此定理甚至不依赖于最小上界的存在.

定理 1 设 f 为定义在 (a, b) 上的任一函数. 若 x 为 f 在 (a, b) 上的一个最大(或最小)点, 并且 f 在点 x 可微, 则 $f'(x)=0$.(注意, 我们没有假定 f 在其他点的可微性甚至连续性.)

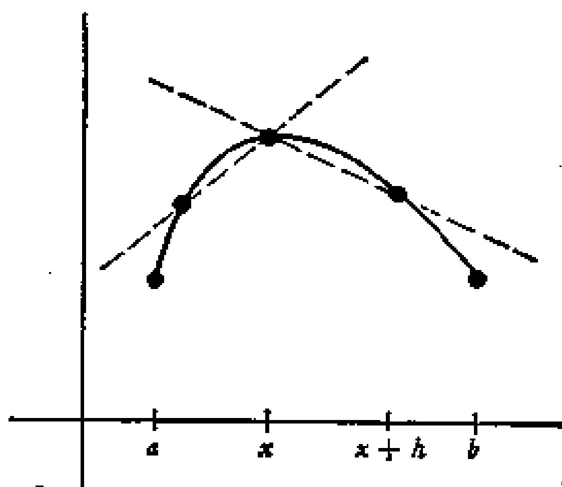


图 2

证明 考虑 f 在点 x 有最大值的情形.(图 2 说明整个论证的简单想法——通过 $(x, f(x))$ 往左边画的割线有 $\geqslant 0$ 的斜率, 而通过 $(x, f(x))$ 往右边画的割线有 $\leqslant 0$ 的斜率.)解析论证如下.

设 h 为能使 $x+h$ 在 (a, b) 内的任意数, 则

$$f(x) \geqslant f(x+h),$$

因为在点 x, f 有 (a, b) 上的最大值, 这意味着

$$f(x+h)-f(x) \leqslant 0.$$

于是, 如果 $h>0$, 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0,$$

从而

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0.$$

另一方面, 如果 $h<0$, 我们有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0,$$

于是 $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

根据假设，f 在点 a 可微，因此这两个极限必定相等，事实上等于 $f'(x)$. 这意味着

$$f'(x)\leqslant 0 \text{ 和 } f'(x)\geqslant 0,$$

由此得 $f'(x)=0$.

f 在点 x 有最小值的情形留给你们来证明（给出简短的证明）.

注意（图 3）在此定理的叙述中，我们不能用 $[a, b]$ 代替 (a, b)（除非我们在假设中加上 x 在 (a, b) 内这个条件）.

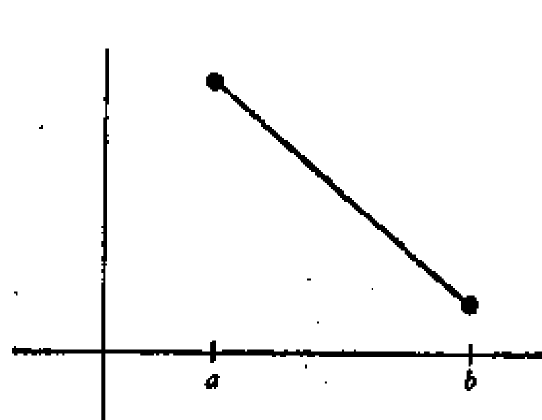


图 3

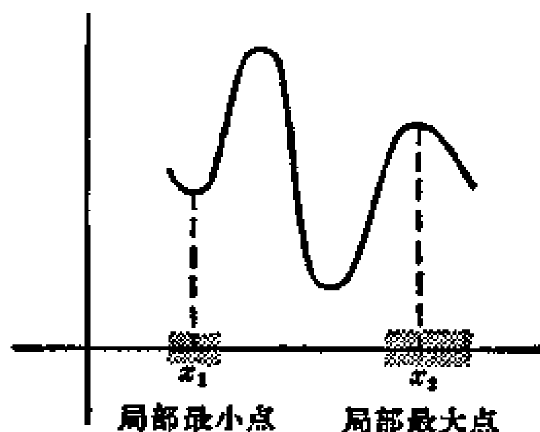


图 4

因 $f'(x)$ 只依赖于 f 在 x 附近的值，所以怎样得到定理 1 的更强的形式，几乎是显然的. 我们从图 4 所说明的定义开始.

定义

> 设 f 为一函数，A 为包含在 f 的定义域内的一个数集. 设 x 为 A 内一点，并有某一 $\delta>0$，使得 x 为 f 在 $A\cap(x-\delta, x+\delta)$ 上的最大（最小）点，则 x 称为 f 在 A 上的**局部最大（最小）点**①.

① 译注：局部最大（最小）点在有些书中被称为极大（极小）点.

定理 2 设 f 定义于 (a, b) 且在点 x 有一局部最大（或最小）值，且在点 x 可微，则 $f'(x)=0$.

证明 你会看出为什么这是定理 1 的一个简单的应用.

定理 2 的逆定理不成立——即使 x 不是 f 的局部最大或最小点，$f'(x)$ 也可能等于 0. 最简单的例子是函数 $f(x)=x^3$，这时，虽然 $f'(0)=0$，但 f 在任何点都没有局部最大或最小值.

微积分中最普遍的误解大概与函数 f 在使 $f'(x)=0$ 的点 x 附近的性态有关. 前段所述的要点，容易被有些人（他们总希望世界比它的本来面目要简单）忘掉，为此我们重复一下这个要点：定理 2 的逆定理不成立——条件 $f'(x)=0$ 不意味着 x 为 f 的局部最大或最小点. 正是由于这个缘故，采用了特殊的名词来描述满足条件 $f'(x)=0$ 的数 x.

定义

> 函数 f 的临界点是使
> $$f'(x)=0$$
> 的数 x. 数 $f(x)$ 本身称为 f 的临界值.

f 的临界值以及几个其他的数，实际是求已知函数 f 的最大值和最小值时所必须考虑的. 对于未入门的读者来说，求函数的最大值和最小值，是微积分的最有趣的一个方面. 不可否认，这类习题是有趣的（直到你做完了成百题）.

让我们首先考虑求 f 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值或最小值的问题.（这时，如果 f 是连续的，那么至少能确信总存在最大值和最小值.）为了找出 f 的最大值和最小值，必须考虑三种点：

(1) 在 $[a, b]$ 内 f 的临界点.

(2) 端点 a 和 b.

(3) 在 $[a, b]$ 内，但使 f 在该点不可微的点 x.

设 x 为 f 在$[a,b]$上的最大点或最小点，则 x 必为上述三种点的一种：因若 x 不是第二或第三种点，则 x 在(a,b)内且 f 在点 x 是可微的，因此，由定理 1 知 $f'(x)=0$，这意味着 x 是第一种点.

如果有许多属于这三种类型的点，则求 f 的最大值和最小值仍然是一个无希望的问题，但若只有几个临界点，f 不可微的点也只有几个，则求最大值和最小值的步骤是很直截了当的：我们只要求出与满足 $f'(x)=0$ 的各个 x 相对应的 $f(x)$，与 f 不可微的各点 x 相对应的 $f(x)$，最后还有 $f(a)$和 $f(b)$. 这些值中的最大者就是 f 的最大值，而最小者就是最小值. 举一个简单的例子.

假如我们希望求函数

$$f(x)=x^3-x$$

在区间$[-1,2]$上的最大值和最小值. 首先，我们有

$$f'(x)=3x^2-1,$$

于是当 $3x^2-1=0$ 时，即当

$$x=\sqrt{1/3} \text{ 或 } -\sqrt{1/3}$$

时，$f'(x)=0$. 数$\sqrt{1/3}$和$-\sqrt{1/3}$都在$[-1,2]$内，因此，第一种可能有最大值和最小值的点就是

$$(1)\ \sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}.$$

第二种点是区间的端点

$$(2)\ -1, 2.$$

第三种点的集是空的，因为 f 处处可微. 最后一步是计算

$$f(\sqrt{1/3})=(\sqrt{1/3})^3-\sqrt{1/3}=\frac{1}{3}\sqrt{1/3}-\sqrt{1/3}$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1/3},$$

$$f(-\sqrt{1/3})=(-\sqrt{1/3})^3-(-\sqrt{1/3})$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1/3}+\sqrt{1/3}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1/3},$$

$$f(-1)=0,$$

$$f(2)=6.$$

显然最小值是$-\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$，出现在点$\sqrt{1/3}$，而最大值是 6，出现在点 2.

这种方法，如果适用，总能找出连续函数在一闭区间上的最大值和最小值. 如果我们所考虑的函数不连续，或我们要在一开区间上或整条直线上找最大值或最小值，那么我们甚至无法预先肯定最大值和最小值的存在，因而由这种步骤所得到的全部信息就什么也说明不了. 但是只要动点脑筋，往往就能揭示出问题的实质. 在第七章中，我们就解过这样一个问题，当时我们指出，如果 n 为偶数，则函数

$$f(x)=x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}$$

在整条直线上有一最小值. 这证明最小值必定出现在满足

$$0=f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_{1}$$

的某个数 x. 如果我们能解这一方程，并比较与所求得的这些 x 相对应的 $f(x)$的值，实际上就能求出 f 的最小值. 再举一例可能有帮助. 假设我们希望求函数

$$f(x)=\frac{1}{1-x^{2}}$$

在开区间$(-1, 1)$上的最大值和最小值(如果它们存在的话). 我们有

$$f'(x)=\frac{2x}{(1-x^{2})^{2}},$$

于是只有当 $x=0$ 时 $f'(x)=0$. 我们立刻可以看出，当 x 接近 1 或 -1 时，$f(x)$ 的值可以任意增大，因此，f 当然没有最大值. 这个说明也使我们容易看出 f 在点 0 有一最小值. 我们只要注意（图 5），存在满足

$$-1<a<0 \text{ 和 } 0<b<1$$

的数 a 和 b，使得当

$$-1<x\leqslant a \text{ 和 } b\leqslant x<1$$

时有 $f(x)>f(0)$. 这意味着 f 在 $[a,b]$ 上的最小值等于 f 在整个 $(-1,1)$ 上的最小值. 现在在 $[a,b]$ 上的最小值或者出现在 0（$f'=0$ 的唯一位置），或者出现在点 a 或 b，而点 a 和 b 已被排除，所以最小值是 $f(0)=1$.

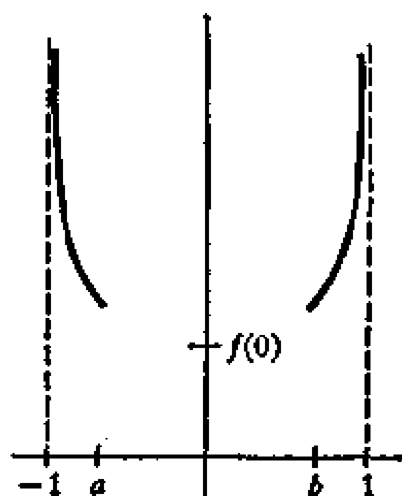
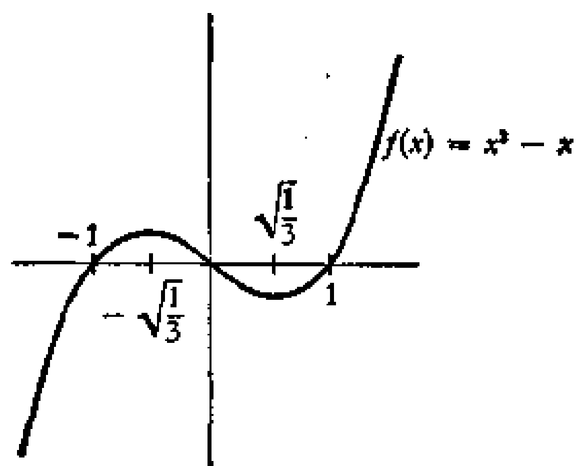


图 5

在解这些问题时，我们故意不画出 $f(x)=x^3-x$ 和 $f(x)=1/(1-x^2)$ 的图形，但只要你不是依赖图形去证明什么，那么画图（图 6）就不是蒙混. 事实上，我们准备讨论一种绘函数草图的方



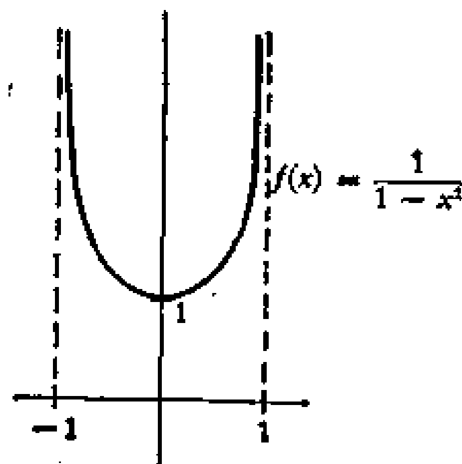


图 6

法，而这个草图确实提供了用以讨论最大值和最小值的足够的资料——其实我们甚至能求出局部的最大值和最小值．这种方法免不了要考虑 $f'(x)$ 的正负，还要依赖某些更深的定理．

迄今所证明的关于导数的定理，都是用关于 f 的信息给出关于 f' 的信息．即使定理1也是这样，尽管这个定理有时能用来确定关于 f 的某种信息，即最大和最小的位置．最初提出导数时，我们强调过，$f'(x)$ 不等于对应于任何特定 h 的 $[f(x+h)-f(x)]/h$，而只是当 h 趋近0时这些数的极限；很难用这个事实来达到从关于 f' 的信息推断出关于 f 的信息的目的．下列问题能最简单地又最使人感到灰心地说明所遇到的困难：若对于所有的 x 有 $f'(x)=0$，则 f 是否必定为一常值函数？不可想象 f 怎么能是别的函数，而且这种判定被物理的解释所加强——如果质点的速度恒为0，该质点当然一直不动！然而，很难着手证明只有常值函数对于所有的 x 满足 $f'(x)=0$．$f'(x)=0$ 的假设只是意味着

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

而我们如何能用关于极限的信息来导出关于函数的信息，并不是显而易见的．

对于所有的 x 有 $f'(x)=0$ 时，f 为常值函数．这个事实以及其他类似的事实，都可由一个结果较强的基本定理（称为中值定理）导出．由图7看来，似乎若 f 在 $[a,b]$ 上可微，则在 (a,b) 内有某个 x 使

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

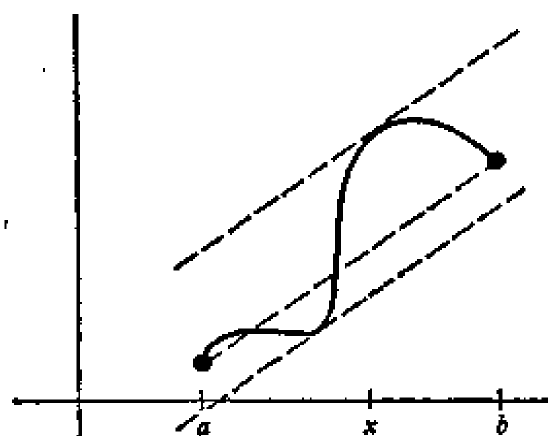


图 7

从几何上说，这意味着某一切线平行于 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的连

线. 中值定理断定下列命题成立：在(a, b)内有某个x，使f在点x的瞬时变化率$f'(x)$，正好等于f在$[a, b]$上的平均的变化率，这个平均变化率为$[f(b)-f(a)]/[b-a]$.（例如，假如你一小时走了60英里，那么你在某一时刻的快慢一定刚好是每小时走60英里.）本定理是微积分的最重要的理论工具之一——也许是关于导数的最深刻的结果. 经这么一说，你也许会断定它的证明一定很难，但是你错了.本书难的定理在第七章中早已出现. 如果你想自己证明中值定理，大概要失败. 但这既不能成为该定理难证的根据，也不是什么惭愧之事. 历史上第一次证明这个定理是一个功劳，但是今天我们能提供一个很简单的证法. 先由一个很特殊的情形开始，是有帮助的.

定理 3（罗尔定理） 若f在$[a, b]$上连续，在(a, b)上可微，并且$f(a)=f(b)$，则在(a, b)内存在数x使$f'(x)=0$.

证明 由f在$[a, b]$上的连续性知f在$[a, b]$上有最大值和最小值.

首先假如最大值出现在(a, b)内的一点x. 那么由定理1知$f'(x)=0$，于是，定理得证（图8）.

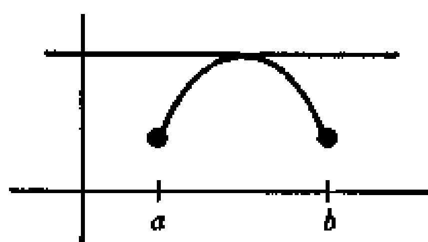


图 8

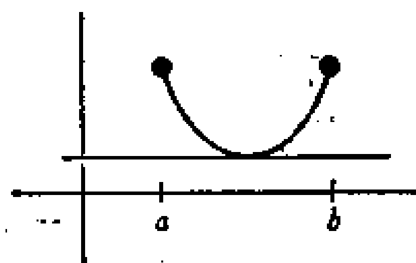


图 9

其次假如f的最小值出现在(a, b)内的某一点x. 于是再次由定理1知$f'(x)=0$（图9）.

最后假如最大值和最小值都出现在端点. 因$f(a)=f(b)$，f的最大值和最小值相等，故f为常值函数（图10），而对于常值函数，我们可在(a, b)内选取任意x.

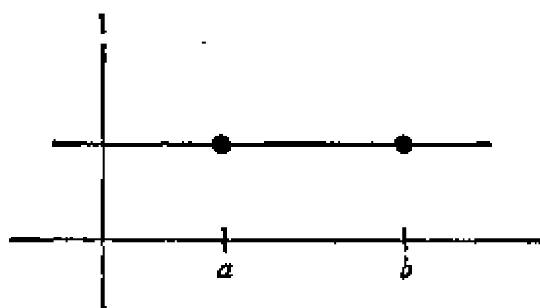


图 10

注意: 为了应用定理 1，我们的确需要假设 f 在 (a,b) 上处处可微. 没有这个假设，这个定理就不成立(图 11).

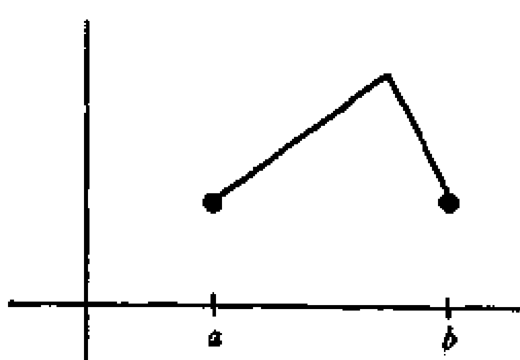


图 11

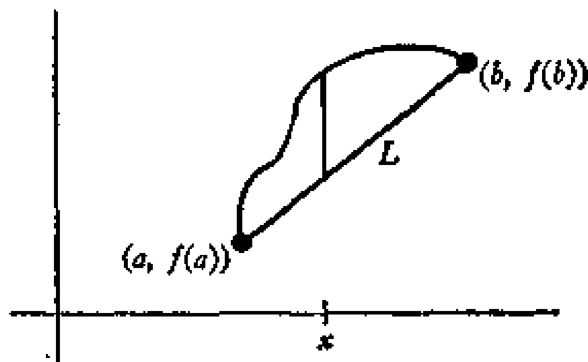


图 12

你也许会觉得奇怪，为什么象罗尔定理这样容易证明的一个定理还要给以特殊的命名. 其理由是，虽然罗尔定理是中值定理的一个特殊情形，但由它又能得出中值定理的一个简单证法. 为了证明中值定理，我们将罗尔定理应用于这样的函数，该函数给出图 12 所示的直立线段的长度，它等于 $f(x)$ 与 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 间连线 L 在点 x 的高度之差. 因为 L 是

$$g(x)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)+f(a)$$

的图形，我们要着眼于

$$f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)-f(a).$$

实际上，常数 $f(a)$ 是无关紧要的.

定理 4 (中值定理) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 上可微，则在 (a,b) 内存在着一数 x 使

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明 令

$$h(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

显然，h 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 上可微，以及

$$h(a)=f(a),$$

$$h(b)=f(b)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](b-a)$$

$$=f(a).$$

这样，我们可将罗尔定理应用于 h，从而断定在 (a,b) 内存在着某个 x 使

$$0=h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

于是

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注意：中值定理还是前面定理的模样——由关于 f 的信息得出关于 f' 的信息。然而，这个信息是很强的，它使我们现在能进入另一方向。

推论 1 若 f 定义在一区间上，且对于该区间内所有的 x 有 $f'(x)=0$，则在该区间上 f 是常数。

证明 设 a 和 b 为该区间内的任意两点，且 $a\neq b$。则在 (a,b) 内存在着某个 x 使

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

但对于该区间内所有的 x 有 $f'(x)=0$，故

$$0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

从而 $f(a)=f(b)$. 于是在该区间内任意两点，f 的值是相同的，即在该区间上 f 为常数.

当然，对于定义在两个区间或更多区间上的函数，推论 1 不成立(图 13).

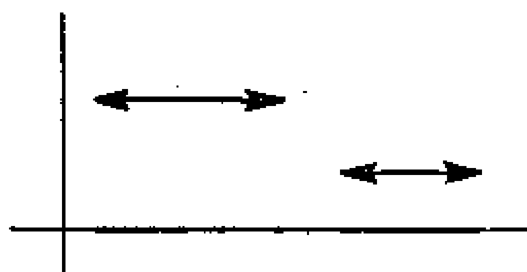
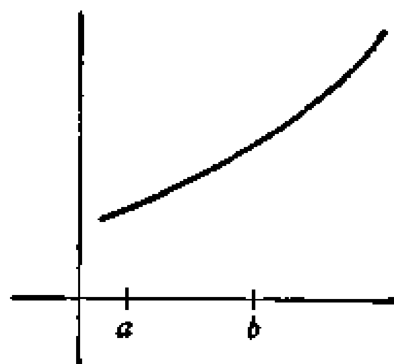


图 13

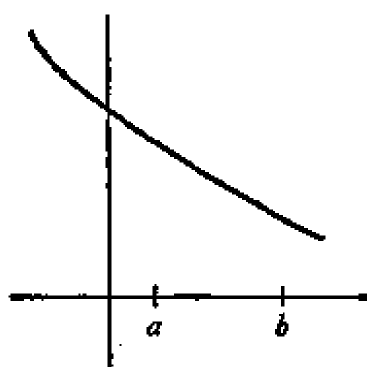
推论 2 若 f 和 g 定义在同一区间上，且对于该区间内所有的 x 有 $f'(x)=g'(x)$, 则存在着某个数 c 使 $f=g+c$.

证明 对于该区间内所有的 x, 我们有 $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$, 于是，由推论 1 知，存在一个数 c 使 $f-g=c$.

叙述下一个推论，要用一个图 14 说明的术语.



(a) 递增函数



(b) 递减函数

图 14

定义

> 若对于一区间内满足 $a<b$ 的任意两个数 a 和 b, 有 $f(a)<f(b)$, 则称此函数 f 在该区间上是**递增的**. 若对于一区间内所有满足 $a<b$ 的 a 和 b 有 $f(a)>f(b)$, 则称此函数在该区间上是**递减的**. (我们往往简单地说 f 是递增或递减的，在此情形中，将这个区间理解为 f 的定义域.)

推论 3 如果对于一区间内所有的 x 有 $f'(x)>0$，则 f 在该区间上是递增的；如果对于该区间内所有的 x 有 $f'(x)<0$，则 f 在该区间上是递减的.

证明 考虑 $f'(x)>0$ 的情形. 设 a 和 b 是在该区间内的两点并且 $a<b$，则在 (a,b) 内存在着某个 x 使

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

但对于 (a,b) 内所有的 x 有 $f'(x)>0$，所以

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0.$$

因 $b-a>0$，故 $f(b)>f(a)$.

对于所有的 x 有 $f'(x)<0$ 的情形，留给你们来证明.

注意，虽然推论 1 和推论 2 的逆都成立（并且是显而易见的），但推论 3 的逆不成立. 如果 f 是递增的，容易看出，对于所有的 x 有 $f'(x)\geqslant 0$，而且对于某个 x，等号可能成立（考虑 $f(x)=x^3$）.

推论 3 提供了足够的信息，使得只需绘出最少数量的点，便能得出函数图形的大体形象. 再次考虑函数 $f(x)=x^3-x$. 我们有

$$f'(x)=3x^2-1.$$

我们已经提到，当 $x=\sqrt{1/3}$ 和 $x=-\sqrt{1/3}$ 时 $f'(x)=0$，并且还可以对所有其他的 x 定出 $f'(x)$ 的正负号. 注意，只有当

$$3x^2>1,$$

$$x^2>\frac{1}{3},$$

$$x>\sqrt{1/3} \text{ 或 } x<-\sqrt{1/3}$$

时，$3x^2-1>0$；这样，只有当

$$-\sqrt{1/3}<x<\sqrt{1/3}$$

时，$3x^2-1<0$. 于是当 $x<-\sqrt{1/3}$ 时 f 是递增的，在 $-\sqrt{1/3}$ 和 $\sqrt{1/3}$ 之间时 f 是递减的，而当 $x>\sqrt{1/3}$ 时 f 再次递增. 将此信

息结合下列事实

(1) $f(-\sqrt{1/3})=\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,

$f(\sqrt{1/3})=-\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,

(2) $f(x)=0$, 当 $x=-1,0,1$ 时,

(3) 当 x 越大时 $f(x)$ 越大, 而当 x 负得越大时 $f(x)$ 负得越大,

就能绘出相当接近真实的图形(图 15).

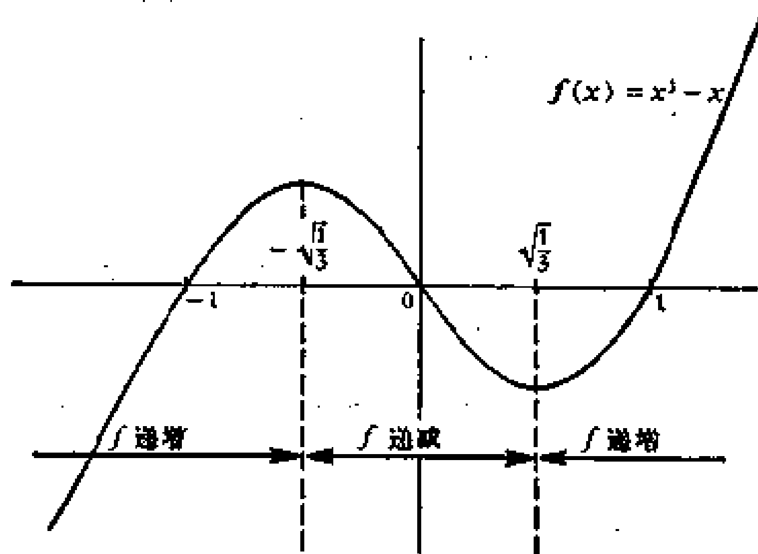


图 15

顺便注意, 甚至可以无需检查 f' 的符号就能找出 f 递增和递减的区间. 例如, 因为 f' 是连续的, 并且只在 $-\sqrt{1/3}$ 和 $\sqrt{1/3}$ 处等于零, 我们知道在区间 $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$ 上 f' 恒有同一符号. 因 $f(-\sqrt{1/3})>f(\sqrt{1/3})$, 故知在此区间上 f 递减. 同样地, 在 $(\sqrt{1/3},\infty)$ 上 f' 恒有同一符号, 并且对于大的 x, $f(x)$ 很大, 因而在 $(\sqrt{1/3},\infty)$ 上 f 必定递增. 另外一点值得注意: 如果 f' 是连续的, 则在两相邻临界点之间的区间上, f' 的符号可以简单地由该区间内的任一 x 处 $f'(x)$ 的符号来确定.

我们所绘的 $f(x)=x^3-x$ 的草图包含足够的信息, 使我们能够有把握地说 $-\sqrt{1/3}$ 是一局部最大点, 而 $\sqrt{1/3}$ 是一局部最小

点. 事实上,对于判定一临界点是一局部最大点,还是一局部最小点,或者两者都不是,我们可以给出一般的方法(图 16):

(1) 若在 x 左边的某个区间内 $f'>0$,而在 x 右边的某个区间内 $f'<0$,则 x 为一局部最大点.

(2) 若在 x 左边的某个区间内 $f'<0$,而在 x 右边的某个区间内 $f'>0$,则 x 为一局部最小点.

(3) 若在 x 左、右两边的某个区间内,f' 的符号相同,则 x 既不是局部最大点也不是局部最小点.

(没有必要记住这些规则——你总能自己绘出其图形.)

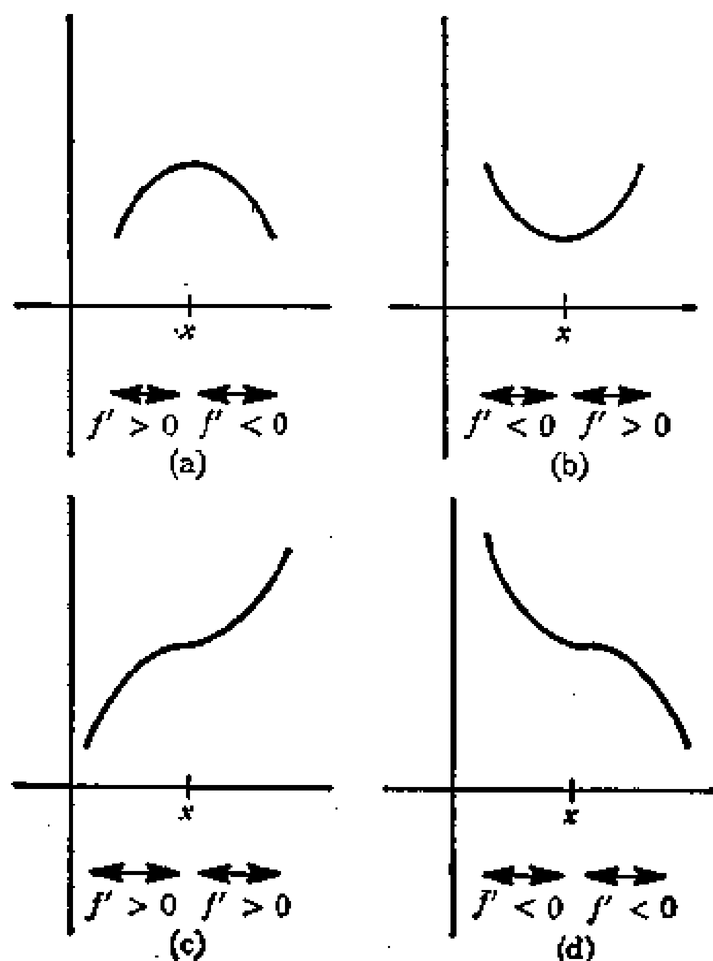


图 16

多项式函数都可以用这种方法来分析,并且甚至可能描绘这类函数的图形的一般形状. 作为开始,我们需要在习题三,7 中曾

经提到的结果:若

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

则 f 至多有 n 个"根",即至多有 n 个数使 $f(x)=0$. 虽然这实际上是一代数定理，但可用微积分给出一个容易的证法. 注意，若 x_1 和 x_2 是 f 的根(图 17)，则 $f(x_1)=f(x_2)=0$，于是由罗尔定理知，在 x_1 和 x_2 之间有一数 x 使 $f'(x)=0$. 这意味着,若 f 有 k 个不同的根 $x_1<x_2<\cdots<x_k$，则 f' 至少有 $k-1$ 个不同的根:一个在x_1 和 x_2 之间,一个在 x_2 和 x_3 之间，等等. 现在容易用归纳法证明多项式函数

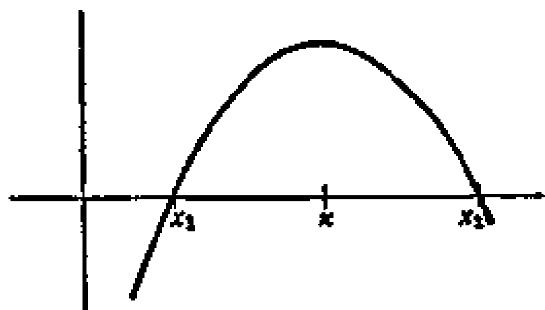


图 17

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

至多有 n 个根: 对于 $n=1$，这个陈述当然成立. 如果我们假设它对于 n 也成立,则多项式

$$g(x)=b_{n+1}x^{n+1}+b_nx^n+\cdots+b_0$$

不可能有超过 $n+1$ 个根，因为如能超过，则 g' 将有 n 个以上的根.

有了这个信息,不难描绘

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

的图形.

其导数,作为 $n-1$ 次多项式函数,至多有 $n-1$ 个根. 所以 f 至多有 $n-1$ 个临界点. 当然,一个临界点不一定是一局部最大点或最小点,但无论如何,若 a 和 b 是 f 的相邻临界点,则因 f' 是连续的，故在(a,b)上 f' 或保持正或保持负，因此在(a,b)上 f 不是递增就是递减. 于是 f 至多有 n 个递增或递减的区域.

作为一个特例,考虑下面的函数

$$f(x)=x^4-2x^2.$$

因 $$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1),$$
故 f 的临界点是 $-1, 0,$ 和 1，并且

$$f(-1)=-1,$$
$$f(0)=0,$$
$$f(1)=-1.$$

在临界点之间的区间上 f 的性态可用以前提到的方法中的一种来确定. 特别，我们只要考察 $f'(x)$ 的表示式，便能确定在这些区间上 f' 的符号. 另一方面，光由这三个临界值我们就能看出在 $(-1, 0)$ 上 f 递增，在 $(0, 1)$ 上 f 递减(图 18). 为了确定在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, \infty)$ 上 f' 的符号，我们可以计算

$$f'(-2)=4\cdot(-2)^3-4\cdot(-2)=-24,$$
$$f'(2)=4\cdot 2^3-4\cdot 2=24,$$

从而断定在 $(-\infty, -1)$ 上 f 是递减的，而在 $(1, \infty)$ 上 f 是递增的. 这些结论也可以由下列事实得到：对于很大的 x 以及负得很大的 x，$f(x)$ 都是很大的.

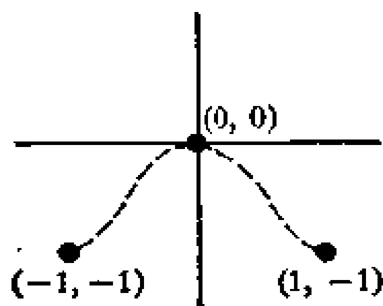


图 18

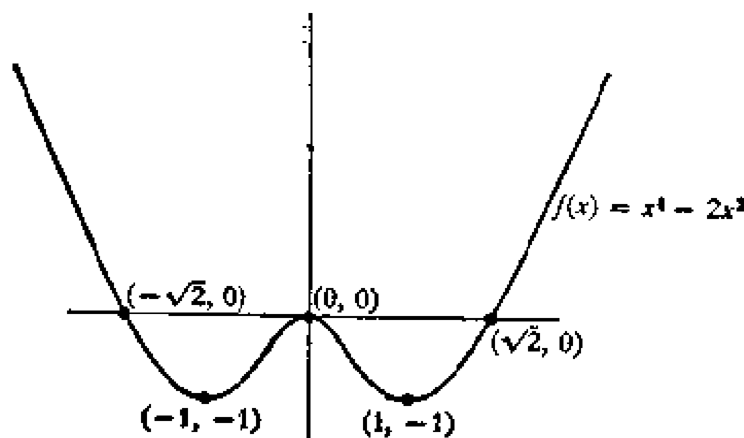


图 19

我们已经能绘出该图形的大概形状；另外两点信息，提供了最后一笔(图 19). 第一，当 $x=0, \pm\sqrt{2}$ 时，容易确定 $f(x)=0$；第二，f 显然是偶函数，$f(x)=f(-x)$，故其图形关于直立轴是对称的. 在图 15 中绘出的函数 $f(x)=x^3-x$ 是奇函数，$f(x)=$

$-f(-x)$，因此，它关于原点对称．一开始就注意到这些情况，作图的工作可以省掉一半．

在本章和后继各章中的有些问题需要你绘出函数的草图．在每种情形中，你应确定

(1) f 的临界点，

(2) f 在临界点的值，

(3) 在临界点之间的区域内 f' 的符号（若此符号还不清楚），

(4) 使 $f(x)=0$ 的数 x（如果可能的话），

(5) 当 x 变得很大或负很大时 $f(x)$ 的性态（如果可能的话）．

最后，记住迅速检查该函数是否奇函数或偶函数，可以节省很多工作量．

这种分析，如果仔细进行，往往能显露出图形的基本形状，但有时有些特点需要稍加思考．这些特点虽然不可能全部预料到，但有一个情况往往是很重要的．如果 f 在某些点无定义（例如，f 为分母在某些点等于零的有理函数），那么在这些点附近 f 的性态必须确定．

例如，考虑下列函数

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1},$$

它在 1 处无定义．我们有

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2x-2)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

于是　　(1) f 的临界点是 0，2．

另外，　(2) $f(0)=-2$，

$f(2)=2$．

因为 f 不在整个区间 $(0,2)$ 上有定义，所以必须分别在区间

(0, 1)和(1, 2)上以及在区间$(-\infty, 0)$和$(2, \infty)$上确定f'的符号. 我们在这些区间的每个区间中选取特定的点, 或者只要注意f'的式子, 就能确定f'的符号. 无论用哪一种方法, 我们都能得到

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & f'(x)>0 \quad \text{当 } x<0 \text{ 时},\\
& f'(x)<0 \quad \text{当 } 0<x<1 \text{ 时},\\
& f'(x)<0 \quad \text{当 } 1<x<2 \text{ 时},\\
& f'(x)>0 \quad \text{当 } 2<x \text{ 时}.
\end{aligned}
$$

最后, 我们必须确定x变得很大或负的很大时, 以及当x趋近1时$f(x)$的性态(此情况还将为我们提供确定f递增和递减的区域的另一种方法). 为了检查当x变大时的性态, 我们写

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1};$$

显然当x很大时$f(x)$接近$x-1$(并且比$x-1$稍微大些), 而当x为很大的负数时$f(x)$接近$x-1$(但比$x-1$稍微小些). 在1附近f的性态也容易确定, 因为

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+2)=1\neq 0,$$

所以当x由上方趋近1时, 分数

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

变得很大, 当x由下方趋近1时, 这个分数变得负的很大.

虽然所有这些情况好象有点支离破碎, 而只有一个方法能把它合在一起(图 20); 相信你能说明图形的每一特点.

当绘出此草图之后, 我们注意到它好象是把一个奇函数移动1单位后的图形, 而下式

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\frac{(x-1)^2+1}{x-1}$$

说明情况确实如此. 这种特点只有在你由其他信息弄清了图形的

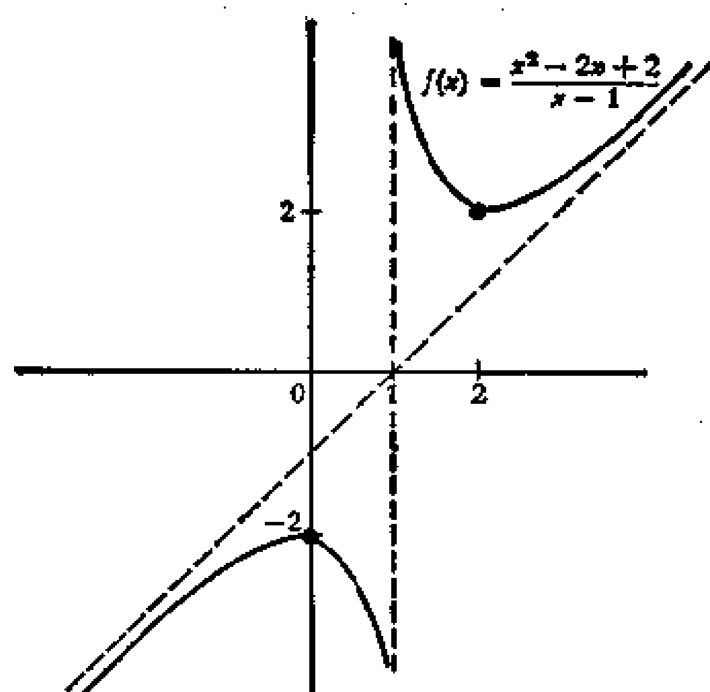


图 20

大致轮廓之后，才得以研究.

虽然函数的局部最大和最小的位置，总能在详细地绘出它的图形后表现出来，但通常无需这么做．有一种判断局部最大和最小的通俗方法，这种方法只依赖函数在其临界点的性态.

定理 5 设 $f'(a)=0$．若 $f''(a)>0$，则 f 在 a 处有一局部最小值；若 $f''(a)<0$，则 f 在 a 处有一局部最大值.

证明 根据定义

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}.$$

因为 $f'(a)=0$，故上式可以写成

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{h}.$$

现在假设 $f''(a)>0$．则对于足够小的 h，$f'(a+h)/h$ 必定是正的．因此：

对于足够小的 $h>0$，$f'(a+h)$ 必定是正的；而对于足够小的 $h<0$，$f'(a+h)$ 必定是负的.

这意味着(推论 3) 在 a 右边的某区间内 f 是递增的，而在 a 左边的某区间内 f 是递减的. 因此，f 在 a 处有一局部最小值.

关于 $f''(a)<0$ 的情形的证明是类似的.

定理 5 可以应用于曾经考虑过的函数 $f(x)=x^3-x$. 我们有

$$f'(x)=3x^2-1,$$
$$f''(x)=6x.$$

在临界点 $-\sqrt{1/3}$ 和 $\sqrt{1/3}$, 我们有

$$f''(-\sqrt{1/3})=-6\sqrt{1/3}<0,$$
$$f''(\sqrt{1/3})=6\sqrt{1/3}>0.$$

因此，$-\sqrt{1/3}$ 是一局部最大点，而 $\sqrt{1/3}$ 是一局部最小点.

虽然定理 5 对于多项式函数很有用，但许多函数的二阶导数较复杂，以致考虑一阶导数的符号会更容易些. 另外，如果 a 为 f 的一个临界点，有可能出现 $f''(a)=0$. 在这种情况，定理 5 提供不了任何信息；a 可能是一局部最大点或一局部最小点或两者都不是，如下列函数

$$f(x)=-x^4, f(x)=x^4, f(x)=x^5$$

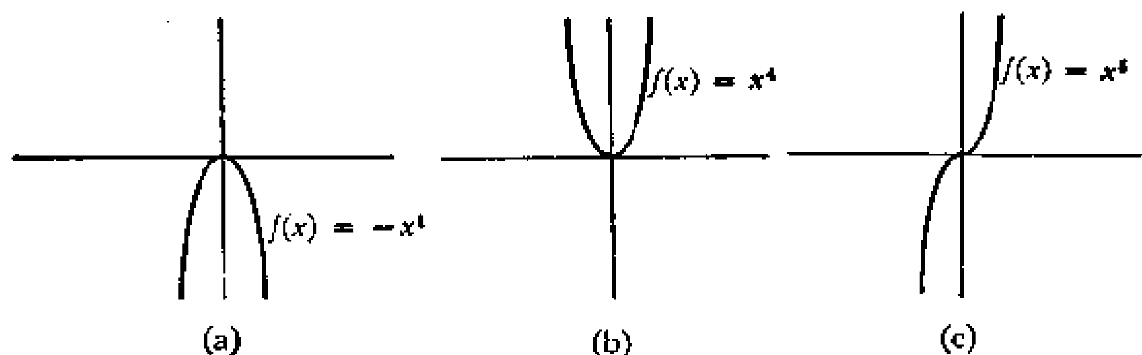


图 21

的图形(图 21)所示. 在每种情形中，虽然 $f'(0)=f''(0)=0$, 但在第一种情形中，0 是一局部最大点；在第二种情形中，0 是一局部最小点；而在第三种情形中，0 既不是局部最大点也不是局部最小点. 这个问题将在第四部分里继续进一步研究.

有趣的是我们注意到定理 5 自动地证明它的部分逆定理.

定理 6 假设 $f''(a)$存在. 若 f 在 a 处有一局部最小值,则 $f''(a)\geqslant 0$;若 f 在 a 处有一局部最大值,则 $f''(a)\leqslant 0$.

证明 假设 f 在 a 处有一局部最小值. 如果 $f''(a)<0$, 则由定理 5 知, f 在 a 处也将有一局部最大值. 于是在包含 a 的某个区间内 f 将为常数, 于是 $f''(a)=0$, 是一矛盾. 因而我们必然有 $f''(a)\geqslant 0$.

局部最大值的情形可以同样证明.

(定理 5 的这个部分逆定理是我们所能希望的最好的结果: $\geqslant$ 和 $\leqslant$ 号不能用 $>$ 和 $<$ 来代替, 如函数 $f(x)=x^4$ 和 $f(x)=-x^4$ 所示.)

本章的剩余部分里,不是解决图形的绘法或最大和最小问题,而是讲中值定理的三个推论. 第一个是简单而又漂亮的定理,它在第十五章里将起重要作用, 并且也阐明在以前各章中所出现的许多例子.

定理 7 假设 f 在 a 处连续, 且对于在包含 a 的某个区间内的一切 x(可能 $x=a$ 除外), $f'(x)$存在. 另外,假设 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 存在, 则 $f'(a)$也存在,并且

$$f'(a)=\lim_{x\to a}f'(x).$$

证明 根据定义,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

对于足够小的 $h>0$, 函数 f 在$[a, a+h]$上连续, 并且在$(a, a+h)$上可微(对于足够小的 $h<0$, 类似的论断也成立). 由中值定理知,在$(a, a+h)$内有一数 α_h 使

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(\alpha_h).$$

现在当 h 趋近 0 时 α_h 趋近 a, 因为 α_h 是在 $(a, a+h)$ 之内. 又因 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 存在, 故

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}f'(\alpha_h)=\lim_{x\to a}f'(x).$$

(最后一步, 我们处理得多少有点不够形式化, 最好用严格的 ε-δ 语言来证明.)

即使 f 是一个处处可微的函数, 但 f' 仍然可能是不连续的. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

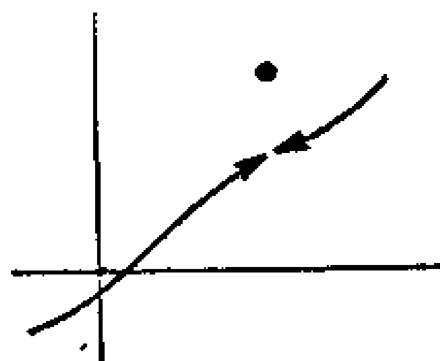


图 22

依照定理 7, f' 的图形无论如何不可能呈现如图 22 所示的这种形式的不连续性. 第 39 题略述另外一个很漂亮的定理的证明, 该定理给出关于函数 f' 的更多的信息.

下一个定理是中值定理的推广, 之所以对它感兴趣, 主要是因为它有用.

定理 8 (柯西中值定理) 设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 上可微, 则在 (a, b) 内存在一数 x, 使得

$$[f(b)-f(a)]g'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x).$$

(如果 $g(b)\neq g(a)$, 且 $g'(x)\neq 0$, 这个方程可以写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注意, 如果对于所有的 x 有 $g(x)=x$, 则 $g'(x)=1$, 从而我们得到中值定理. 另一方面, 将中值定理分别应用于 f 和 g, 我们得到, 在 (a, b) 内存在 x 和 y 满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(y)};$$

但无法保证用这种方法求出的 x 和 y 相等. 这些讨论可能使我们以为柯西中值定理很难证明, 但实际上只要用最简单的技巧就行了.)

证明 设

$$h(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)],$$

则 h 在 $[a,b]$ 上是连续的, 在 (a,b) 上是可微的, 并且

$$h(a)=f(a)g(b)-g(a)f(b)=h(b).$$

由罗尔定理知, 对于 (a,b) 内的某个 x 有 $h'(x)=0$, 这意味着

$$0=f'(x)[g(b)-g(a)]-g'(x)[f(b)-f(a)].$$

柯西中值定理是证明下列定理的基本工具, 此定理能使下列形式的极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

的计算变得容易, 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \text{ 和 } \lim_{x\to a}g(x)=0.$$

在此情形中, 第五章定理 2 没有用. 每个导数都是这种形式的极限, 计算导数往往很费事. 然而, 如果已知某些导数, 那么现在就能容易求出许多这种形式的极限.

定理 9 (罗必塔法则) 假设

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \text{ 和 } \lim_{x\to a}g(x)=0,$$

并假设 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)/g'(x)$ 存在. 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)/g(x)$ 存在, 并且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(注意, 定理 7 是一特殊情形.)

证明 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)/g'(x)$ 存在之假设暗含两个假设:

(1) 存在一个区间 $(a-\delta,a+\delta)$, 使得对于 $(a-\delta,a+\delta)$ 内的

一切 x（也许 $x=a$ 除外），$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 存在，

(2) 在该区间内（$x=a$ 可能再次例外）$g'(x)\neq 0$.

另一方面，甚至没有假设 f 和 g 在 a 处有定义. 如果我们定义 $f(a)=g(a)=0$（如有必要，改变前面 $f(a)$ 和 $g(a)$ 的值），则 f 和 g 在 a 处连续. 当 $a<x<a+\delta$ 时，将中值定理和柯西中值定理应用于区间 $[a, x]$ 上的 f 和 g（对于 $a-\delta<x<a$ 也照这样做）. 先将中值定理应用于 g，我们得到 $g(x)\neq 0$，因若 $g(x)=0$，则在 (a, x) 内将存在某个 x_1 使得 $g'(x_1)=0$，与(2)矛盾. 现在将柯西中值定理应用于 f 与 g，我们发现在 (a, x) 内有一数 α_x 使得

$$[f(x)-0]g'(\alpha_x)=[g(x)-0]f'(\alpha_x)$$

或

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

成立. 而当 x 趋近 a 时，α_x 趋近 a，因为 α_x 是在 (a, x) 之内. 因 $\lim\limits_{y\to a} f'(y)/g'(y)$ 存在，故

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}=\lim_{y\to a}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

（再次请读者补充这部分证明的细节.）

习　题

1. 对下列各函数用下面的方法求指定区间上的最大和最小值：求该区间内导数为 0 的点，并将在这些点的函数值与在端点的函数值相比较.

   (i) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$　　在 $[-2, 2]$ 上.

   (ii) $f(x)=x^5+x+1$　　在 $[-1, 1]$ 上.

   (iii) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$　　在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上.

   (iv) $f(x)=\dfrac{1}{x^5+x+1}$　　在 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 上.

   (v) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$　　在 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 上.

(vi) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ 在[0, 5]上.

2. 绘出第1题中每一函数的草图, 并求所有局部最大和最小点.

3. (a) 设 $a_1<\cdots<a_n$, 求 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ 的最小值.

*(b) 现在求 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$ 的最小值. 对于这一题, 微积分一点也用不上. 在各个 a_i 之间的区间上, 函数 f 是线性的, 因此最小显然发生在这些 a_i 中的一个, 而恰好在这些点, f 不可微. 然而, 如果你考虑由一个这样的区间移至另一区间时 $f(x)$ 是怎样变化的, 就容易找到答案.

*(c) 设 $a>0$. 证明

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$$

的最大值是 $(2+a)/(1+a)$. (可以分别求出 $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ 和 (a, ∞) 各区间上的导数.)

4. 求下列各函数的局部最大和最小点.

(i) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 3, 5, 7, 9 \\ 5, & x=3 \\ -3, & x=5 \\ 9, & x=7 \\ 7, & x=9. \end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数} \\ 1/q, & x=p/q, \ p/q \text{ 为既约分数}. \end{cases}$

(iii) $f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

(iv) $f(x)=\begin{cases} 1, & x=1/n, \ n \text{ 在N内} \\ 0, & x\neq 1/n. \end{cases}$

(v) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 的十进小数表示包含一个 5 时} \\ 0, & \text{其他地方}. \end{cases}$

5. 由点 $(0, a)$ 引一直线至水平轴, 然后折至 $(1, b)$, 如图 23 所示. 证明: 当角 α 与 β 相等时其总长度最短. (当然你必须为该图引进一个函数:

将长度用 x 表示，其中$(x, 0)$是水平轴上的一点．图 23 中的虚线提出一个可供选择的几何证法．无论哪一种情形，该题无需实际求出点$(x, 0)$就能得到解决．）

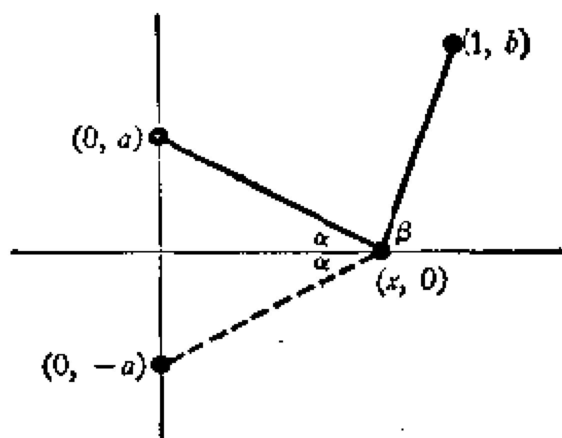


图 23

6. 证明在已知周长的一切矩形中，正方形有最大的面积．

7. 在固定体积的直立圆柱中，求有最小表面积（包括顶面和底面的面积，如图 24 所示）的一个．

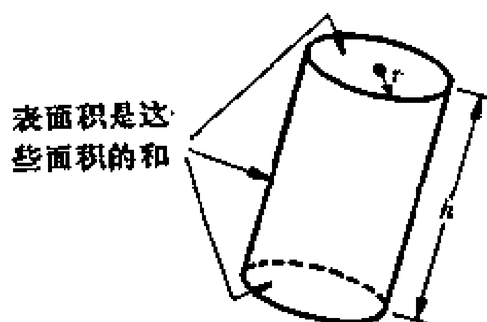


图 24

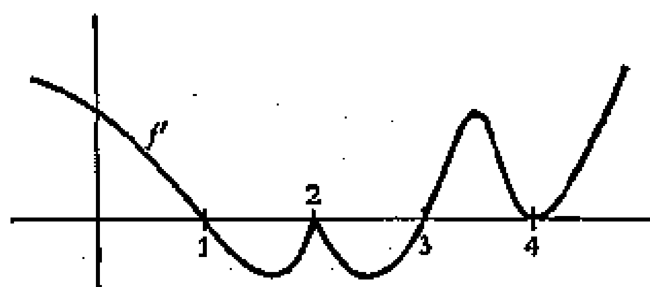


图 25

8. 图 25 所示为 f 的导数的图形．求 f 的所有局部最大和最小点．

*9. 设 f 为一多项式函数，$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，临界点为 $-1, 1, 2, 3, 4$，相应的临界值为 $6, 1, 2, 4, 3$．按 n 是偶数和 n 是奇数的情形分别绘出 f 的草图．

*10. (a) 假设多项式函数 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 有临界点 $-1, 1, 2, 3$，并且 $f''(-1)=0, f''(1)>0, f''(2)<0, f''(3)=0$．在这些信息的基础上，尽可能精确地绘出 f 的图形．

(b) 有没有一多项式函数具有上列性质，不过 3 不是临界点．

11. 绘一有理函数的图形（与课文中绘制多项式函数的图形相类似，要用一

般表示式).

12. (a) 证明m次和n次的两个多项式函数至多相交于$\max(m,n)$个点.

(b) 对于每个m和n, 求相交$\max(m,n)$次的两个m和n次的多项式函数.

*13. (a) 设多项式函数$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$正好有$k$个临界点, 且对于所有临界点$x$有$f''(x)\neq 0$. 证明$n-k$是奇数.

(b) 对于每个n, 证明: 如果$n-k$是奇数的话, 有一n次多项式函数f具有k个临界点.

(c) 设多项式函数$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$有$k_1$个局部最大点和$k_2$个局部最小点. 证明: 若$n$为偶数则$k_2=k_1+1$, 若$n$为奇数则$k_2=k_1$.

(d) 设n, k_1, k_2是三个整数, 并且当n为偶数时$k_2=k_1+1$, 当n为奇数时$k_2=k_1$; 以及$k_1+k_2<n$. 证明: 有一n次多项式函数, 有k_1个局部最大点和k_2个局部最小点. 提示: 取$a_1<a_2<\cdots<a_{k_1+k_2}$, 并对于一适当的数$l$试试

$$f'(x)=\prod_{i=1}^{k_1+k_2}(x-a_i)\cdot(1+x^2)^l.$$

14. (a) 证明: 若对于$[a,b]$内所有的x有$f'(x)\geqslant M$, 则$f(b)\geqslant f(a)+M(b-a)$.

(b) 证明: 若对于$[a,b]$内所有的x有$f'(x)\leqslant m$, 则$f(b)\leqslant f(a)+m(b-a)$.

(c) 当对于$[a,b]$内所有的x满足$|f'(x)|\leqslant M$时, 试写出一个类似的定理.

15. (a) 设对于所有的x有$f'(x)>g'(x)$, 并且$f(a)=g(a)$. 证明: 当$x>a$时$f(x)>g(x)$, 而当$x<a$时$f(x)<g(x)$.

(b) 举例说明若无$f(a)=g(a)$的假设, 则这些结论不成立.

16. 求满足下列各式的所有函数f.

(a) $f'(x)=\sin x$.

(b) $f''(x)=x^3$.

(c) $f'''(x)=x+x^2$.

17. 虽然一重物由静止开始下落经t秒后下落$s(t)=16t^2$英尺是正确的, 但是这个实验得来的事实没有涉及向上抛或向下抛重物的性态. 另一

方面，$s''(t)=32$ 总是对的，而用它来说明由任何高度、以任意初速抛出一重物的性态，是很含糊的。为简单起见，我们规定由地平面向上测量高度；在此情形下，上升物体的速度是正的，而下落物体的速度是负的，并且所有物体按照 $s''(t)=-32$ 规律下落.

(a) 证明 s 具有 $s(t)=-16t^2+\alpha t+\beta$ 的形式.

(b) 将 $t=0$ 代入关于 s 的公式，然后代入关于 s' 的公式，证明 $s(t)=-16t^2+v_0t+s_0$，其中 s_0 为物体在时刻 0 抛出时的高度，而 v_0 为物体抛出时的速度.

(c) 一重物以速度 v 英尺/秒由地平面向上抛，能抛多高（"多高"指"全部时间内最大高度等于多少"）？在达到它的最大高度的时刻它的速度等于多少？在那时刻的加速度等于多少？什么时候它将再碰到地面？当再碰到地面时，它的速度等于多少？

18. 一炮弹由地面以速度 v 和夹角 α 发射（图 26），于是其速度的直立分量为 $v\sin\alpha$ 和水平分量为 $v\cos\alpha$. 它在地面上的距离 $s(t)$ 服从 $s(t)=-16t^2+(v\sin\alpha)t$ 这个规律，而其水平速度仍恒为 $v\cos\alpha$.

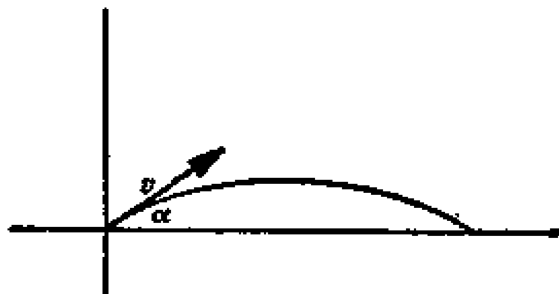


图 26

(a) 证明弹道是一抛物线（求出每一时刻 t 的位置，并证明这些点在一抛物线上）.

(b) 要使炮弹落到地面之前所经过的水平距离为最大，则 α 应为多少？

*19. (a) 试举一函数 f 的例子，使 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在，但 $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ 不存在.

(b) 证明：如果 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ 都存在，则 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$.

(c) 证明：如果 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 以及 $\lim_{x\to\infty}f''(x)$ 都存在，则 $\lim_{x\to\infty}f''(x)=0$，并且还有 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$.

(d) 推广这个结果.

20. 设 f 和 g 是两个可微函数，它们满足 $fg'-f'g=0$. 证明：若 a 与 b 是

f 的相邻的零点，并且 $g(a)$ 和 $g(b)$ 不同时为 0，则在 a 和 b 之间有某个 x 满足 $g(x)=0$.（若将 f 和 g 对换，同样的结果当然成立；这样，f 和 g 的零点彼此分开.）提示：对于在 a 和 b 之间所有的 x，假设 $g(x)\neq 0$，由此引出一个矛盾：如果一数不为 0，就有一个很自然的情况和它有关.

21. 设 $|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^n$，其中 $n>1$. 通过考虑 f' 证明 f 是常数. 与习题三，20 相比较.

22. 证明：若

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

则对于 $[0,1]$ 内的某个 x 有

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0.$$

23. 证明多项式函数 $f_m(x)=x^3-3x+m$ 在 $[0,1]$ 内决不会有两个根，不论 m 是多少.（这是罗尔定理的一个容易的推论. 在给出分析证明之后，绘 f_0 和 f_1 的图形，并考虑 f_m 的图形与它们的关系.）

24. 假设 f 在 $[0,1]$ 上连续并且可微；对于每个 x，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 内；并且对于 $[0,1]$ 内所有的 x，$f'(x)\neq 1$. 证明在 $[0,1]$ 内恰好有一数 x 使 $f(x)=x$.（这一题有一半在习题七，11 中已经完成.）

*25. 证明：若 f 为二次可微函数且 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$，以及 $f'(0)=f'(1)=0$，则对于 $[0,1]$ 内的某个 x 有 $|f''(x)|\geqslant 4$. 更形象地说：一质点在单位时间内移动单位距离，开始和终止时的速度都是 0，那么在某时刻有加速度 $\geqslant 4$. 提示：证明不是在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内某点 x，$f''(x)>4$，就是在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 内某点 x，$f''(x)<-4$.

26. 设 f 为一函数，有 $f'(x)=1/x$（对于所有的 $x>0$）而 $f(1)=0$. 证明：对于所有的 x，$y>0$ 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$. 提示：求 $g'(x)$，其中 $g(x)=f(xy)$.

*27. 设 f 满足

$$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0,$$

其中 g 为某一函数. 证明：若 f 在两点为 0，则在这两点之间的区间上 f 就是 0. 提示：用定理 6.

28. 设 f 为 n 次可微且对于 $n+1$ 个不同的 x 有 $f(x)=0$. 证明：对于某

个 x 有 $f^{(n)}(x)=0$.

29. 证明

$$\frac{1}{9}<\sqrt{66}-8<\frac{1}{8}.$$

($\sqrt{66}$不用算到2位小数!)

30. 证明下列中值定理的极简单的推广：设 f 在(a,b)上连续和可微，并且 $\lim\limits_{y\to a^+}f(y)$ 和 $\lim\limits_{y\to b^-}f(y)$存在，则在$(a,b)$内有某个 x 使

$$f'(x)=\frac{\lim\limits_{y\to b^-}f(y)-\lim\limits_{y\to a^+}f(y)}{b-a}.$$

(你的证明应这样开头："这是中值定理的一个显然的推论，因为…")

31. 证明：在附加假定 $g(b)\neq g(a)$ 以及 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在 (a,b) 上不同时为 0 之后，柯西中值定理的结论可以写成下列形式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*32. 证明：若 f 和 g 在$[a,b]$上连续并且在(a,b)上可微，而且对于(a,b)内的 x 有 $g'(x)\neq 0$，则在(a,b)内有某个 x 使

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(x)}.$$

提示：先乘出来，看它实际上表示什么.

33. 下式应用罗必塔法则错在何处:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3.$$

(实际上其极限是 -4.)

34. 求下列极限:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}$.

35. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

以及 $g(0)=g'(0)=0$ 和 $g''(0)=17$. 求 $f'(0)$.

36. 证明下列形式的罗必塔法则(无需任何本质上新的理由).

(a) 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$和$\lim\limits_{x\to a^+}(f'(x)/g'(x))=l$，则

$\lim\limits_{x\to a^+}(f(x)/g(x))=l$（对于从下方趋近的极限亦然）.

(b) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/g'(x))=\infty$，则

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x))=\infty$（对于$-\infty$，或将 $x\to a$ 换成 $x\to a^+$ 或 $x\to a^-$，都能成立）.

(c) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x))=l$，则

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)/g(x))=l$（对于 $-\infty$ 亦然）. 提示：考虑：

$$\lim_{x\to 0^+}[f(1/x)/g(1/x)].$$

(d) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x))=\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)/g(x))=\infty.$$

37. 还有一种形式的罗必塔法则，它需要更多的代数运算：若

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$

和

$$\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x))=l,$$

则

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)/g(x))=l.$$

证明如下.

(a) 对于任意 $\varepsilon>0$，有一数 a 使得当 $x>a$ 时恒有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon.$$

将柯西中值定理应用于$[a,x]$上的 f 和 g 来证明，对于 $x>a$ 有

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-l\right|<\varepsilon.$$

（为什么我们能假设 $g(x)-g(a)\neq 0$？）

(b) 现在写

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{f(x)}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{g(x)}$$

（为什么对于很大的 x，我们能假定 $f(x)-f(a)\neq 0$？）并断定对于足够大的 x 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<2\varepsilon.$$

38. 为了补全各种形式的罗必塔法则，用第 37 题来证明下列一般陈述中的几个情形(可能的情形多得很，你自选一些有兴趣的来证明)：

若 $\lim\limits_{x\to[\ ]} f(x)=\lim\limits_{x\to[\ ]} g(x)=\{\ \}$ 和 $\lim\limits_{x\to[\ ]} f'(x)/g'(x)=(\ )$，则

$$\lim_{x\to[\ ]}(f(x)/g(x))=(\ ).$$

这里[ ]可以是 a 或 a^+ 或 a^- 或 ∞ 或 $-\infty$，而{ }可以是 0 或 ∞ 或 $-\infty$，以及( )可以是 l 或 ∞ 或 $-\infty$.

*39. (a) 假设 f 在$[a,b]$上可微，证明：若 f 在$[a,b]$上的最小值在 a 处取得，则 $f'(a)\geqslant 0$，如果它在 b 处取得，则 $f'(b)\leqslant 0$.（用定理 1 的证明的一半就能完成本题的证明.）

(b) 假设 $f'(a)<0$ 和 $f'(b)>0$. 证明：对于 (a, b) 内的某个 x 有 $f'(x)=0$. 提示：考虑在$[a, b]$上 f 的最小值；为什么它必定在(a,b)内的某处？

(c) 证明：若 $f'(a)<c<f'(b)$，则对于(a,b)内的某个 x 有 $f'(x)=c$.（这个结果称为达布定理.）提示：构造一个恰当的函数，使(b)对它能应用.

*40. 容易找到一函数 f 使 $|f|$ 可微但 f 不可微. 例如，我们可以取 $f(x)=1$，对于 x 为有理数；和 $f(x)=-1$，对于 x 为无理数. 在此例中，f 甚至不连续，这并不是巧合的事：证明若 $|f|$ 在 a 处可微，且 f 在 a 处连续，则 f 在 a 处也是可微的. 提示：只要考虑满足 $f(a)=0$ 的 a 即可. 为什么？在此情形中，$|f|'(a)$ 必须等于什么？

*41. (a) 设 $y\neq 0$ 且 n 是偶数. 证明只有当 $x=0$ 时 $x^n+y^n=(x+y)^n$. 提示：设 $x_0^n+y^n=(x_0+y)^n$，将罗尔定理应用于$[0, x_0]$上的 $f(x)=x^n+y^n-(x+y)^n$.

(b) 证明：若 $y\neq 0$ 且 n 是奇数，则只有当 $x=0$ 或 $x=-y$ 时 $x^n+y^n=(x+y)^n$.

**42. 应用第 41 题的方法证明：若 n 为偶数且 $f(x)=x^n$，则 f 的每条切线与 f 只相交一次.

**43. 证明更一般的情况：如果 f' 是递增的，则每条切线与 f 只相交一次.

*44. 设 $f(0)=0$ 且 f' 递增. 证明在 $(0,\infty)$ 上函数 $g(x)=f(x)/x$ 是递增的. 提示：显然你要看 $g'(x)$. 对 0 点右面的区间上的 f，应用中值定理来证明 $g'(x)$ 是正的.（记住下列内容会有帮助：$f(0)=0$ 的假设是

必不可缺的．函数 $f(x)=1+x^2$ 可说明这一点．）

*45．用导数证明：若 $n\geqslant 1$，则

$$(1+x)^n>1+nx,$$

当 $-1<x<0$ 和 $0<x$ 时．

（注意，当 $x=0$ 时等式成立）．

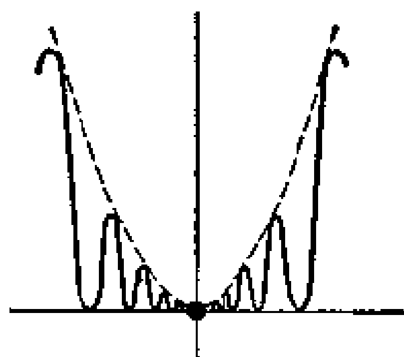


图 27

46．设 $f(x)=x^4\sin^2\frac{1}{x}$，其中 $x\neq 0$，以及 $f(0)=0$（图 27）．

(a) 证明 0 是 f 的局部最小点．

(b) 证明 $f'(0)=f''(0)=0$．

于是，该函数是又一个说明定理 6 不能改进的例子．它也说明关于最大和最小的一个常被忽视的微妙之处：一函数在一局部最小点的右边的任何区间内不一定是递增的，在左边的任何区间内也不一定是递减的．

*47．(a) 证明：若 $f'(a)>0$ 且 f' 在 a 处连续，则在含包 a 的某个区间内 f 是递增的．

本题的下列两小题说明 f' 的连续性是必不可少的．

(b) 设 $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，证明有任意靠近 0 的数 x 满足 $g'(x)=1$ 和 $g'(x)=-1$．

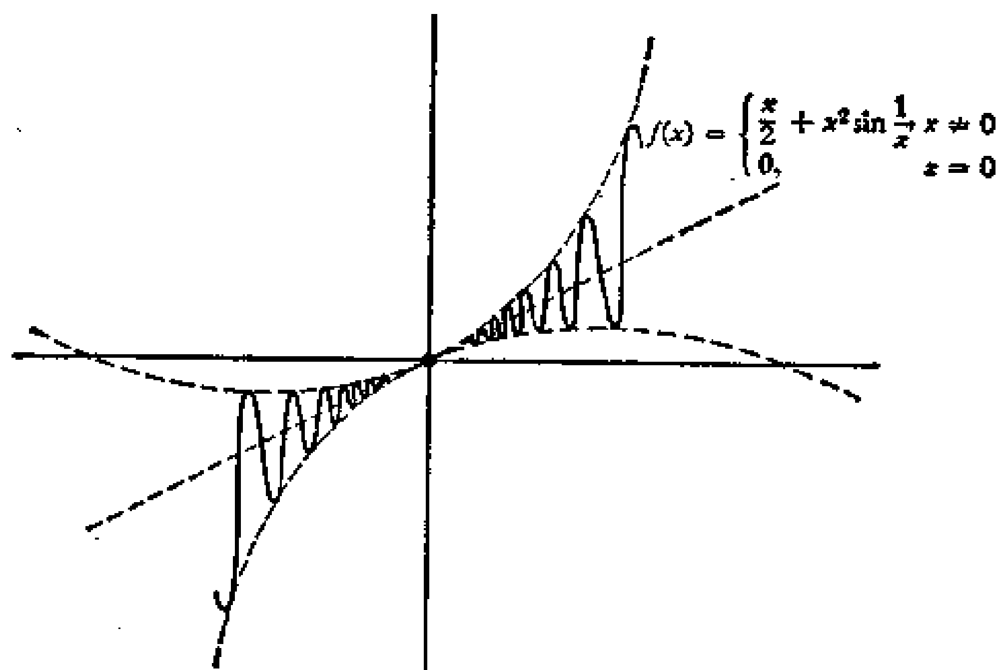


图 28

(c) 设 $0<a<1$. 设 $f(x)=ax+x^2\sin\frac{1}{x}$, 对于 $x\neq 0$, 以及 $f(0)=0$ (见图 28). 通过证明在任何包含 0 的区间内有点 x 满足 $f'(x)>0$, 也有点 x 满足 $f'(x)<0$, 来证明在包含 0 的任何开区间内 f 不是递增的.

f 在 $a\geqslant 1$ 时的性态更难分析, 将在下一题中讨论.

**48. 设 $f(x)=ax+x^2\sin\frac{1}{x}$, 对于 $x\neq 0$. 并设 $f(0)=0$. 为了求当 $a\geqslant 1$ 时 $f'(x)$ 的符号, 需要确定: 对于靠近 0 的任意数 x, $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ 是否 <-1, 考虑下列函数稍微方便些, $g(y)=\frac{2\sin y}{y}-\cos y$, 其中 $y\neq 0$. 我们需要知道, 对于很大的 y 是否有 $g(y)<-1$. 这是一个需要十分细心处理的问题; $g(y)$ 的最重要部分是 $-\cos y$, 它的确能达到 -1 这个值, 但这只是当 $\sin y=0$ 时才发生, 至于 g 本身能否有 <-1 的值, 就一点也不清楚了. 解决这个问题的明显途径是求 g 的局部最小值. 不幸, 准确地求解方程 $g'(y)=0$ 是不可能的, 因此需要再加些技巧.

(a) 证明: 若 $g'(y)=0$, 则

$$\cos y=\sin y\left(\frac{2-y^2}{2y}\right),$$

并推得

$$g(y)=\sin y\left(\frac{2+y^2}{2y}\right)$$

(b) 现在证明: 若 $g'(y)=0$, 则

$$\sin^2 y=\frac{4y^2}{4+y^4},$$

并推得

$$|g(y)|=\frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^4}}.$$

(c) 利用 $(2+y^2)/\sqrt{4+y^4}>1$ 这个事实, 证明: 若 $a=1$, 则在包含 0 的任何区间内 f 不是递增的.

(d) 利用 $\lim\limits_{y\to\infty}((2+y^2)/\sqrt{4+y^4})=1$ 这个事实, 证明: 若 $a>1$, 则在包含 0 的某个区间内 f 是递增的.

**49. 若有某个数 $\delta>0$ 使

$$f(x)>f(a) \quad 当\ a<x<a+\delta\ 时$$

和

$$f(x)<f(a) \quad 当\ a-\delta<x<a\ 时,$$

则称此函数 f **在 a 处是递增的**. 注意, 这并不意味着 f 在 $(a-\delta, a+\delta)$ 区间内是递增的. 例如, 如图 28 所示的函数虽然在 0 处是递增的, 但它在包含 0 的任何开区间内不是递增函数.

(a) 假设 f 在 $[0, 1]$ 上是连续的, 并且对于 $[0, 1]$ 内的每一点 a, f 在 a 处是递增的. 证明 f 在 $[0, 1]$ 上是递增的. (先使你相信, 这是需要证明的.) 提示: 对于 $0<b<1$, 证明 f 在 $[b, 1]$ 上的最小点必在 b 处.

(b) 不用 f 是连续的假设, 而用对应于 $[0, 1]$ 内每个 b 的集合 $S_b=\{x$: 对于 $[b, x]$ 内所有的 y 有 $f(y)\geqslant f(b)\}$ 来证明 (a). (本题的其余各小题用不着这一小题.) 提示: 通过考虑 $\sup S_b$ 来证明 $S_b=\{x: b\leqslant x\leqslant 1\}$.

(c) 若 f 在 a 处是递增的以及 f 在 a 处可微, 证明 $f'(a)\geqslant 0$ (这题容易做).

(d) 若 $f'(a)>0$, 证明 f 在 a 处是递增的 (直接回顾 $f'(a)$ 的定义).

(e) 不用中值定理而用 (a) 和 (d) 证明: 若 f 在 $[0, 1]$ 上连续并且对于 $[0, 1]$ 内所有的 a 有 $f'(a)>0$, 则 f 在 $[0, 1]$ 上是递增的.

(f) 假设 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 并且对于 $(0, 1)$ 内所有的 a 有 $f'(a)=0$. 将 (e) 应用于函数 $g(x)=f(x)+\varepsilon x$ 来证明 $f(1)-f(0)>-\varepsilon$. 同理, 由 $h(x)=\varepsilon x-f(x)$ 来证明 $f(1)-f(0)<\varepsilon$. 由此得出结论 $f(0)=f(1)$.

这个关于导数为零的函数必为常数的特殊证法, 有许多点与 H. A. 许瓦尔兹的证明相同, 而许瓦尔兹的证明也许是头一个已经发表的严格证明. 至少它的发现者觉得它似乎是这样. 见建议读物的参考书[41]中他的感情洋溢的信.

**50. 设 f 为一常值函数, 则每一点是 f 的局部最大点. 即使 f 不是常值函数, 也可能出现这种情况: 例如, 设 $f(x)=0$, 对于 $x<0$; 以及 $f(x)=1$, 对于 $x\geqslant 0$. 证明, 但若 f 在 $[a, b]$ 上连续并且 $[a, b]$ 的每一点是一局部最大点, 则 f 是一常值函数. 提示: 若 f 的最小发生在 x_0 处, 考虑集合 $\{[x_0, b]$ 内的 $x: f(y)=f(x_0)$ 对于 $[x_0, x]$ 内所有的 y 成立$\}$.

**51. (a) 若对于 A 内所有的 y 以及 $y\neq x$, 有 $f(x)>f(y)$, 则该点 x 称为 f

在A上的**严格最大点**(试与普通最大点的定义相比较). **局部严格最大点**该如何定义,是显而易见的. 求下列函数的所有局部严格最大点

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{是无理数}\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},\ \frac{p}{q}\text{为既约分数}.\end{cases}$$

好象不大可能有一函数在每一点都有一局部严格最大(尽管上例会使人对此想法发生迟疑). 证明如下.

(b) 假设每一点都是f的局部严格最大点. 设x_1为任意数, 取a_1、b_1使$a_1<x_1<b_1$并有$b_1-a_1<1$, 而对于$[a_1, b_1]$内所有的x有$f(x_1)>f(x)$. 设$x_2\neq x_1$为(a_1, b_1)内的任意点, 再取a_2、b_2使$a_1\leqslant a_2<x_2<b_2\leqslant b_1$, 并有$b_2-a_2<\frac{1}{2}$, 而对于$[a_2, b_2]$内所有的$x$有$f(x_2)>f(x)$. 将这个方法继续下去, 并用区间套定理(习题八, 14)来得出一矛盾.

选题解答

1. (i) 对于$x=2$和$x=-\frac{4}{3}$(这两点都在$[-2,2]$内)有

$$0=f'(x)=3x^2-2x-8;$$

$f(-2)=5$, $f(2)=-11$, $f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{203}{27}$;

最大值$=\frac{203}{27}$, 最小值$=-11$.

(iii) 令$0=f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x^2-2x+1)$, 得$x=0$和$x=1$, 其中只有0在$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$内;

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{43}{16}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}$, $f(0)=0$;

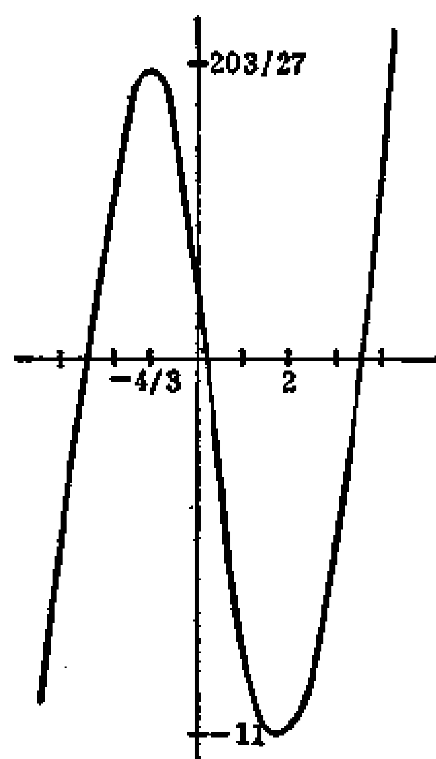
最大值$=\frac{43}{16}$, 最小值$=0$.

(v) 令$0=f'(x)=\frac{x^2+1-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$, 得$x=-1+\sqrt{2}$和$x=-1-\sqrt{2}$, 其中只有$-1+\sqrt{2}$在$\left[-1, \frac{1}{2}\right]$内;

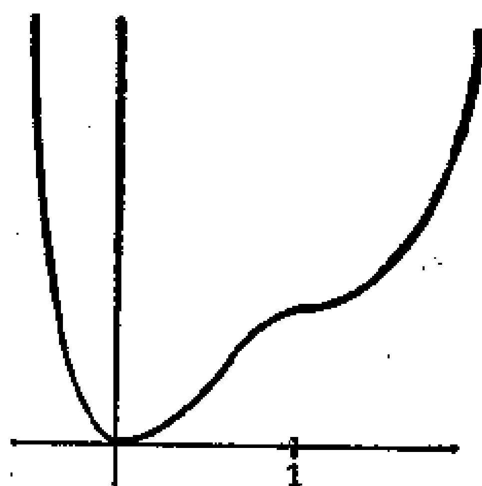
$f(-1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{5}$, $f(-1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})/2$;

最大值$=(1+\sqrt{2})/2$, 最小值$=0$.

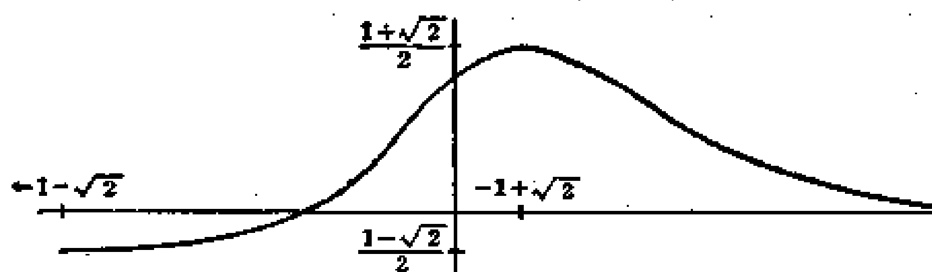
2. (i) $-\frac{4}{3}$是一局部最大点，而 2 是一局部最小点。



(iii) 0 是一局部最小点，没有局部最大点.



(v) $-1+\sqrt{2}$是一局部最大点，而 $-1-\sqrt{2}$是一局部最小点.



3. (a) 注意，因为 f 是偶次多项式函数，故 f 确实有最小值. 最小出现在使

$$0=f'(x)=2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

的点 x，于是

$$x=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

4. (i) 3 和 7 是局部最大点，5 和 9 是局部最小点.

(iii) 所有无理数 $x>0$ 是局部最小点，而所有无理数 $x<0$ 是局部最大点.

(v) 当十进小数表示式包含（不包含）5 时，则 x 为一局部最大（最小）点.

5. 设 $f(x)$是该路线的总长度，则

$$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(1-x)^2+b^2}.$$

正函数 f 显然有最小，因 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，并且 f 处处可微，故最小出现在具有 $f'(x)=0$ 的点 x. 现在当

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}}=0$$

时，$f'(x)=0$. 此方程表示 $\cos\alpha=\cos\beta$.

也可以考虑 $f(x)$ 等于虚线长度和由 $(x,0)$ 至 $(1,b)$ 的线段长度之和. 当两线段在同一直线上时，它们之和最短（如果需要严格证明，可根据习题四，8(b)）；用一点平面几何即可证明此情况在 $\alpha=\beta$ 时出现.

6. 设 x 是周长为P的矩形一边的长度，则另一边的长度为 $(P-2x)/2$，故其面积为

$$A(x)=\frac{x(P-2x)}{2}.$$

所以当 x 为 A 在 $(0, P/2)$ 上的最大点时，矩形的面积最大．因 A 在 $[0, P/2]$ 上连续，以及 $A(0)=A(P/2)=0$，并且对于 $(0, P/2)$ 内的 x 有 $A(x)>0$，故最大存在．因 A 在 $(0, P/2)$ 上可微，故最大点 x 满足

$$0=A'(x)=\frac{P-2x}{2}-x=\frac{P-4x}{2},$$

于是 $x=P/4$.

7\. 设半径为 r 体积为 V 的直立圆柱的表面积为 $S(r)$．因

$$V=\pi r^2 h,\ \text{其中 } h \text{ 是高度},$$

我们有 $h=V/\pi r^2$，于是

$$\begin{aligned}S(r)&=2\pi r^2+2\pi rh\\&=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.\end{aligned}$$

我们要求 S 在 $(0, \infty)$ 上的最小点．因为 $\lim\limits_{r\to 0}S(r)=\lim\limits_{r\to\infty}S(r)=\infty$，所以这个最小点存在．因为 S 在 $(0, \infty)$ 上可微，故最小点 r 满足

$$\begin{aligned}0=S'(r)&=4\pi r-\frac{2V}{r^2}\\&=\frac{4\pi r^3-2V}{r^2},\end{aligned}$$

或

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

8\. 1 是局部最大点，而 3 是局部最小点．

14\. (a) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=f'(x)\quad(\text{对于}(a,b)\text{内的某个 }x)\\&\geqslant M,\end{aligned}$$

故 $f(b)-f(a)\geqslant M(b-a)$.

(b) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=f'(x)\quad(\text{对于}(a,b)\text{内的某个 }x)\\&\leqslant m,\end{aligned}$$

故 $f(b)-f(a)\leqslant m(b-a)$.

(c) 设对于 $[a, b]$ 内所有的 x 有 $|f'(x)|\leqslant M$，则 $-M\leqslant f'(x)\leqslant M$，于是

$$f(a)-M(b-a)\leqslant f(b)\leqslant f(a)+M(b-a),$$

或 $$|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a).$$

16. (a) 对于某数 a, $f(x)=-\cos x+a$ (因为 $f(x)=-\cos x$ 是满足题目要求的一个函数, 而任何两个这样的函数相差一个常值函数).

(b) $f'(x)=x^4/4+a$, 其中 a 为常数; 于是 $f(x)=x^5/20+ax+b$, 其中 a 和 b 为常数.

(c) $f''(x)=x^2/2+x^3/3+a$, 其中 a 为常数 a; 于是 $f'(x)=x^3/6+x^4/12+ax+b$, 其中 a 和 b 为常数; 于是 $f(x)=x^4/24+x^5/60+ax^2/2+bx+c$, 其中 a, b 和 c 为常数. 同样地, 并且更简单地, $f(x)=x^4/24+x^5/60+ax^2+bx+c$, 其中 a, b 和 c 为常数.

17. (a) 因为 $s''(t)=-32$, 我们有 $s'(t)=-32t+\alpha$, 其中 α 为常数, 故 $s(t)=-16t^2+\alpha t+\beta$, 其中 α 和 β 为常数.

(b) 显然, $s(0)=0+0+\beta$ 和 $s'(0)=0+\alpha$. 于是 $\alpha=v_0$ 和 $\beta=s_0$.

(c) 在此情形中, $s_0=0$ 和 $v_0=v$, 于是 $s(t)=-16t^2+vt$. s 的最大值出现在 $0=s'(t)=-32t+v$ 或 $t=v/32$ 时, 故其最大值为

$$\begin{aligned}s\left(\frac{v}{32}\right)&=-16\left(\frac{v}{32}\right)^2+v\left(\frac{v}{32}\right)\\&=\frac{-v^2}{64}+\frac{v^2}{32}\\&=\frac{v^2}{64}.\end{aligned}$$

显然此时速度为 0, 但加速度为 -32(和在任何时刻的一样). 重物在 $t(>0)$ 时碰到地面, 其中 t 满足

$$0=s(t)=-16t^2+vt$$

或 $t=v/16$ (下降和上升到顶点所需的时间相等). 于是其速度为

$$s'(v/16)=-32\left(\frac{v}{16}\right)+v=-v$$

(其速度与上升时的初速度相等).

29. 将中值定理应用于[64, 66]上的 $f(x)=\sqrt{x}$; 对于 [64, 66] 内的某个 x 有

$$\frac{\sqrt{66}-\sqrt{64}}{66-64}=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

因 $64<x<81$, 我们有 $8<\sqrt{x}<9$, 故

$$\frac{1}{2\cdot 9}<\frac{\sqrt{66}-8}{2}<\frac{1}{2\cdot 8}.$$

33. 由罗必塔法则不能得出下式

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2},$$

因为 $\lim_{x\to 1}(3x^2+1)\neq 0$, $\lim_{x\to 1}(2x-3)\neq 0$.

34. (i) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x=1.$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{2x}=-1.$

附录 凸性和凹性

虽然函数的图形可以在导数所提供的信息的基础上很精确地绘出，但图形的某些细微方面只有考察二阶导数才能揭示出来.以前之所以特地省略这些细节，是因为即使不考虑这些细节，图形的绘制也已够麻烦，并且所提到的这些添加的信息往往不值得花力气去研究.另外也很难将有关事实的正确证明写在附录中.尽管有这些令人泄气的议论，但这里提出的信息还是值得很好地掌握，因为凸性和凹性的概念比起只用它来帮助绘图远为重要.此外，其证明带有有意思的几何味道，这在微积分的定理中不常见到. 的确，其基本定义实质上是几何的定义(见图 1).

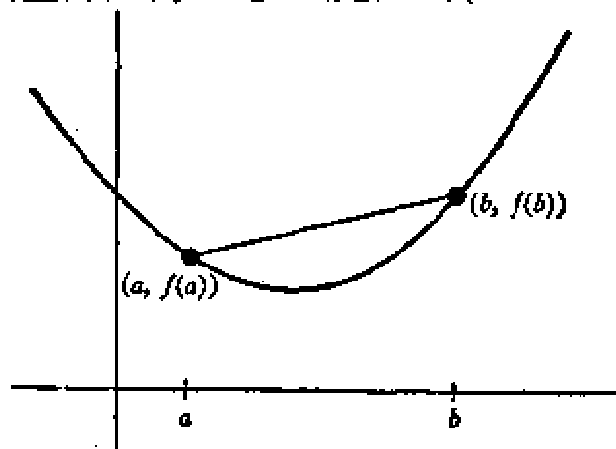


图 1

定义 1

> 若对于一区间内所有的 a 和 b, 连接 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的线段在 f 的图形的上方, 则称此函数 f 在该区间上是**凸的**.

在本定义中所出现的几何条件可以用解析的方法来表示, 这种表示方法在证明中有时更为有用. $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 之间的直线是由

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

定义的函数 g 的图形. 当 $g(x)>f(x)$, 即当

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)>f(x)$$

或

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)>f(x)-f(a)$$

或

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

时, 则在点 x 此直线在 f 的图形的上方.

于是我们得到一个等价的凸性的定义.

定义 2

> 若对于一区间内满足 $a<x<b$ 的 a、x 和 b, 我们有
>
> $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$
>
> 则称该函数 f 在该区间上是**凸的**.

若将定义 1 中的"上方"二字换成"下方", 或一样的, 若将定义 2 中的不等式换成

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

我们得到**凹**函数的定义(图 2). 不难看出凹函数正好是具有 $-f$ 形式的函数, 其中 f 是凸的. 由于这个缘故, 下列关于凸函数的三

个定理有关于凹函数的直接推论，这些推论很简单，我们不想费神叙述它们.

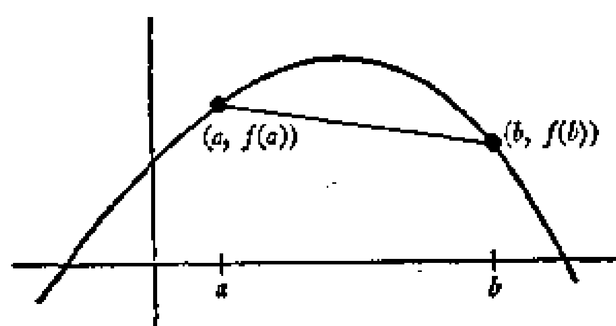


图 2

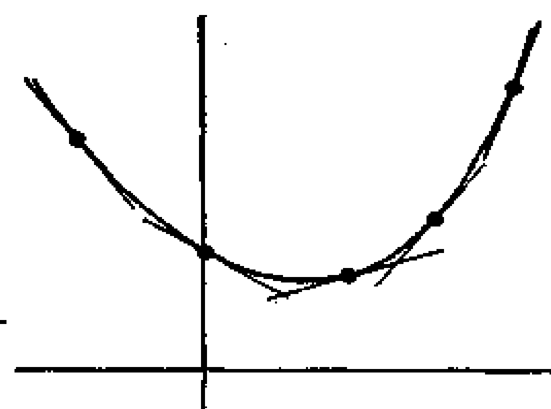


图 3

图 3 绘出一个凸函数的几条切线. 下列两件事情好象是对的:

(1) f 的图形在点$(a, f(a))$处的切线的上方，只有点$(a, f(a))$(该点称为切线的切点)本身例外.

(2) 若 $a<b$，则在点 $(a, f(a))$ 处的切线斜率小于在点 $(b, f(b))$的切线斜率. 亦即 f' 是递增的.

其实，这些观察所得的结果是对的，并且其证明是不难的.

定理 1 设 f 是凸的. 若 f 在 a 处可微，则 f 的图形在通过点$(a, f(a))$的切线的上方，只有点$(a, f(a))$本身例外. 若 $a<b$ 且 f 在 a 和 b 处可微，则 $f'(a)<f'(b)$.

证明 设 $0<h_1<h_2$，则如图 4 所示，有

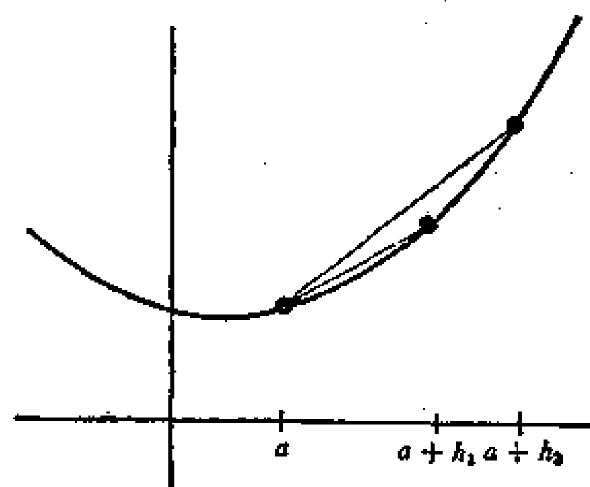


图 4

$$(1)\quad \frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}<\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

将定义 2 应用于 $a<a+h_1<a+h_2$ 就能立刻得到一个不依靠图形的证明. 不等式(1)说明, 当 $h\to 0^+$ 时,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

的值减小. 所以对于 $h>0$ 有

$$f'(a)<\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(其实 $f'(a)$ 是所有这些数的最大下界). 可是这表示, 对于 $h>0$, 通过 $(a, f(a))$ 和 $(a+h, f(a+h))$ 的割线的斜率比切线的斜率大, 这意味着 $(a+h, f(a+h))$ 在切线的上方(容易给出这段论证的分析证明).

对于负的 h, 情况类似(图 5): 设 $h_2<h_1<0$, 则

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}>\frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

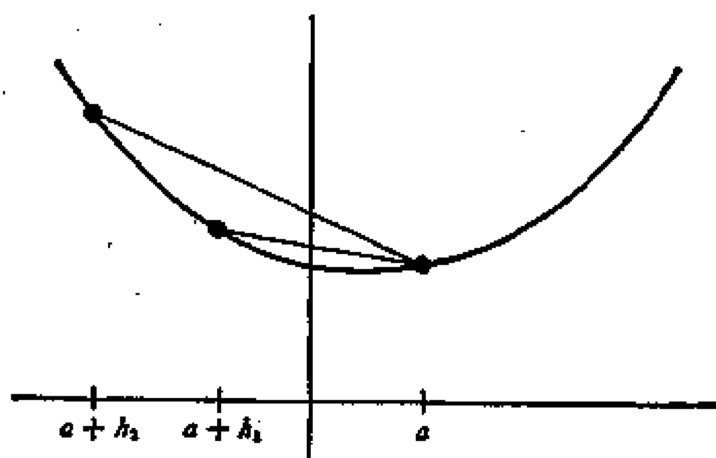


图 5

这说明切线的斜率大于

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\ 对于\ h<0$$

(其实 $f'(a)$ 是所有这些数的最小上界), 于是当 $h<0$ 时 $(a+h,$

$f(a+h)$)在切线的上方. 这就证明了定理的第一部分.

现在假设 $a<b$. 那么如同我们曾经看到的(图 6), 因为 $b-a>0$, 所以,

$$f'(a)<\frac{f(a+(b-a))-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

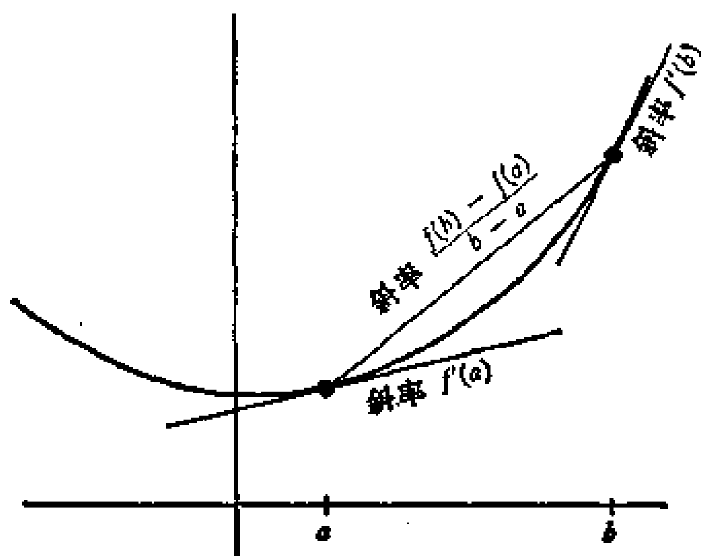


图 6

并且因为 $a-b<0$, 所以

$$f'(b)>\frac{f(b+(a-b))-f(b)}{a-b}$$
$$=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

将这两个不等式结合起来, 我们得 $f'(a)<f'(b)$. ▮

定理 1 有两个逆定理, 其证明稍微难些. 我们由一引理开始, 该引理在下一定理中所起的作用, 与罗尔定理在中值定理的证明中所起的作用相似. 它声称: 如果 f' 是递增的, 则 f 的图形在任意一条水平割线的下方.

引理 假设 f 是可微的并且 f' 是递增的. 若 $a<b$ 和 $f(a)$

$=f(b)$，则对于 $a<x<b$ 有 $f(x)<f(a)=f(b)$.

证明 先假设对于 $(a,\ b)$ 内的某个 x 有 $f(x)>f(a)=f(b)$. 则在 $[a,\ b]$ 上的最大发生在 $(a,\ b)$ 内满足 $f(x_0)>f(a)$ 的某点 x_0，并且，当然 $f'(x_0)=0$（图 7）. 另一方面，将中值定理应用于区间 $[a, x_0]$，我们能找到满足 $a<x_1<x_0$ 的 x_1，并且

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0,$$

与 f' 是递增的事实相矛盾. 这就证明了对于 $a<x<b$ 有 $f(x)\leqslant f(a)=f(b)$，现在只要再证明对于 (a, b) 内的 x，$f(x)=f(a)$ 也是不可能的.

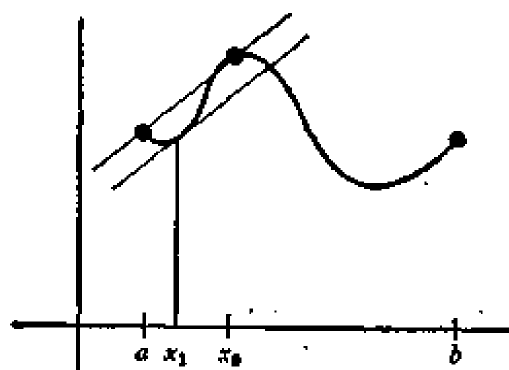


图 7

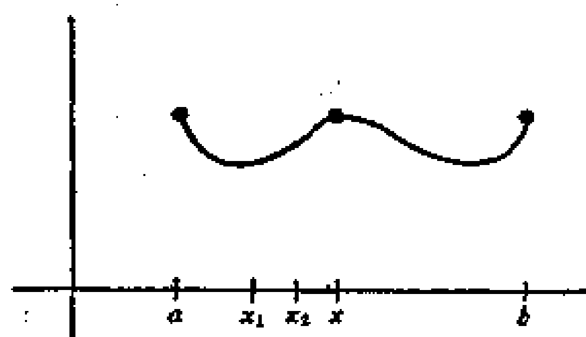


图 8

假设对于 (a, b) 内的某个 x 有 $f(x)=f(a)$. 我们知道 f 在 $[a, x]$ 上不是常数（如果是，f' 在 $[a, x]$ 上将不是递增的），因此存在着满足 $a<x_1<x$ 的某个 x_1（图 8），并且 $f(x_1)<f(a)$. 将中值定理应用于 $[x_1, x]$，我们断定存在着满足 $x_1<x_2<x$ 的 x_2，并且

$$f'(x_2)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>0.$$

另一方面，$f'(x)=0$，因为有一个局部最大出现在 x 处. 这再次与 f' 是递增的假设相矛盾. ∎

我们现在用与证明中值定理时所用的同样的代数技巧，来解决一般的情形.

定理 2 若 f 是可微的且 f' 是递增的，则 f 是凸的.

证明 设 $a<b$. 用

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

来定义 g 容易看出 g' 也是递增的；另外，$g(a)=g(b)=f(a)$. 将引理应用于 g，我们得，当 $a<x<b$ 时

$$g(x)<f(a).$$

换言之，若 $a<x<b$，则

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)<f(a)$$

或
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

所以 f 是凸的.

定理 3 若 f 是可微的，且除切点外 f 的图形在每条切线的上方，则 f 是凸的.

证明 设 $a<b$. 由图 9 显然可见，若 $(b,f(b))$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线的上方，且 $(a,f(a))$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线的上方，则在点 $(b,f(b))$ 处的切线的斜率必大于在点 $(a,f(a))$ 的切线的斜率. 下列的论证就是用方程来说明这一点.

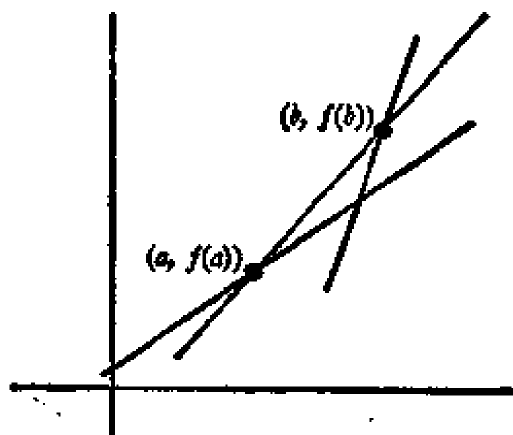


图 9

因为在点 $(a,f(a))$ 处的切线是函数

$$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

的图形，且因 $(b,f(b))$ 在切线的上方，我们有

$$(1)\qquad f(b)>f'(a)(b-a)+f(a).$$

同样地，因为在点 $(b,f(b))$ 处的切线是函数，

$$h(x)=f'(b)(x-b)+f(b)$$

的图形并且$(a,f(a))$位于在点$(b,f(b))$处的切线的上方，我们有

$$(2)\qquad f(a)>f'(b)(a-b)+f(b).$$

由(1)和(2)得$f'(a)<f'(b)$.

接着由定理2知f是凸的.

若函数f有一合理的二阶导数，则这些定理给出的信息可用来找出f是凸的或凹的区域. 例如，考虑下列函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

对于该函数，

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

于是只有当$x=0$时$f'(x)=0$，并且$f(0)=1$，而

$$f'(x)>0,\text{ 当 } x<0 \text{ 时},$$

$$f'(x)<0,\text{ 当 } x>0 \text{ 时}.$$

另外，

$$f(x)>0,\text{ 对于所有的 } x,$$

$$f(x)\to 0,\text{ 当 } x\to\infty \text{ 或 } -\infty \text{ 时},$$

f是偶函数.

所以f的图形就象图10所示的样子. 我们现在计算

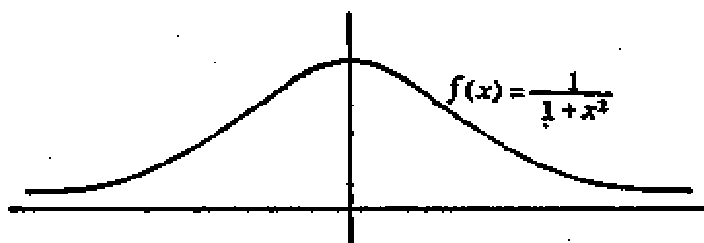


图 10

$$f''(x)=\frac{(1+x^2)^2(-2)+2x\cdot[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

不难确定$f''(x)$的符号. 先注意，只有当$x=\sqrt{1/3}$或$-\sqrt{1/3}$时

$f''(x)=0$. 因为 f'' 显然是连续的，所以它在下列每一区间内必定保持相同的符号

$$(-\infty,-\sqrt{1/3}),$$
$$(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3}),$$
$$(\sqrt{1/3},\infty).$$

因为我们容易算得，例如

$$f''(-1)=\frac{1}{2}>0,$$
$$f''(0)=-2<0,$$
$$f''(1)=\frac{1}{2}>0,$$

所以我们可断定

$f''>0$, 在 $(-\infty,-\sqrt{1/3})$ 和 $(\sqrt{1/3},\infty)$ 上，

$f''<0$, 在 $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$ 上.

因 $f''>0$ 表示 f' 是递增的，故由定理 2 知在 $(-\infty,-\sqrt{1/3})$ 和 $(\sqrt{1/3},\infty)$ 上 f 是凸的，而在 $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$ 上 f 是凹的（图 11）.

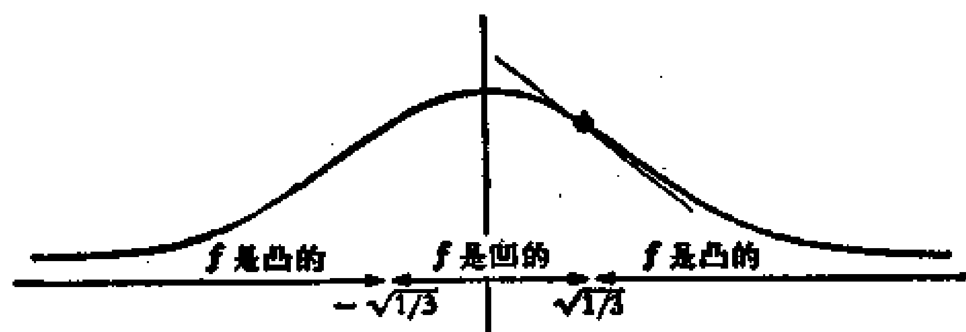


图 11

注意在点 $\left(\sqrt{1/3},\frac{3}{4}\right)$ 处，其切线位于右边图形的下方（因为 f 在 $(\sqrt{1/3},\infty)$ 上是凸的），而位于左边图形的上方（因为 f 在 $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$ 上是凹的）；于是切线穿过图形. 一般地说，f 的图形在 $(a,f(a))$ 的切线穿过图形，则该数 a 称为 f 的拐点；于是 $\sqrt{1/3}$ 和 $-\sqrt{1/3}$ 都是 $f(x)=1/(1+x^2)$ 的拐点. 注意 $f''(a)=0$ 的条件不

保证 a 是 f 的拐点. 例如,若 $f(x)=x^4$, 则 $f''(0)=0$, 但 f 是凸的,因而在(0, 0)的切线当然不穿过 f 的图形. 要 a 是函数 f 的拐点,还必须 f'' 在点 a 的左边和右边有不同的符号.

本例阐明的步骤可用来分析任何函数 f. 在绘出草图之后,应用 f' 的公式算出 f'' 的零点, 并确定在相邻零点之间的区间上 f'' 的符号. 在 $f''>0$ 的区间上函数是凸的; 在 $f''<0$ 的区间上函数是凹的. 知道 f 的凸性和凹性的区域, 往往能避免对 f 的其他数据作可笑的解释. 习题中给出几个可用这种方法分析的函数, 习题中还包含某些理论问题.

还有一个进一步的事实我在这里不能不提. 我们已经知道凸函数和凹函数有这样的性质,即每条切线与图形只相交一次,并且稍微绘一下图形,大概就会使你相信没有别的函数具有这种性质. 虽然这的确是事实, 但是我所知道的唯一的证明却包含很多深入细致的问题,因此我觉得最好还是把它省略.

习　题

1. 绘出习题十一,中各函数的草图, 并指出凸和凹的区域以及拐点(把(iv)看作是用双星号标明的).
2. 第十一章的图 25 表示 f' 的图形,绘出 f 的图形.
3. 求两个凸函数 f 和 g, 使得当且仅当 x 是整数时 $f(x)=g(x)$.
4. 证明: 当且仅当对于一区间内所有的 x 和 y 有

   $$f(tx+(1-t)y)<tf(x)+(1-t)f(y), \quad (\text{对于 } 0<t<1)$$

   时, f 在此区间上是凸的.

   (这只是以新的形式重新陈述一下定义,但却是有用的一种形式.)
5. 证明: 若 f 和 g 是凸的并且 f 是递增的, 则 $g\circ f$ 是凸的.

*6. 若 f 为具有下列性质的二次可微函数: 当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)>0$, 并且 f 是递减的, 以及 $f'(0)=0$. 证明对于某个 $x>0$ 有 $f''(x)=0$ (于是在合理的情形下 f 在 x 有拐点——$f(x)=1/(1+x^2)$ 即为一例). 此定理中的每个假设都是必不可少的. 如 $f(x)=1-x^2$, 它不是对于所有的 x 都是

正的；如 $f(x)=x^2$，它不是递减的；而如 $f(x)=1/(x+1)$，它不满足 $f'(0)=0$. 提示：取满足 $f'(x_0)<0$ 的 $x_0>0$. 则对于所有的 $y>x_0$ 不可能都有 $f'(y)\leqslant f'(x_0)$. 为什么不可能：于是对于某个 $x_1>x_0$ 有 $f'(x_1)\geqslant f'(x_0)$. 考虑在 $[0,x_1]$ 上的 f'.

*7. (a) 证明：若 f 是凸的，则 $f([x+y]/2)<[f(x)+f(y)]/2$.

(b) 假设 f 满足这个条件，证明：每当 k 是在 0 和 1 之间的且具有 $m/2^n$ 形式的有理数时，$f(kx+(1-k)y)<kf(x)+(1-k)f(y)$. 提示：(a) 部分是 $n=1$ 时的特殊情形. 用归纳法，在每一步中引用 (a).

(c) 假设 f 满足 (a) 中的条件并且 f 是连续的，证明 f 是凸的.

*8. 设 $p_1,\cdots,p_n$ 是满足 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ 的正数.

(a) 对于任何数 $x_1,\cdots,x_n$，证明 $\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$ 在最小和最大的 x_i 之间.

(b) 对 $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1}p_ix_i$ 证明同一问题，其中 $t=\sum_{i=1}^{n-1}p_i$.

(c) 证明詹森不等式：如果 f 是凸的，则 $f\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)$.

提示：应用第 4 题，注意 $p_n=1-t$.（需要用 (b) 证明：若 $x_1,\cdots,x_n$ 在 f 的定义域内，则 $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1}p_ix_i$ 亦然.）

*9. (a) 对于任意函数 f，其右导数 $\lim\limits_{h\to0^+}[f(a+h)-f(a)]/h$ 用 $f'_+(a)$ 表示，而其左导数用 $f'_-(a)$ 表示. 定理 1 的证明实际上表明，若 f 是凸的则 f'_+ 和 f'_- 总是存在的. 验证这个论断，并证明 f'_+ 和 f'_- 是递增的以及 $f'_-(a)\leqslant f'_+(a)$.

**(b) 如果 f 是凸的，证明当且仅当 f'_+ 在 a 处连续时 $f'_+(a)=f'_-(a)$.（这样，只有当 f'_+ 连续时 f 才可微.）提示：当 $b<a$ 趋近 a 时，$[f(b)-f(a)]/(b-a)$ 趋近 $f'_-(a)$，并且 $f'_+(b)$ 小于这个商.

**10. 证明凸函数一定是连续的.

**11. 证明：如果 f 在 $\mathbf{R}$ 上是凸的，则 f 不是递减就是递增的，要不然就存

在着一数 c 使 f 在 $(-\infty, c]$ 上是递减的而在 $[c, \infty)$ 上是递增的。本题要很小心地有条不紊地做，恐怕最好还是推迟到下一章之后再做，在下一章中将详细证明一个类似的定理。本题重要的一步是确立：对于某一组 $a<b$，如果 $f(a)<f(b)$ 则 f 在 $[b, \infty)$ 上是递增的，而如果 $f(a)>f(b)$；则 f 在 $(-\infty, a]$ 上是递减的。

第十二章 反 函 数

我们现在已经有了符合我们意愿的十分有效的研究函数的方法，所缺的是，需要适当补充能用这些方法的函数．我们曾经研究过由老的函数形成新函数的各种方法——加、乘、除和复合——但是单用这些方法，我们只能产生有理函数(甚至正弦函数，尽管经常用作例子，也从未定义过)．在以后几章中，我们将用十分精致的方法来构成新的函数，但这里有一种重要的方法，它实际上将使我们所发现的任何其他方法的用途增加一倍．

如果我们回想一下，函数是数偶的集合，我们可能会想出，只要把所有的数偶都反一下这个巧主意．于是由函数

$$f=\{(1,2),(3,4),(5,9),(13,8)\},$$

我们得

$$g=\{(2,1),(4,3),(9,5),(8,13)\}.$$

当 $f(1)=2$ 和 $f(3)=4$ 时，我们有 $g(2)=1$ 和 $g(4)=3$．

可惜，这个巧主意并不总是有效的．若

$$f=\{(1,2),(3,4),(5,9),(13,4)\},$$

则集合

$$\{(2,1),(4,3),(9,5),(4,13)\}$$

根本就不是一个函数，因为它同时包含 $(4,3)$ 和 $(4,13)$．容易看出，这个麻烦在于：虽然 $3\neq 13$ 但 $f(3)=f(13)$．这是唯一的会出毛病的事，于是值得给不会出现这种情况的函数起一个名称．

定义

> 只要 $a\neq b$ 就有 $f(a)\neq f(b)$，则称此函数 f 是一一的．

恒等函数 I 显然是一一的，下列的函数也是一一的：

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\neq 3,5\\ 3, & x=5\\ 5, & x=3.\end{cases}$$

函数 $f(x)=x^2$ 不是一一的，因为 $f(-1)=f(1)$，但若我们定义

$$g(x)=x^2,\ x\geqslant 0$$

（使 g 对于 $x<0$ 没有定义），则 g 是一一的，因为 g 是递增的（因对于 $x>0$, $g'(x)=2x>0$）. 这个观察容易推广：若 n 为一自然数，且

$$f(x)=x^n,\quad x\geqslant 0,$$

则 f 是一一的. 若 n 是奇数，其结果更好：函数

$$f(x)=x^n,\text{对于所有的 } x$$

是一一的（因为 $f'(x)=nx^{n-1}>0$，对于所有 $x\neq 0$）.

由 f 的图形特别容易确定 f 是否一一的：对于 $a\neq b$，$f(a)\neq f(b)$ 这个条件意味着没有一条水平线与 f 的图形相交两次（图1）.

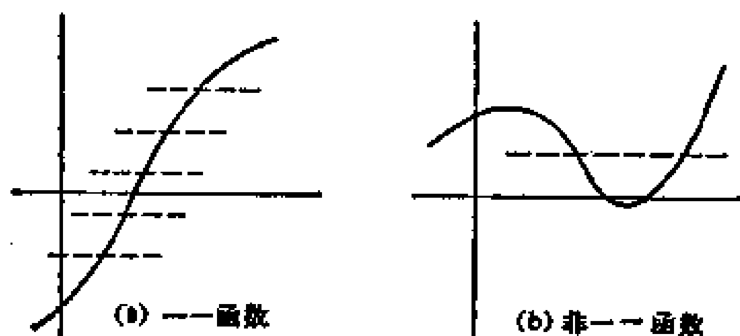


图 1

如果我们把 f（未必是一一的函数）中所有的数偶都反一下，我们在任何情况下都得到某个数偶的集合. 当 f 不是一一时，通常避免这种作法，但没有特别的理由要避免——我们不采用带有限制条件的定义，而用下面的定义和定理.

定义

> 对于任意函数 f，f 的逆（用 f^{-1} 表示）是所有数偶 (a,b) 的集合，其中数偶 (b,a) 在 f 内.

定理 1 当且仅当 f 是一一时，f^{-1} 才是一个函数.①

① 译注：一个函数的逆如果也是函数，就称此为反函数.

证明 先假设 f 是一一的. 若 (a,b) 和 (a,c) 是在 f^{-1} 内的两个数偶. 则 (b, a) 和 (c, a) 是在 f 内的, 于是 $a=f(b)$ 和 $a=f(c)$; 因为 f 是一一的, 这意味着 $b=c$. 所以 f^{-1} 是一函数.

反之, 假设 f^{-1} 是一函数. 若 $f(b)=f(c)$, 则 f 包含数偶 $(b, f(b))$ 和 $(c, f(c))=(c, f(b))$, 于是 $(f(b), b)$ 和 $(f(b), c)$ 在 f^{-1} 内. 因为 f^{-1} 是一函数, 这意味着 $b=c$, 所以 f 是一一的. ▮

f 和 f^{-1} 的图形的关系很密切, 可用 f 的图形来想象 f^{-1} 的图形. 因 f^{-1} 的图形是由与 f 图形中的 (b,a) 相对应的所有数偶 (a, b) 组成的, 故将水平轴和直立轴对调后由 f 的图形即得 f^{-1} 的图形. 若 f 有图 2(a) 所示的图形,

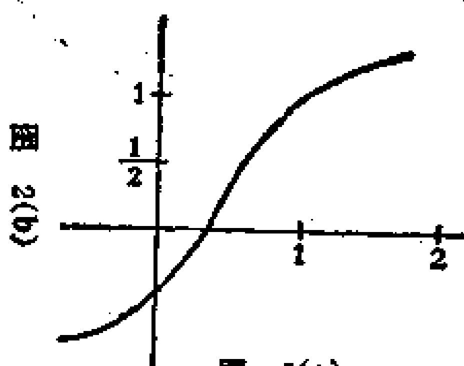


图 2(a)

而你将本页沿逆时针方向转过一直角, 则 f^{-1} 的图形就出现在你的左方 (图 2(b)). 唯一的麻烦是水平轴上数的排列方向不对头, 因此你须将该图翻转到你的右方 (图 3), 才能得到通常的 f^{-1} 的图形.

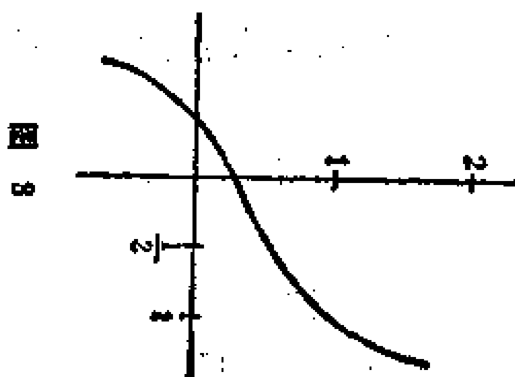


图 3

这种方法在书本上用是不方便的，在黑板上用更不可能，幸亏另外有绘制 f^{-1} 图形的方法．点 (a, b) 和 (b, a) 对于称为对角线的 $I(x)=x$ 的图形互为反射象(图 4)．为了得到 f^{-1} 的图形，我们只要通过这条直线把 f 的图形反射过来(图 5)．

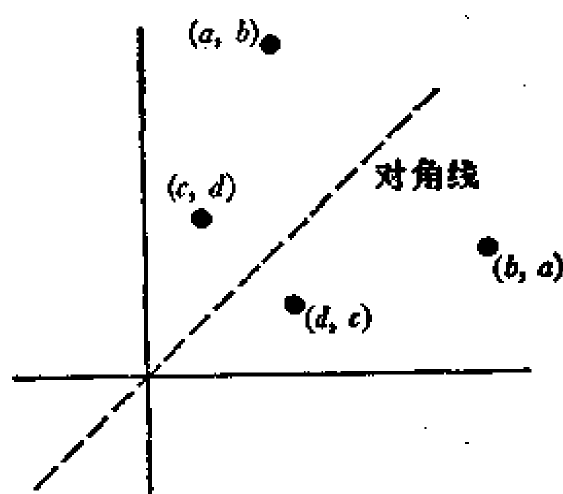


图 4

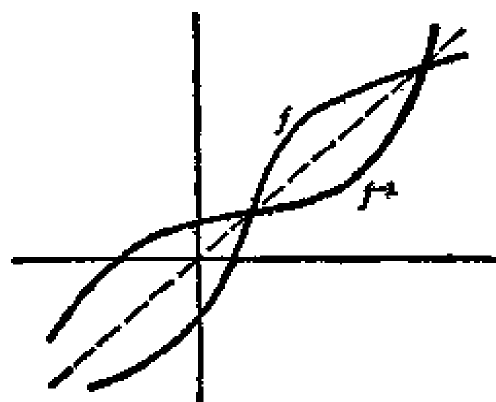


图 5

通过对角线反射两次，显然恰好又回到原处，这意味 $(f^{-1})^{-1}=f$，这显然也能由定义看出．结合定理 1，此式有一个有意义的推论：若 f 为一一函数，则函数 f^{-1} 也是一一的(因 $(f^{-1})^{-1}$ 是一个函数)．

还有一些你应该知道的关于反函数的简单运算．因为只当 (b, a) 在 f^{-1} 内之时 (a, b) 在 f 内，所以

$b=f(a)$ 的意义与 $a=f^{-1}(b)$ 的意义相同．

于是 $f^{-1}(b)$ 是使 $f(a)=b$ 的(唯一的)数 a．例如，若 $f(x)=x^3$，则 $f^{-1}(b)$ 是使 $a^3=b$ 的唯一的数 a，而根据定义，这个数是 $\sqrt[3]{b}$．

$f^{-1}(x)$ 是使 $f(y)=x$ 的数 y 这个事实，可用更简洁的形式重新陈述：

对于 f^{-1} 的定义域内所有的 x，$f(f^{-1}(x))=x$．

另外，

对于 f 的定义域内所有的 x，$f^{-1}(f(x))=x$．

此式是将前一式中的 f 用 f^{-1} 替换后得到的．这两个重要的等式

$$f\circ f^{-1}=I,$$

$$f^{-1}\circ f=I$$

(只当 f 或 f^{-1} 的定义域不是整个 $\mathbf{R}$ 时，右边的定义域才会更大)。

由于许多标准函数将定义为别的函数的逆，所以我们能知道哪些函数是一一的，就很重要了．我们曾经提示过哪一类函数是最容易处理的——递增和递减函数显然是一一的．另外，若 f 是递增的，则 f^{-1} 也是递增的，而若 f 是递减的，则 f^{-1} 是递减的(证明留给你们来做)．还有，当且仅当 $-f$ 是递减时 f 是递增的，这个事实很有用，要记住．

每个一一函数不是递增就是递减的，这当然不对．曾经提到过一个例子，现在绘在图 6 中：

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\neq 3,5\\ 3, & x=5\\ 5, & x=3.\end{cases}$$

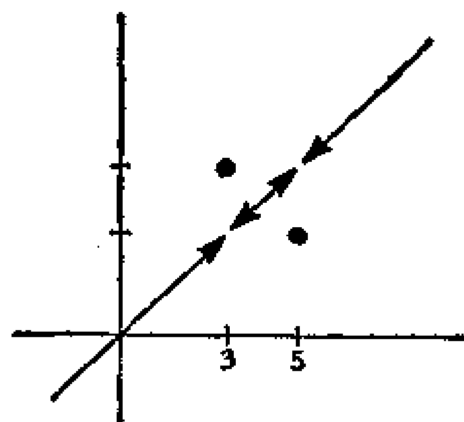


图 6

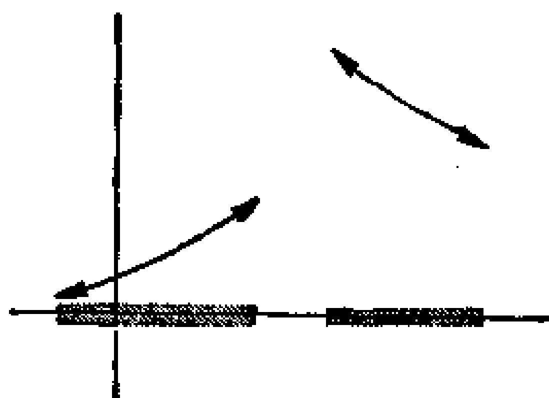


图 7

图 7 表明，甚至连续的一一函数，也可以既不是递增也不是递减的．但是如果你试绘几个图形，你将会立刻同意：定义于一个区间上的每个一一的连续函数不是递增就是递减．这个定理对不爱动脑子的人来说是件乐事；其证明用不着新的想法，但它的确需要

仔细加以组织．由两个引理开始是有帮助的，第二个引理是头一个引理的推论．

引理1　设 f 为定义在一个区间上的连续一一函数，并设 a, b 和 c 是这个区间的点，并且 $a<c<b$．若 $f(a)<f(b)$，则 $f(a)<f(c)<f(b)$；而若 $f(a)>f(b)$，则 $f(a)>f(c)>f(b)$（如图 8 所示）．

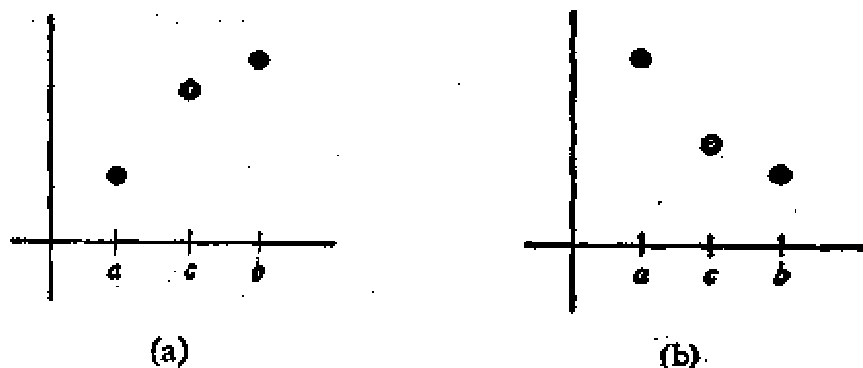


图 8

证明　先考虑 $f(a)<f(b)$ 的情形．因为 $c\neq a, b$，我们有 $f(c)\neq f(a)$，和 $f(c)\neq f(b)$，于是

不是 $f(c)<f(a)$

就是 $f(a)<f(c)<f(b)$

或 $f(b)<f(c)$，

只要排除第一和第三两个可能性即可．

假设 $f(c)<f(a)$（图 9）．将介值定理应用于区间 $[a, b]$：因为

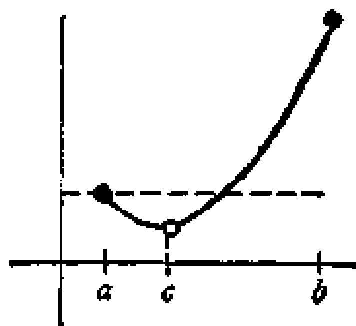


图 9

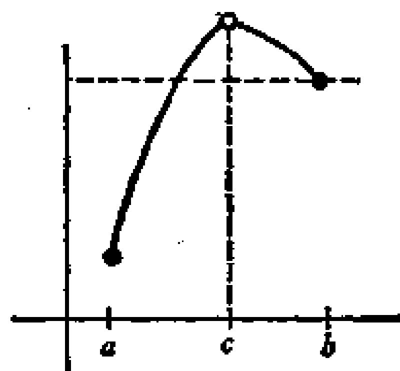


图 10

$f(c)<f(a)<f(b)$，故在$[c,b]$内存在某个x使$f(x)=f(a)$．但这与f是一一的事实相矛盾，因为$a\neq x$．于是$f(c)<f(a)$是不可能的．

类似地，假设$f(c)>f(b)$（图10）．将介值定理应用于区间$[a,c]$：因$f(a)<f(b)<f(c)$，故在$[a,c]$内存在某个x使$f(x)=f(b)$，这再次与f是一一的事实相矛盾．于是$f(c)>f(b)$也不成立，剩下的只有$f(a)<f(b)<f(c)$这个可能性．

$f(a)>f(b)$的情形可以用完全相同的方法处理．或者我们可以巧妙一些，将第一种情形应用于$-f$．

引理 2 设f为定义在某一区间上的连续一一函数．设a和b是该区间的两点，并假设$f(a)<f(b)$．若c为该区间的一点且$c<a$，则$f(c)<f(a)$；类似地，若$b<c$，则$f(b)<f(c)$．(对于$f(a)>f(b)$可以作出类似的叙述，但是我们不需要它.)

证明 考虑$c<a$的情形．先假设$f(c)>f(b)$．将引理1应用于$c<a<b$，将意味着$f(a)>f(b)$，这是不对的．因此$f(c)<f(b)$．现在可将引理1应用于$c<a<b$，便可断定$f(c)<f(a)<f(b)$．

$b<c$的情形可以类似地处理．

最后，我们已为下列定理作好准备．

定理 2 若f在一区间上是连续并且一一的，则f在该区间上不是递增就是递减的．

证明 设a和b为该区间内的两个数并且$a<b$．因为$f(a)\neq f(b)$，所以不是$f(a)<f(b)$就是$f(a)>f(b)$．我们先研究$f(a)<f(b)$的情形，并且证明f是递增的．

设c和d是该区间内的两点，且$c<d$．若c，d中的一个(或两个)等于a或b，则由引理1和2立刻可得$f(c)<f(d)$．其他的可能性导致下列六种情形：

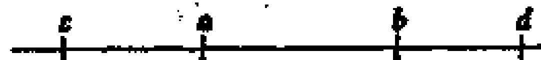
(1) $c<d<a<b$



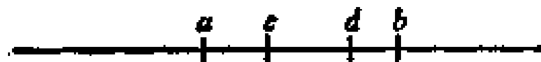
(2) $c<a<d<b$



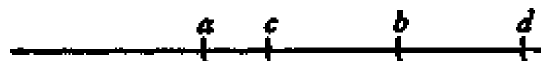
(3) $c<a<b<d$



(4) $a<c<d<b$



(5) $a<c<b<d$



(6) $a<b<c<d$



应用这两个引理，每一情形都容易处理．例如，在情形(1)中，先将引理 2 应用于 $c<a<b$，得 $f(c)<f(a)$，然后将引理 1 应用于 $c<d<a$，得 $f(c)<f(d)$．其余情形留给你们作为一个容易的练习．

若 $f(a)>f(b)$，我们可以同样地证明 f 是递减的．或者我们可以将刚才证明过的结果应用于 $-f$(显然这个方法更可取)．

此后我们将几乎只涉及定义在一个区间上的连续递增或递减函数．如果 f 是这样一个函数，就能很明确地说出 f^{-1} 的定义域是怎样的．

先假设 f 是在闭区间 $[a,b]$ 上的连续递增函数，那么，由介值定理知，f 取得 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的值．因此，f^{-1} 的定义域是闭区间 $[f(a),f(b)]$．同样地，若 f 在 $[a,b]$ 上是连续并且递减的，则 f^{-1} 的定义域是 $[f(b),f(a)]$．

如果 f 是在一开区间 (a,b) 上的连续递增函数，分析起来稍微困难些．首先，在 (a,b) 内选一点 c．我们将先确定 f 取得 $>f(c)$ 的哪些值．一种可能性是，f 取得任意大的值(图 11)．由介值定理知，在此情形中，f 取得 $>f(c)$ 的所有的值．另一方面，若 f 并不取得任意大的值，则 $A=\{f(x):c\leqslant x<b\}$ 是上有界的，故 A 有一

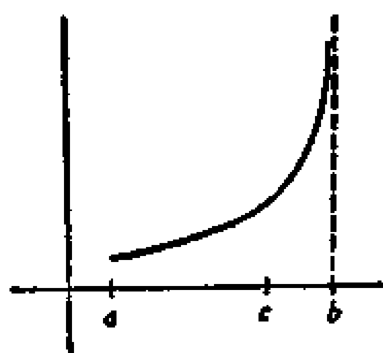


图 11

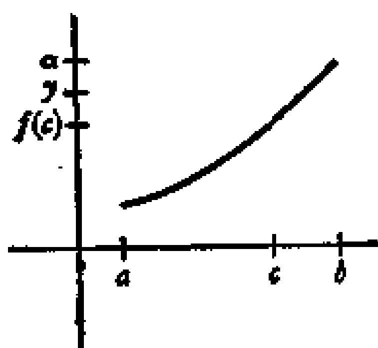


图 12

最小上界 α(图 12). 现在假设 y 是满足 $f(c)<y<\alpha$ 的任意数，则 f 取到某个值 $f(x)>y$(因为 α 是 A 的最小上界). 由介值定理知，f 实际上能取到 y 值. 注意 f 不能取得 α 值本身；因若对于 $a<x<b$ 有 $\alpha=f(x)$，那么我们取满足 $x<t<b$ 的 t，就有 $f(t)>\alpha$，而这是不可能的.

这些同样的论证，对于小于 $f(c)$ 的值也适用：要么 f 取得小于 $f(c)$ 的一切值，要么存在着一数 $\beta<f(c)$，使 f 取得在 β 和 $f(c)$ 之间所有的值，但不取得 β 本身.

当 f 是递减以及 f 的定义域是 $\mathbf{R}$ 或 (a,∞) 或 $(-\infty,a)$ 时，可以重复上述全部论证. 总起来说：若 f 是一连续递增或递减的函数，并且它的定义域是具有下列形式的区间

$$(a,b),\ (-\infty,b),\ (a,\infty) \text{ 或 } \mathbf{R},$$

则 f^{-1} 的定义域也是这四种形式的区间中的一种.

既然我们已经完成了对于连续一一函数的初步分析，可以开始问一一函数的哪些重要性质被其逆所继承. 连续性是不成问题的.

定理 3 若 f 在一区间上是连续和一一的，则 f^{-1} 也是连续的.

证明 我们由定理 2 知道 f 不是递增就是递减的. 我们不妨假设 f 是递增的，因为递减的情形可以用考虑 $-f$ 的通常技巧来

处理.

我们必须证明，对于 f^{-1} 的定义域内的每个 b 有

$$\lim_{x\to b} f^{-1}(x)=f^{-1}(b).$$

这个数 b 具有 $f(a)$ 的形式，a 为 f 的定义域内的某数. 对于任意 $\varepsilon>0$, 我们要找一个 $\delta>0$, 使得对于所有的 x,

如果 $f(a)-\delta<x<f(a)+\delta$, 就有 $a-\varepsilon<f^{-1}(x)<a+\varepsilon$. 图 13 提醒求 δ 的方法(记住，把书横过来，你就看到 f^{-1} 的图形)：因为

$$a-\varepsilon<a<a+\varepsilon,$$

所以
$$f(a-\varepsilon)<f(a)<f(a+\varepsilon);$$

我们设 δ 为 $f(a+\varepsilon)-f(a)$ 和 $f(a)-f(a-\varepsilon)$ 的较小者. 图 13 包含这个 δ 引出的全部的证明，而接着只是简单地用语句叙述包含在该图中的信息.

我们所选择的 δ 保证了

$$f(a-\varepsilon)\leqslant f(a)-\delta \text{ 和 } f(a)+\delta\leqslant f(a+\varepsilon).$$

故当
$$f(a)-\delta<x<f(a)+\delta$$

时，有
$$f(a-\varepsilon)<x<f(a+\varepsilon).$$

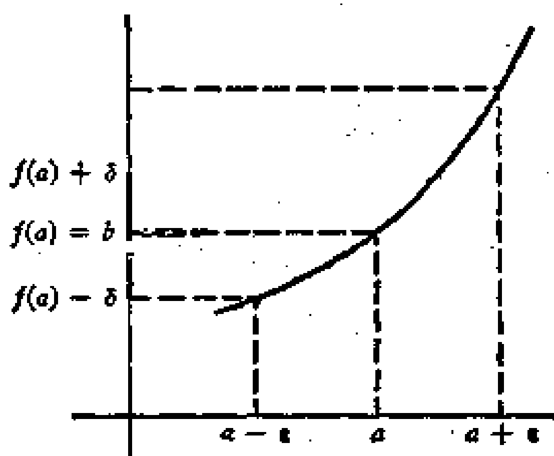


图 13

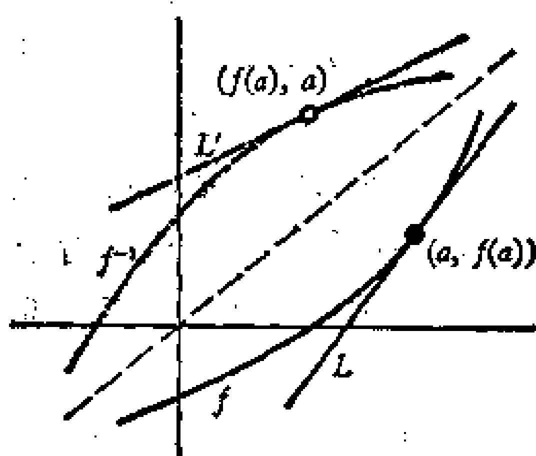


图 14

因为 f 是递增的，所以 f^{-1} 也是递增的，我们得

$$f^{-1}(f(a-\varepsilon))<f^{-1}(x)<f^{-1}(f(a+\varepsilon)),$$

即 $$a-\varepsilon<f^{-1}(x)<a+\varepsilon,$$

这正好是我们所需要的.

已经成功地研究了 f^{-1} 的连续性，现在只有解决可微性才合理. 又是图形说明应该有什么样的结果. 图 14 表示在 $(a, f(a))$ 处有切线 L 的一一函数 f 的图形. 当这整个图形通过对角线反射后，它表示了 f^{-1} 的图形和在 $(f(a), a)$ 处的切线 L'. L' 的斜率是 L 的斜率的倒数. 换言之，有

$$(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}.$$

这个公式也可以用直接表示 $(f^{-1})'(b)$ 的方式写成：对于 f^{-1} 的定义域内的每个 b,

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

不象对连续性的论证，这个形象的"证明"分析地表述时就有点麻烦. 有另一个途径可以试一下. 因为我们知道

$$f(f^{-1}(x))=x,$$

它诱使我们用链式法则来证明所要求的公式：

$$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1,$$

于是 $$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

可惜，这不是 f^{-1} 可微的证明，因为除非已经知道 f^{-1} 是可微的，否则不能用链式法则. 但这个论证表示了，当 f^{-1} 可微时 $(f^{-1})'(x)$ 必须等于什么，并且也可以由此得到某种重要的初步信息.

定理 4 如果 f 是定义在一个区间上的连续一一函数，且 $f'(f^{-1}(a))=0$，则 f^{-1} 在 a 处是不可微的.

证明 我们有

$$f(f^{-1}(x))=x.$$

假如 f^{-1} 在 a 处是可微的，则链式法则将意味着

$$f'(f^{-1}(a))\cdot(f^{-1})'(a)=1,$$

因此
$$0\cdot(f^{-1})'(a)=1,$$

这是背理的.

应用定理 4 的一个简单例子是函数 $f(x)=x^3$. 因 $f'(0)=0$和 $0=f^{-1}(0)$,故函数 f^{-1} 在 0 处不可微(图 15).

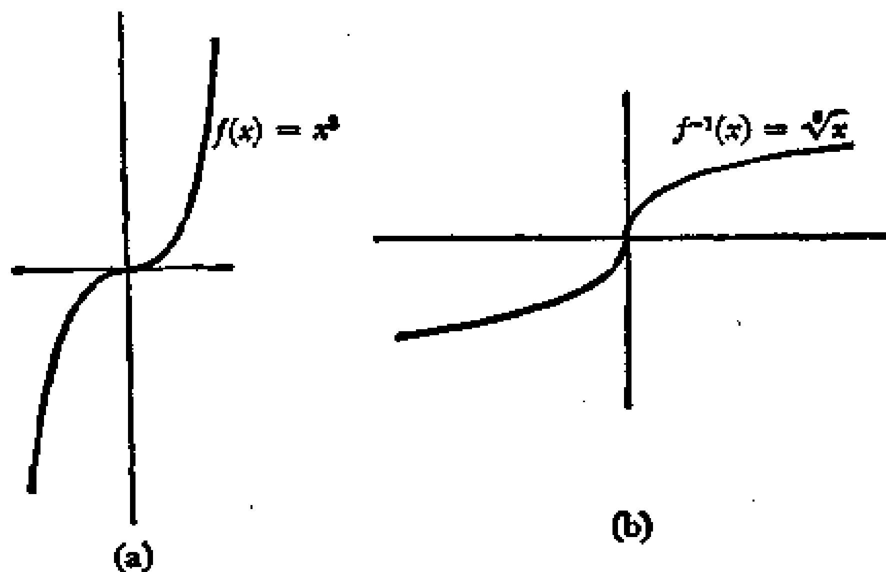


图 15

确定了反函数在何处不可微之后，我们就为严格证明以下事实作好准备：在所有可微的地方，其导数是由我们已用两种不同方法"导出"的公式表示的. 注意下列的论证要用我们已经证明过的 f^{-1} 的连续性.

定理 5 设 f 为定义在一区间上的连续一一函数，并设 f 在 $f^{-1}(b)$处可微,且导数 $f'(f^{-1}(b))\neq0$. 则 f^{-1} 在 b 处可微,并且

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

证明 设 $b=f(a)$. 则

$$\lim_{h\to0}\frac{f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f^{-1}(b+h)-a}{h}.$$

现在，在 f^{-1} 的定义域内的每一数 $b+h$ 可以对于一个唯一的 k(我们实际上应写 $k(h)$，但为简单起见我们姑且写成 k)写成

$$b+h=f(a+k)$$

的形式．则

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(b+h)-a}{h}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(a+k))-a}{f(a+k)-b}\\=&\lim_{h\to 0}\frac{k}{f(a+k)-f(a)}.\end{aligned}$$

这样做显然是对路的．不难得出关于 k 的显式，因为

$$b+h=f(a+k),$$

我们有
$$f^{-1}(b+h)=a+k,$$

即
$$k=f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b).$$

现在由定理 3 知，函数 f^{-1} 在 b 处连续．这意味着当 h 趋近 0 时 k 趋近 0．因为

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=f'(a)=f'(f^{-1}(b))\neq 0.$$

这意味着

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

我们对反函数所做的工作，虽然在以后将会充分地看到其作用，但这里有一个立即见效的应用．对于奇数的 n，设对于所有的 x，

$$f_n(x)=x^n;$$

对于偶数的 n，设 $x\geqslant 0$ 时

$$f_n(x)=x^n.$$

则 f_n 是连续一一函数，它的反函数是

$$g_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}.$$

根据定理 5 我们有，对于 $x\neq 0$，

$$\begin{aligned}g_n'(x)&=\frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))}\\&=\frac{1}{n(f_n^{-1}(x))^{n-1}}\\&=\frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}}\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^{1-(1/n)}}\\&=\frac{1}{n}\cdot x^{(1/n)-1}.\end{aligned}$$

故若 $f(x)=x^a$，且 a 为一整数或一自然数的倒数，则 $f'(x)=ax^{a-1}$. 现在容易验证当 a 为任何有理数时这个公式成立：设 $a=m/n$，其中 m 是一整数，而 n 是一自然数；若

$$f(x)=x^{m/n}=(x^{1/n})^m,$$

那么根据链式法则，

$$\begin{aligned}f'(x)&=m(x^{1/n})^{m-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot x^{(1/n)-1}\\&=\frac{m}{n}\cdot x^{[(m/n)-(1/n)]+[(1/n)-1]}\\&=\frac{m}{n}x^{(m/n)-1}.\end{aligned}$$

虽然我们现在有一个当 $f(x)=x^a$（a 是有理数）时 $f'(x)$ 的公式，但对于 a 为无理数时的函数 $f(x)=x^a$ 要留待以后论述——目前我们甚至不知道象 $x^{\sqrt{2}}$ 这样一个符号的**意义**．事实上，a 为无理数时的 x^a 的定义中，一定要用到反函数．的确，在以下几章中，一些重要的函数将用它们的反函数来定义．

习　题

1. 对于下列各题的 f，求 f^{-1}.

   (i) $f(x)=x^3+1$.

   (ii) $f(x)=(x-1)^3$.

   (iii) $f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

   (iv) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\geqslant 0. \\ 1-x^3, & x<0. \end{cases}$

   (v) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq a_1, \cdots, a_n \\ a_{i+1}, & x=a_i, i=1, \cdots, n-1 \\ a_1, & x=a_n. \end{cases}$

   (vi) $f(x)=x+[x]$.

   (vii) $f(0.a_1a_2a_3\cdots)=0.a_2a_1a_3\cdots$（这里用小数表示.）

   (viii) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, $-1<x<1$.

2. 绘制下列各题的 f^{-1} 的图形.

   (i) f 是递增并且恒为正的.

   (ii) f 是递增并且恒为负的.

   (iii) f 是递减并且恒为正的.

   (iv) f 是递减并且恒为负的.

3. 完成定理 2 的证明.

4. 证明：如果 f 是递增的，则 f^{-1} 也是递增的，对于递减函数亦然.

5. 如果 f 和 g 是递增的，则 $f+g$ 是否递增？$f\cdot g$ 怎样？$f\circ g$ 呢？

6. (a) 证明：如果 f 和 g 是一一的，于是 $f\circ g$ 也是一一的．求：用 f^{-1} 和 g^{-1} 表示的 $(f\circ g)^{-1}$．提示：答案**不**是 $f^{-1}\circ g^{-1}$.

   (b) 若 $g(x)=1+f(x)$，求：用 f^{-1} 表示的 g^{-1}.

7. 证明当且仅当 $ad-bc\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 是一一的，并求这时的 f^{-1}.

8. 下列函数在哪些区间 $[a, b]$ 上是一一的？

   (i) $f(x)=x^3-3x^2$.

   (ii) $f(x)=x^5+x$.

(iii) $f(x)=(1+x^2)^{-1}$.

(iv) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$.

9. 假设 f 是一一函数而 f^{-1} 有处处不为 0 的导数. 证明 f 是可微的. 提示: 有一个只要一步的证明.

*10. (a) 证明: 有一可微函数 f, 使对于所有的 x 有 $[f(x)]^5+f(x)+x=0$. 提示: 证明 f 能够表示为一个反函数. 做到这一点的最容易的方法是求 f^{-1}. 而求 f^{-1} 的最容易的方法是令 $x=f^{-1}(y)$.

(b) 用本章的一个适当的定理, 求用 f 表示的 f'.

(c) 用另外一种方法, 即用对定义 f 的方程求微分的方法, 来求 f'.

第 10 题中的函数有时称为由方程 $y^5+y+x=0$ **确定的隐函数**. 不过, 这个方程的情况是很特殊的. 如下题所示, 一个方程不是总能在整条直线上确定出一个隐函数, 而在某些区域内可以确定不止一个隐函数.

11. (a) 由方程 $x^2+y^2=1$ 在 $(-1, 1)$ 上确定的两个可微隐函数是什么? 亦即对于 $(-1, 1)$ 内所有的 x, 满足 $x^2+[f(x)]^2=1$ 的两个可微函数是什么? 注意在 $[-1, 1]$ 外无解.

(b) 哪些函数 f 满足 $x^2+[f(x)]^2=-1$?

*(c) 哪些可微函数 f 满足 $[f(x)]^3-3f(x)=x$? 提示: 先绘出函数 $g(x)=x^3-3x$ 的图形是有帮助的.

一般地说, 在哪些区间上由一个特定的方程确定一个隐的可微函数, 也许是一件麻烦的事情, 最好放在高等微积分的内容中讨论. 可是, 如果我们假设 f 是这样的一个可微的解, 正如第 10 题(c)所示, 对定义 f 的方程的两边求微分(即用所谓"隐函数微分法"), 就能推出 $f'(x)$ 的式子:

12. (a) 将这个方法应用于方程 $[f(x)]^2+x^2=1$. 注意你的答案将包含 $f(x)$; 我们只能作这样的期望, 因为由方程 $y^2+x^2=1$ 确定的隐函数不止一个.

(b) 用第 11 题(a)中所求得的两个函数检查你的答案是否正确.

(c) 将这个同样的方法应用于 $[f(x)]^3-3f(x)=x$.

13. 对于隐函数微分法用莱布尼兹记号特别方便. 因为 y 一向用作 $f(x)$ 的缩写, 所以确定隐函数 f 的 x 和 y 的方程, 自然表示 f 所应满足的方程. 如果用我们的记号, 下列的计算应该怎样写?

$$y^4+y^3+xy=1,$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{4y^3+3y^2+x}.$$

14. 既然引进了莱布尼兹记号，反函数的导数的莱布尼兹记号也就应该提出。若 dy/dx 表示 f 的导数，则 f^{-1} 的导数用 dx/dy 表示．用这种记号写出定理 5．由所得的式子你将看到莱布尼兹记号之所以被大量应用的另一原因．当用 dx/dy 记号时，也可以说明 $(f^{-1})'$ 是在哪一点进行计算．下列计算的意义是什么？

$$x=y^n,$$

$$y=x^{1/n},$$

$$\frac{dx^{1/n}}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}.$$

15. 假设 f 为可微一一函数，并且没有一处导数等于零，以及 $f=F'$．设 $G(x)=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))$．证明 $G'(x)=f^{-1}(x)$．（不管细节，本题告诉我们一个很有意思的事实：如果我们已知一个函数，它的导数是 f，我们也能知道一个函数，它的导数是 f^{-1}．可是怎么猜出这个函数 G？在习题十四，10 和十八，13 中略述两种不同的途径．）

16. 假设函数 h 有 $h'(x)=\sin^2(\sin(x+1))$ 和 $h(0)=3$．求
   (i) $(h^{-1})'(3)$.
   (ii) $(\beta^{-1})'(3)$，其中 $\beta(x)=h(x+1)$.

17. 求 $(f^{-1})''(x)$ 的公式．

*18. 证明：若 $f^{(k)}(f^{-1}(x))$ 存在并且非零，则 $(f^{-1})^{(k)}(x)$ 存在．

19. (a) 证明一个递增和一个递减函数至多相交一次．
   (b) 求两个连续递增函数 f 和 g，使正好当 x 是整数时 $f(x)=g(x)$．
   (c) 求定义在 $\mathbf{R}$ 上的根本不相交的一个连续递增函数 f 和一个连续递减函数 g.

*20. (a) 若 f 为在 $\mathbf{R}$ 上的一个连续函数且 $f=f^{-1}$，证明至少存在着一个 x 使 $f(x)=x$．（$f=f^{-1}$ 的几何意义是什么？）
   (b) 举几个使 $f=f^{-1}$ 而且正好有一个 x 使 $f(x)=x$ 的连续函数 f 的例子．提示：试用递减的 f，并回忆其几何解释．一种可能是 $f(x)=-x$.

(c) 证明：若 f 为一递增函数，使 $f=f^{-1}$，则对于所有的 x 有 $f(x)=x$. 提示：虽然几何的解释能直接使人信服，但最简单的证明（大约只有 2 行）是排除 $f(x)<x$ 和 $f(x)>x$ 这两个可能性.

*21. 哪些函数具有这样的性质：其图形通过 $-I$ 的图形（"反对角线"）反射后，仍然是一个函数的图形？

22. 当 $x<y$ 时若 $f(x)\leqslant f(y)$，则此函数是**非减的**.（更精确些，我们应规定 f 的定义域是一个区间.）一个**非增函数**可用类似的方式定义. 注意：有些作者用"递增"代替"非减"，而用"严格递增"代替我们的"递增".

(a) 证明：若 f 在某区间上是非减的但不是递增的，则 f 为常数.（当心，"不是递增的"和"非增"的意思不同.）

(b) 证明：若 f 是可微的并且是非减的，则对于所有的 x 有 $f'(x)\geqslant 0$.

(c) 证明：若对于所有的 x 有 $f'(x)\geqslant 0$，则 f 是非减的.

*23. (a) 假设对于所有的 x 有 $f(x)>0$，并且 f 是递减的. 证明有一连续递减函数 g，使对于所有的 x 有 $0<g(x)\leqslant f(x)$.

(b) 证明：我们甚至可以调整上述 g，使它满足 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)/f(x)=0$.

选题解答

1. (i) $f^{-1}(x)=(x-1)^{1/3}$.（设 $y=f^{-1}(x)$，则 $x=f(y)=y^3+1$，故 $y=(x-1)^{1/3}$.）

(iii) $f^{-1}=f$.（设 $y=f^{-1}(x)$，则

$$x=f(y)=\begin{cases} y, & y\text{ 为有理数} \\ -y, & y\text{ 为无理数}; \end{cases}$$

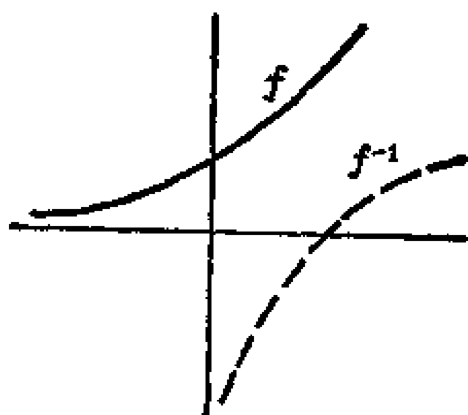
因为当且仅当 y 是有理数（或无理数）时 $\pm y$ 是有理数（或无理数），故当 x 为有理数时 $y=x$ 而当 x 为无理数时 $y=-x$. 于是 $y=f(x)$.）

(v)

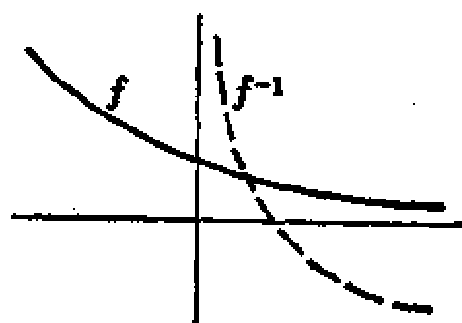
$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & x\neq a_1,\cdots,a_n \\ a_{i-1}, & x=a_i,\ i=2,\cdots,n \\ a_n, & x=a_1. \end{cases}$$

(vii) $f^{-1}=f$.

2. (i) f^{-1}是递增的，并且对于$x\leqslant 0, f^{-1}(x)$无定义。



(iii) f^{-1}是递减的，并且对于$x\leqslant 0, f^{-1}(x)$无定义。



4. 假设f是递增的．设$a<b$．则$f^{-1}(a)\neq f^{-1}(b)$，因f^{-1}是一一的．所以不是$f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$就是$f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$．但若$f^{-1}(a)>f^{-1}(b)$，则

$$b=f(f^{-1}(b))<f(f^{-1}(a))=a,$$

矛盾．对于递减f的证法是类似的，或者我们可用考虑$-f$的方法来代替．

5. 显然，$f+g$是递增的，因若$f(a)<f(b)$和$g(a)<g(b)$，则$(f+g)(a)=f(a)+g(a)<f(b)+g(b)=(f+g)(b)$．$f\cdot g$未必是递增的．例如，设$f(x)=g(x)=x$．（但若对于所有的$x$有$f(x)\geqslant 0$，则$f\cdot g$是递增的．）$f\circ g$是递增的，因若$a<b$，则$g(a)<g(b)$，故$f(g(a))<f(g(b))$．

6. (a) 若$(f\circ g)(x)=(f\circ g)(y)$，则$f(g(x))=f(g(y))$．于是，因$f$是一一的故$g(x)=g(y)$．又因$g$是一一的故$x=y$．$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$：因设$y=(f\circ g)^{-1}(x)$，则$x=(f\circ g)(y)=f(g(y))$，故$g(y)=f^{-1}(x)$，于是$y=g^{-1}(f^{-1}(x))$．

7. 若$f(x)=f(y)$，则

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ay+b}{cy+d},$$

于是

$$acxy+bcy+adx+bd=acxy+ady+bcx+bd,$$

或

$$ad(x-y)=bc(x-y).$$

如果 $ad\neq bc$，这意味着 $x-y=0$. (但若 $ad=bc$，则对于 f 的定义域内所有的 x 和 y 有 $f(x)=f(y)$.)

设 $y=f^{-1}(x)$，则 $x=f(y)$，于是

$$x=\frac{ay+b}{cy+d},$$

于是 $$f^{-1}(x)=y=\frac{-dx+b}{cx-a},\text{ 对于 } x\neq a/c.$$

8. (i) 那些包含在 $(-\infty, 0)$ 或 $[0, 2]$ 或 $[2, \infty)$ 内的区间 $[a, b]$，因 f 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[2, \infty)$ 上是递增的，而在 $(0, 2]$ 上是递减的.

   (iii) 那些包含在 $(-\infty, 0]$ 或 $[0, \infty)$ 内的区间 $[a, b]$，因 f 在 $(-\infty, 0]$ 上是递增的，而在 $[0, \infty)$ 上是递减的.

14. 导数公式记作

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

(在这个公式中，不用说，dx/dy 理解为 $(f^{-1})'(y)$，而 dy/dx 是一个"包含 x 的式子"，并且必须用方程 $y=f(x)$ 将最后答案中的 x 换成 y.)

第 14 题中的计算，当算出时表示

$$\frac{dx^{1/n}}{dx}=\frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}}=\frac{1}{nx^{1-(1/n)}}=\frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

15.
$$\begin{aligned}G'(x)&=x(f^{-1})'(x)+f^{-1}(x)-F'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)\\&=x(f^{-1})'(x)+f^{-1}(x)-f(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)\\&=x(f^{-1})'(x)+f^{-1}(x)-x(f^{-1})'(x)\\&=f^{-1}(x).\end{aligned}$$

16. (i)

$$(h^{-1})'(3)=\frac{1}{h'(h^{-1}(3))}=\frac{1}{h'(0)}=\frac{1}{\sin^2(\sin 1)}.$$

17. 因

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

我们有

$$(f^{-1})''(x)=\frac{-f''(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)}{[f'(f^{-1}(x))]^2}$$

$$=\frac{-f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}.$$

第十三章　积　　分

导数要和第三部分的第二个主要概念"积分"相结合之后才能显示出它的充分的力量．开始时好象完全离开这个话题——在本章中导数甚至一次也不出现：研究积分的确需要很长一段的准备．但是一旦这个准备工作做好了，积分就会成为用来产生新函数的非常宝贵的工具，而导数将在第十四章中再次出现，并且将比以前任何时候都更为有用．

虽然积分最终要用一个很复杂的方式来定义，但它能使一个简单而且直观的概念——面积形式化．现在，当你听到一个直观概念的定义会出现很大的困难时，可能不会感到惊异——"面积"当然也不例外．

在初等几何中，得到了许多平面图形面积的公式，但稍微回顾一下，就会看到几乎没有给出一个可接受的面积的定义．一个区域的面积有时定义为与该区域相吻合的边长为 1 的正方形的数目．但这个定义不是对任意的甚至最简单的区域都适合．例如，半径为 1 的圆，被认为以无理数 π 作为它的面积，但"π 个正方形"是什么意思就根本不清楚．即使我们考虑一个半径为 $1/\sqrt{\pi}$ 的圆，它的面积被认为为 1，也很难说出有什么方法能使单位正方形与该圆相吻合，因为似乎不可能将单位正方形分成许多小块，使它们能排列成一个圆．

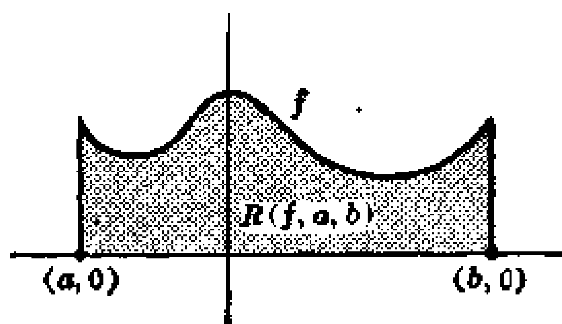


图　1

在本章中我们只尝试定义某些很特殊区域的面积（图 1）——这些区域是以水平轴，通过 $(a,0)$

和$(b, 0)$的直立线，以及对于$[a, b]$内所有的x有$f(x)\geqslant 0$的函数f的图形为边界. 用$R(f, a, b)$表示这个区域是方便的. 注意，这些区域包括矩形和三角形以及另外许多重要的几何图形.

这个最终被指定为$R(f, a, b)$的面积的数将称为f在$[a, b]$上的**积分**. 实际上，即使不满足对于$[a, b]$内所有的x有$f(x)\geqslant 0$这个条件的函数f，也能定义积分. 设f为如图2所示的函数，积分将表示淡影线区域的面积与浓影线区域的面积之差（$R(f, a, b)$的“代数面积”）.

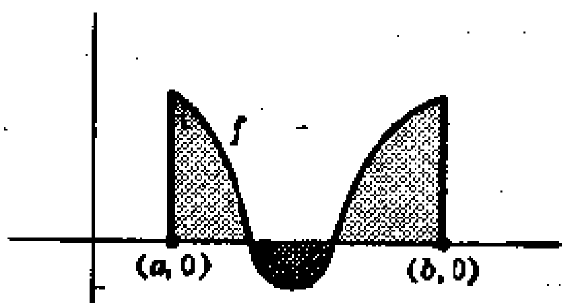


图 2

下面这个未来的定义所根据的想法如图3所示. 区间$[a, b]$已用满足

$$a=t_0<t_1<t_2<t_3<t_4=b$$

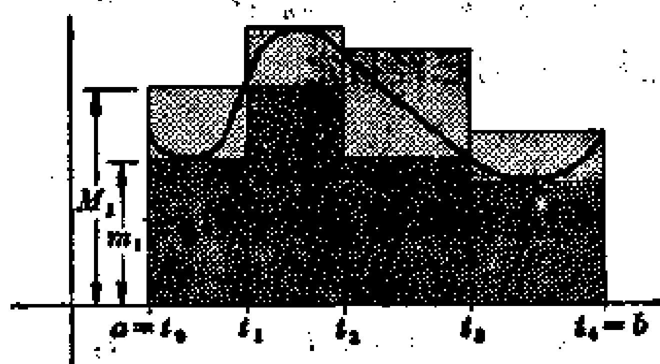


图 3

的数t_0, t_1, t_2, t_3, t_4分成四个子区间（下标的编号由0开始，以使最大下标等于子区间的数目）

$$[t_0, t_1]\ [t_1, t_2]\ [t_2, t_3]\ [t_3, t_4].$$

在第一个区间$[t_0, t_1]$上，函数f有最小值m_1和最大值M_1；同样地，在第i个区间$[t_{i-1}, t_i]$上，设f的最小值为m_i，最大值为M_i. 和

$$s=m_1(t_1-t_0)+m_2(t_2-t_1)+m_3(t_3-t_2)+m_4(t_4-t_3)$$

表示在区域 $R(f,a,b)$ 内部的矩形的总面积，而和

$$S=M_1(t_1-t_0)+M_2(t_2-t_1)+M_3(t_3-t_2)+M_4(t_4-t_3)$$

表示包含区域 $R(f,a,b)$ 的那些矩形的总面积. 我们试图定义 $R(f,a,b)$ 的面积 A 的指导思想是认为 A 应满足

$$s\leqslant A \text{ 和 } A\leqslant S,$$

并且不管怎样细分区间 $[a,b]$，它都应当成立. 希望这些条件能够确定 A. 下列定义着手将这个论述正式化，并删除其中某些暗含的假设.

定义

> 设 $a<b$. 区间 $[a,b]$ 的**划分**是 $[a,b]$ 内点的有限集合，其中一个点是 a，一个点是 b.

在划分中的点可以编号为 $t_0,\cdots,t_n$，使

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b;$$

我们总是假设这样的编号已经指定.

定义

> 假设 f 在 $[a,b]$ 上有界，以及 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ 是 $[a,b]$ 的划分. 设
>
> $$m_i=\inf\{f(x):t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\},$$
> $$M_i=\sup\{f(x):t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\}.$$
>
> f 对于 P 的**下和**，用 $L(f,P)$ 表示，定义为
>
> $$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}).$$
>
> f 对于 P 的**上和**，用 $U(f,P)$ 表示，定义为
>
> $$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}).$$

在前面的例子里，下和与上和相应为 s 与 S，它们分别代表在 f 图形以下与以上的矩形的总面积. 然而要注意，这些和尽管是

由几何引起的，但在给它们所下的严格的定义中，却一点也没用到“面积”的概念.

定义中的两个细节应当解释一下. 为了使所有的 m_i 和 M_i 都有定义，f 在 $[a,b]$ 上是有界的这个条件是必不可少的. 尚需注意，由于没有假定 f 是连续的，故有必要将数 m_i 和 M_i 定义为 inf 和 sup 的值，而不定义为最小和最大.

关于下和与上和有一件事是清楚的：设 P 为任意划分，则

$$L(f,P)\leqslant U(f,P).$$

因为

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),$$

而对于每一个 i，我们有

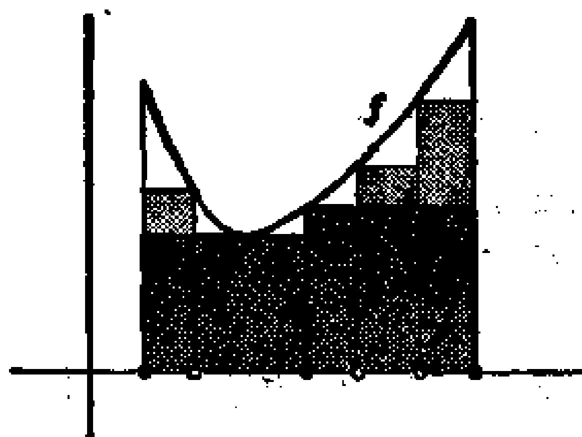
$$m_i(t_i-t_{i-1})\leqslant M_i(t_i-t_{i-1}).$$

另一方面，有些不大明显的事实应能成立：若 P_1 和 P_2 为 $[a,b]$ 的任意两个划分，则有下列事实

$$L(f,P_1)\leqslant U(f,P_2).$$

因为 $L(f,P_1)$ 应 $\leqslant$ 面积 $R(f,a,b)$，而 $U(f,P_2)$ 应 $\geqslant$ 面积 $R(f,a,b)$. 虽然这个陈述什么也证明不了(因为“$R(f,a,b)$ 的面积”还没有定义过)，但它的确指出，如果想定义 $R(f,a,b)$ 的面积，就应当先证明 $L(f,P_1)\leqslant U(f,P_2)$. 我们即将给出的证明要依靠一个引理，而这个引理涉及划分包含更多的点时下和及上和的性态. 在图 4 中，划分 P 包含黑点，而划分 Q 包含黑点和圈点. 该图说明，由划分 Q 所绘出的矩形，比由原来的划分 P 所绘出的矩形更接近区域 $R(f,a,b)$. 准确地说：

引理 若 Q 包含 P(即设 P 的所有的点也在 Q 内)，则


图 4

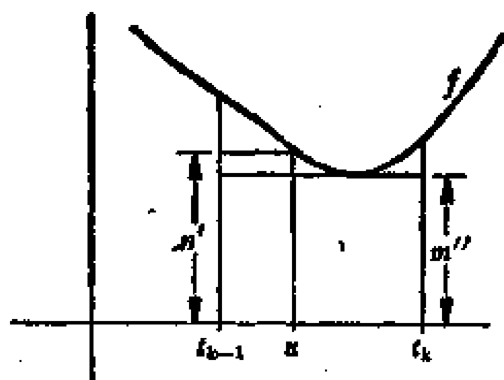


图 5

$$L(f,P)\leqslant L(f,Q),$$
$$U(f,P)\geqslant U(f,Q).$$

证明 先考虑特殊情形(图 5)，其中 Q 只比 P 多包含一个点:

$$P=\{t_0,\cdots,t_n\},$$
$$Q=\{t_0,\cdots,t_{k-1},u,t_k,\cdots,t_n\},$$

其中

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<u<t_k<\cdots<t_n=b.$$

设

$$m'=\inf\{f(x):t_{k-1}\leqslant x\leqslant u\},$$
$$m''=\inf\{f(x):u\leqslant x\leqslant t_k\}.$$

则

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),$$
$$L(f,Q)=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(t_i-t_{i-1})+m'(u-t_{k-1})+m''(t_k-u)$$
$$+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}).$$

为了证明 $L(f,P)\leqslant L(f,Q)$，只要证明

$$m_k(t_k-t_{k-1})\leqslant m'(u-t_{k-1})+m''(t_k-u).$$

现在，集合 $\{f(x): t_{k-1}\leqslant x\leqslant t_k\}$ 包含 $\{f(x): t_{k-1}\leqslant x\leqslant u\}$ 内所有的

数以及某些可能更小的数，因此头一个集合的最大下界小于或等于第二个的最大下界；于是

$$m_k \leqslant m'.$$

同样地，

$$m_k \leqslant m''.$$

因此

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u)$$
$$\leqslant m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

这证明了在此特殊情形中，$L(f,P) \leqslant L(f,Q)$. $U(f,P) \geqslant U(f,Q)$ 的证明是类似的，留给你们作为一个容易而有益的练习.

一般情形现在可以很容易地推出. 划分 Q 可以由 P 每次加上一个点而得到；换言之，有一系列的划分

$$P = P_1, P_2, \cdots, P_a = Q,$$

而 P_{j+1} 正好比 P_j 多包含一个点. 那么

$$L(f,P) = L(f,P_1) \leqslant L(f,P_2) \leqslant \cdots \leqslant L(f,P_a) = L(f,Q),$$

和 $$U(f,P) = U(f,P_1) \geqslant U(f,P_2) \geqslant \cdots \geqslant U(f,P_a) = U(f,Q). \blacksquare$$

我们所要证明的定理，是这个引理的一个简单的推论.

定理 1 设 P_1 和 P_2 是 $[a, b]$ 的划分，并设 f 在 $[a, b]$ 上有界. 则

$$L(f,P_1) \leqslant U(f,P_2).$$

证明 有一个包含 P_1 和 P_2 的划分 P(设 P 由在 P_1 和 P_2 内所有的点组成). 根据引理，

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P) \leqslant U(f,P) \leqslant U(f,P_2). \blacksquare$$

由定理 1 知，任何上和 $U(f,P')$ 是所有下和 $L(f,P)$ 的集合的一个上界，因此，对任何划分 P'，上和 $U(f,P')$ 大于或等于所有下和的最小上界：

$$\sup\{L(f,P): P \text{ 为} [a,b] \text{的划分}\} \leqslant U(f,P').$$

这反过来又意味着 $\sup\{L(f,P)\}$ 是 f 的所有上和的集合的一个下界. 因此

$$\sup\{L(f,P)\}\leqslant\inf\{U(f,P)\}.$$

显然，这两个数在 f 对于所有的划分的下和与上和之间：

$$L(f,P')\leqslant\sup\{L(f,P)\}\leqslant U(f,P'),$$

$$L(f,P')\leqslant\inf\{U(f,P)\}\leqslant U(f,P'),$$

P' 为任意的划分.

很可能有

$$\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\};$$

在这种情形下，这是在 f 对于所有的划分的下和与上和之间的唯一的数，因而将此数当作 $R(f,a,b)$ 的面积是很理想的. 另一种可能，若

$$\sup\{L(f,P)\}<\inf\{U(f,P)\},$$

则在 $\sup\{L(f,P)\}$ 与 $\inf\{U(f,P)\}$ 之间的每一数 x，将满足对于所有的划分 P'，

$$L(f,P')\leqslant x\leqslant U(f,P').$$

至于什么时候才会出现这样伤脑筋的事，还一点也不清楚. 下面两例虽然不如即将举出的许多例子有趣，但却说明这两种现象都是可能出现的.

先假设对于 $[a,b]$ 内所有的 x 有 $f(x)=c$（图 6）. 设 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ 是 $[a,b]$ 的任意划分，则

$$m_i=M_i=c,$$

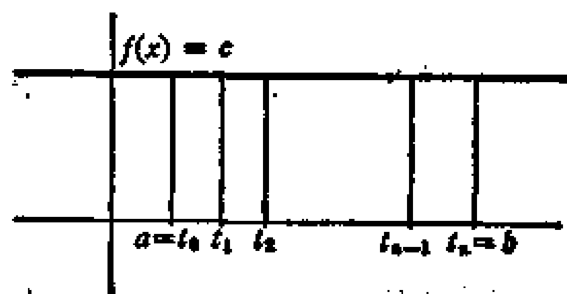


图 6

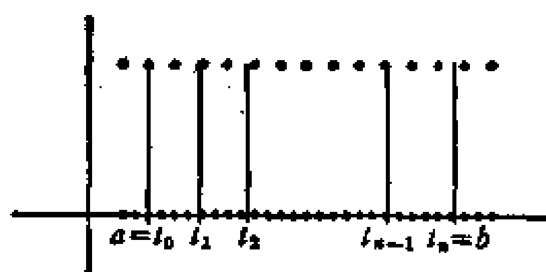


图 7

于是

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}c(t_i-t_{i-1})=c(b-a),$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}c(t_i-t_{i-1})=c(b-a).$$

在此情形中，所有下和与上和相等，并且

$$\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\}=c(b-a).$$

现在考虑(图 7)由下列定义的函数 f

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数}\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

设 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ 是任意划分，则

$m_i=0$，因为在 $[t_{i-1},t_i]$ 内有一无理数，

和

$M_i=1$，因为在 $[t_{i-1},t_i]$ 内有一有理数。

因此

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}0\cdot(t_i-t_{i-1})=0,$$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot(t_i-t_{i-1})=b-a.$$

于是，在此情形中 $\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\}$ 当然不成立。作为定义面积的基础的原理所提供的信息，不足以确定一个特殊的 $R(f,a,b)$ 的面积——在 0 与 $b-a$ 之间的任何数好象都可以。另一方面，区域 $R(f,a,b)$ 很奇怪，我们可以公正地根本不给它规定任何面积。事实上，更一般地，我们可以坚持认为，只要

$$\sup\{L(f,P)\}\neq\inf\{U(f,P)\},$$

区域 $R(f,a,b)$ 太不合理，而不应该有面积。就如求助于"不合理"一词所暗示的，我们将用术语来掩盖我们的无知。

定义

> 对于$[a, b]$上的有界的函数f，若
>
> $$\sup\{L(f,P): P\text{是}[a, b]\text{的划分}\} = \inf\{U(f,P): P\text{是}[a, b]\text{的划分}\},$$
>
> 则称f在$[a, b]$上是**可积的**。这时，这个公共的数称为f在$[a, b]$上的**积分**，并且表示为
>
> $$\int_a^b f.$$
>
> （符号$\int$称为**积分号**，它原先是一个拉长的s，代表"sum（和）"；数a和b称为积分的**下限**和**上限**。）积分$\int_a^b f$也称为对于$[a, b]$内所有的x有$f(x)\geq 0$时$R(f, a, b)$的面积。

如果f可积，则根据这个定义，

$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P)\text{，对于}[a, b]\text{的任意划分}P.$$

另外，$\int_a^b f$是具有这种性质的**唯一**的数。

这个定义只是明确而没有解决前面所讨论的问题，我们不知道哪些函数可积（我们也不知道，当f是可积时怎样求f在$[a, b]$上的积分）。目前我们只知道两个例子：

（1）设$f(x)=c$，则f在$[a, b]$上是可积的，并且$\int_a^b f = c\cdot(b-a)$。（注意，这个积分定出所期望的矩形面积。）

（2）设$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ 1, & x\text{为有理数},\end{cases}$ 则f在$[a, b]$上是不可积的。

在进一步讨论这些问题之前，再多举几个例子。然而，即使对于这些例子，有下列明确表述的判别可积性的简单准则，也是有帮助的。

定理2 若f在$[a, b]$上有界，则当且仅当对于任意$\varepsilon>0$，存

在着$[a,b]$的一个划分 P，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

时，f 在$[a,b]$上是可积的.

证明 先假设对于任意 $\varepsilon>0$，存在着一个划分 P，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

因为

$$\inf\{U(f,P')\}\leqslant U(f,P),$$

$$\sup\{L(f,P')\}\geqslant L(f,P),$$

由此得

$$\inf\{U(f,P')\}-\sup\{L(f,P')\}<\varepsilon.$$

因上式对于所有的 $\varepsilon>0$ 都成立，故

$$\sup\{L(f,P')\}=\inf\{U(f,P')\};$$

于是按定义 f 是可积的. 逆论断的证明是类似的. 设 f 是可积的，则

$$\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\}.$$

这意味着，对于每个 $\varepsilon>0$，存在着划分 P'，P''，使得

$$U(f,P'')-L(f,P')<\varepsilon.$$

设 P 为包含 P' 和 P'' 的划分. 则根据引理，

$$U(f,P)\leqslant U(f,P'')$$

$$L(f,P)\geqslant L(f,P');$$

因此

$$U(f,P)-L(f,P)\leqslant U(f,P'')-L(f,P')<\varepsilon.$$ ▮

尽管古板的证明占去一些篇幅，但是显然定理 2 除了重述可积性的定义外，没有什么新东西。虽然如此，这种重述很便于应用，因为它没有提到往往是很难处理的 sup 和 inf. 下一个例子就说明这一点，并且很好介绍了对于即使在很简单的情况下积分的复杂定义需要的那种推理。

设 f 在$[0,2]$上由下式定义

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

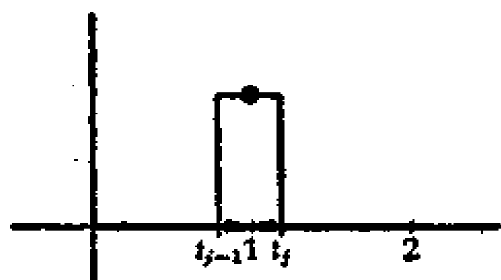


图 8

假设 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ 是[0,2] 的划分，并且有

$$t_{j-1}<1<t_j$$

(见图 8)，则

$$m_i=M_i=0,\text{ 当 } i\neq j \text{ 时};$$

但
$$m_j=0 \text{ 和 } M_j=1.$$

因为
$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{j-1}m_i(t_i-t_{i-1})+m_j(t_j-t_{j-1})$$
$$+\sum_{i=j+1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),$$
$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{j-1}M_i(t_i-t_{i-1})+M_j(t_j-t_{j-1})$$
$$+\sum_{i=j+1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),$$

我们有
$$U(f,P)-L(f,P)=t_j-t_{j-1}.$$

这当然表明 f 是可积的：为了得到一个划分 P，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$

只需选择一划分，使得

$$t_{j-1}<1<t_j \text{ 和 } t_j-t_{j-1}<\varepsilon.$$

另外，显然对于所有的划分 P 有

$$L(f,P)\leqslant 0\leqslant U(f,P).$$

因为 f 是可积的，所以只有一个数在所有的下和与上和之间，即 f 的积分，因此

$$\int_a^b f=0.$$

尽管 f 的不连续性造成了本例的困难，但是甚至非常简单的

连续函数也会出现麻烦. 例如, 设 $f(x)=x$, 并且为了简单起见, 考虑区间 $[0,b]$, 其中 $b>0$. 设 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ 是 $[0,b]$ 的一个划分, 则(图 9)

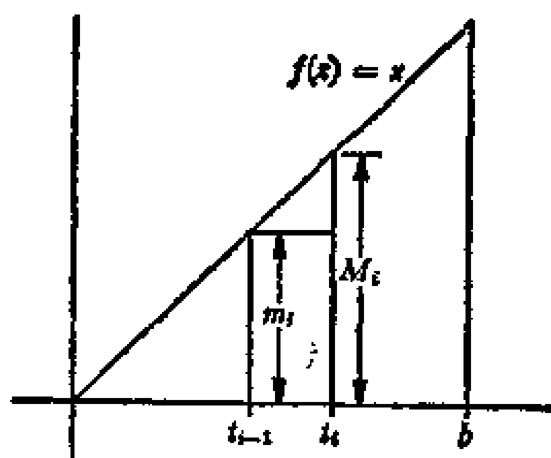


图 9

$$m_i=t_{i-1} \text{ 和 } M_i=t_i.$$

因此

$$\begin{aligned}L(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}(t_i-t_{i-1})\\&=t_0(t_1-t_0)+t_1(t_2-t_1)+\cdots+t_{n-1}(t_n-t_{n-1}),\\U(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}t_i(t_i-t_{i-1})\\&=t_1(t_1-t_0)+t_2(t_2-t_1)+\cdots+t_n(t_n-t_{n-1}).\end{aligned}$$

这两个公式都不特别引人注意, 但对于分成 n 个相等子区间的划分 $P_n=\{t_0,\cdots,t_n\}$, 这两式就大为简化. 此时, 每一子区间的长度 t_i-t_{i-1} 等于 b/n, 于是

$$t_0=0,$$

$$t_1=\frac{b}{n},$$

$$t_2=\frac{2b}{n}, \text{ 等等;}$$

一般地,

$$t_i=\frac{ib}{n}.$$

那么

$$\begin{aligned}L(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n}t_{i-1}(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(i-1)b}{n}\right\}\cdot\frac{b}{n}\\&=\left(\sum_{j=0}^{n-1}j\right)\frac{b^2}{n^2}.\end{aligned}$$

回忆公式 $$1+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

前一式可以写成 $$L(f,P_n)=\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot\frac{b^2}{n^2}$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{b^2}{2}.$$

类似地, $$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}t_i(t_i-t_{i-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{ib}{n}\cdot\frac{b}{n}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{b^2}{n^2}$$
$$=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{b^2}{2}.$$

当 n 很大时, $L(f,P_n)$ 和 $U(f,P_n)$ 都接近 $b^2/2$, 这样就容易证明 f 是可积的. 先注意

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{2}{n}\cdot\frac{b^2}{2}.$$

这表明存在着划分 P_n, 能使 $U(f,P_n)-L(f,P_n)$ 要多小就多小. 由定理 2 知, 函数 f 是可积的. 另外, 现在只要稍花一点功夫就能求出 $\int_0^b f$. 首先, 显然有

$$L(f,P_n)\leqslant\frac{b^2}{2}\leqslant U(f,P_n), \text{对于所有的 } n.$$

虽然这个不等式只说明 $b^2/2$ 在某些特殊的上和与下和之间, 但是我们刚才已经看到, $U(f,P_n)-L(f,P_n)$ 可以要多小就多小, 因此, 只有一个数满足这个性质. 因为积分当然具有这个性质, 所以我们可以断定

$$\int_0^b f=\frac{b^2}{2}.$$

注意，这个等式给出底与高皆为 b 的直角三角形的面积 $b^2/2$ (图 10). 应用更复杂的计算，或应用定理 4, 可以证明

$$\int_a^b f=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}.$$

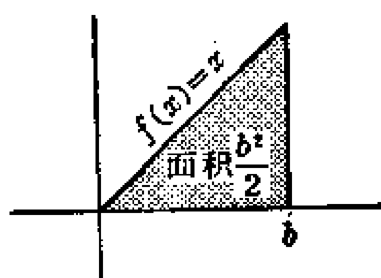


图 10

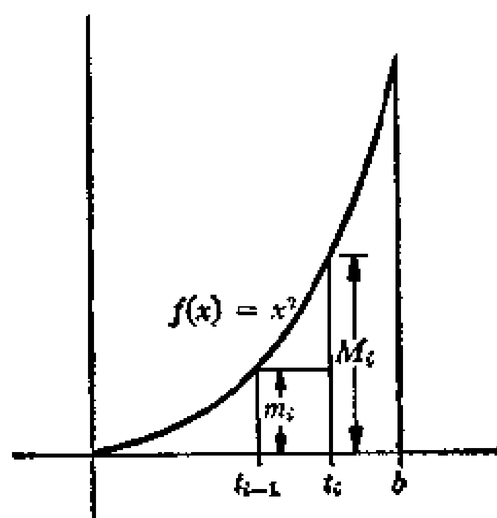


图 11

函数 $f(x)=x^2$ 甚至会出现更大的困难. 在此情形中 (图 11), 设 $P:=\{t_0, \cdots, t_n\}$ 是 $[0, b]$ 的划分, 则

$$m_i=f(t_{i-1})=(t_{i-1})^2$$

和

$$M_i=f(t_i)=t_i^2.$$

再选一个分为 n 等份的划分 $P_n=\{t_0, \cdots, t_n\}$, 使得

$$t_i=\frac{i\cdot b}{n},$$

下和与上和变成

$$\begin{aligned}L(f,P_n)&=\sum_{i=1}^{n}(t_{i-1})^2\cdot(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n}\\&=\frac{b^3}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1}j^2,\end{aligned}$$

$$U(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}t_i^2\cdot(t_i-t_{i-1})$$

$$=\sum_{j=1}^{n} j^2 \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n}$$

$$=\frac{b^3}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

由习题二，1 知

$$1^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

于是，这些和可以写成

$$L(f,P_n)=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1),$$

$$U(f,P_n)=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

不难证明 $$L(f,P_n)\leqslant\frac{b^3}{3}\leqslant U(f,P_n),$$

当 n 充分大时 $U(f,P_n)-L(f,P_n)$ 能够要多小就多小．根据和前面相同的理由，得

$$\int_0^b f=\frac{b^3}{3}.$$

这个计算已经表达一个不平常的结果——这个抛物线所包围的区域的面积，在初等几何中通常没有导出．不过，这个结果阿基米德已经知道，他用本质上相同的方法导出了它．我们能够说的，其唯一优越之处是，在下一章中，我们将找出一个更简单的方法，来得到这个结果．

我们所讨论的一些事情可以概括如下：

$$\int_a^b f=c\cdot(b-a)，\text{如果对于所有的 } x \text{ 有 } f(x)=c,$$

$$\int_a^b f=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}，\text{如果对于所有的 } x \text{ 有 } f(x)=x,$$

$$\int_a^b f=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\text{如果对于所有的 } x \text{ 有 } f(x)=x^2.$$

由上面可见，由于没有一个方便的记号来表示由这些公式定义的函数，致使记号$\int_a^b f$受到影响．由于这个原因，也用其他可取的记号*（类似于记号 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$）：

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 和 } \int_a^b f \text{ 的意义完全一样.}$$

于是

$$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a),$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

注意，象在记号 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$中一样，符号 x 可以用任何其他字母（当然，f、a 或 b 除外）来代替；

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(c)dc.$$

记号 dx 单独使用是没有意义的，正如除了在 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$中，记号 $x\to$ 单独使用没有任何意义．在下列等式中

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

整个记号 x^2dx 可以看成为下面的话的简写：

对于所有的 x 有 $f(x)=x^2$ 的函数 f.

---

* 记号 $\int_a^b f(x)dx$ 实际上是更老的，并且是多年来用于积分的唯一记号．莱布尼兹之所以用这个记号，是因为他将积分当作高为 $f(x)$、宽为"无穷小"dx 的无穷多个矩形之和（用$\int$表示）．其后的作者们用 $x_0, \cdots, x_n$ 表示划分的点，且将 $x_i - x_{i-1}$ 简写为 Δx_i．积分就被定义为当 Δx_i 趋近 0 时，和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ 的极限（类似于下和与上和）．将 Σ 换成$\int$，$f(x_i)$换成 $f(x)$，Δx_i 换成 dx，就得到极限，这为很多人所乐用．

这个积分记号，象记号 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 一样可以变化. 下面几个例子有助于说明经常出现的各种类型的公式；我们已经用了定理5和6*.

(1) $\int_a^b (x+y)dx=\int_a^b xdx+\int_a^b ydx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}+y(b-a)$.

(2) $\int_a^x (y+t)dy=\int_a^x ydy+\int_a^x tdy=\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{2}+t(x-a)$.

(3)
$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_a^x (1+t)dy\right)dx&=\int_a^b (1+t)(x-a)dx\\&=(1+t)\int_a^b (x-a)dx\\&=(1+t)\left[\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}-a(b-a)\right].\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_c^d (x+y)dy\right)dx&=\int_a^b\left[x(d-c)+\frac{d^2}{2}-\frac{c^2}{2}\right]dx\\&=\left(\frac{d^2}{2}-\frac{c^2}{2}\right)(b-a)+(d-c)\int_a^b xdx\\&=\left(\frac{d^2}{2}-\frac{c^2}{2}\right)(b-a)+(d-c)\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

$\int_a^b xdx$ 和 $\int_a^b x^2dx$ 的计算，使人想到，计算积分一般是困难或不可能的. 事实上，大量的函数的积分是不可能精确地确定的(虽然用计算下和与上和的方法，可将它们计算到所希望达到的任意精确度). 尽管如此，我们在下一章中将要看到，有许多函数的积分可以很容易算出.

虽然有许多积分不能精确算得，但至少要知道什么时候函数f

---

* 等式(1)有一个重要的限制，免得读者在看其他书时发生混乱. 这个等式说明，$\int_a^b ydx$ 就是每一值 $f(x)$ 等于数 y 的函数 f 的积分. 但经典的记号，常用 y 表示 $y(x)$，因而 $\int_a^b ydx$ 可以表示某一任意函数 y 的积分.

在$[a, b]$上可积．虽然能够确切地说出哪些函数是可积的，但在这里提出判别可积的准则还有些困难，我们只好解决一部分．现在提出一个最有用的结果，但其证明将放在下一章末尾．

定理3 若f在$[a, b]$上连续，则f在$[a, b]$上可积．(注意，因为有了连续性，所以不需要假设f在$[a, b]$上有界．)

虽然本定理将提供本书应用积分时所必须的全部信息，但最好多提供一些可积函数．有几道习题详细地讨论这个问题．了解下列三个定理是有帮助的，这三个定理指出，当f在$[a, c]$和$[c, b]$上可积时，它在$[a, b]$上可积；若f与g可积，则$f+g$可积；若f可积而c是任意数，则$c \cdot f$可积．

作为这些定理的一个简单的应用，回忆一下，如果函数f除了在一点其值为1之外都为0，则f可积．将此函数乘以c，便知：若在这个例外的点f的值是c，则f同样可积．将这样一个函数加到一个可积函数上，我们看到，这个可积函数的值，在一点可以随意改变，而不破坏其可积性．将区间分为许多子区间，我们知道，函数的值可以在有限多个点上改变．

这些定理的证明，经常用到定理2中判别可积性的准则；正如我们以前的一些论证所表现的那样，论证的细节往往会掩盖证明的要点．所以，最好你自己先试证，然后用下列证明来核对，或证不出时再看它们．这样，也许会容易看懂下列的证明，并且对于一些问题所要用到的技巧，当然是一次很好的实践．

定理4 设$a<c<b$．若f在$[a, b]$上可积，则f在$[a, c]$和$[c, b]$上可积．反之，若f在$[a, c]$和$[c, b]$上可积，则f在$[a, b]$上可积．最后，若f在$[a, b]$上可积，则

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

证明 假设f在$[a, b]$上可积．设$\varepsilon>0$，存在着$[a, b]$的一个

划分 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$，使得

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

我们不妨假设对于某个 j 有 $c=t_j$.（否则，设 Q 为包含 $t_0,\cdots,t_n$ 和 c 的划分，则 Q 包含 P，于是 $U(f,Q)-L(f,Q)\leqslant U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.）

现在 $P'=\{t_0,\cdots,t_j\}$ 是 $[a,c]$ 的一个划分，而 $P''=\{t_j,\cdots,t_n\}$ 是 $[c,b]$ 的一个划分(图 12). 因为

$$L(f,P)=L(f,P')+L(f,P''),$$
$$U(f,P)=U(f,P')+U(f,P''),$$

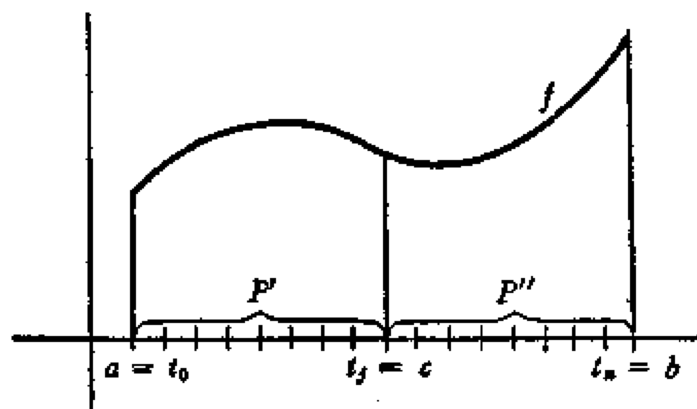


图 12

我们有

$$[U(f,P')-L(f,P')]+[U(f,P'')-L(f,P'')]$$
$$=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

因为方括号内的每一项都是非负的，故每一项都小于 ε. 这说明 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积. 并注意到

$$L(f,P')\leqslant\int_a^c f\leqslant U(f,P'),$$

$$L(f,P'')\leqslant\int_c^b f\leqslant U(f,P''),$$

于是

$$L(f,P)\leqslant\int_a^b f+\int_b^c f\leqslant U(f,P).$$

因为上式对于任何 P 都成立，这证明

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f.$$

现在假设 f 在$[a,c]$和$[c,b]$上可积. 设 $\varepsilon>0$, 存在着$[a,c]$的一个划分 P' 和$[c,b]$的一个划分 P'', 使得

$$U(f,P')-L(f,P')<\varepsilon/2,$$

$$U(f,P'')-L(f,P'')<\varepsilon/2.$$

若 P 为包含 P' 和P'' 的一切点的$[a,b]$的划分, 则

$$L(f,P)=L(f,P')+L(f,P''),$$

$$U(f,P)=U(f,P')+U(f,P'');$$

因此,

$$U(f,P)-L(f,P)=[U(f,P')-L(f,P')]$$

$$+[U(f,P'')-L(f,P'')]<\varepsilon. ▮$$

定理 4 是一些较次要的习惯记法的基础. 积分$\int_a^b f$ 只对 $a<b$ 有定义. 我们现在补充定义

$$\int_a^a f=0 \text{ 以及 当 } a>b \text{ 时} \int_a^b f=-\int_b^a f.$$

应用这些定义可证, 等式$\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f$ 对于所有的 a, c, b 都成立, 即使 $a<c<b$ 不成立(这个论断的证明, 是相当冗长的对各种情形进行逐一的检查).

定理 5 若 f 和 g 在$[a, b]$上可积, 则 $f+g$ 在$[a, b]$上可积, 并且

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

证明 设 $P=\{t_0, \cdots, t_n\}$为$[a,b]$的任意划分. 设

$$m_i=\inf\{(f+g)(x): t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\},$$

$$m_i'=\inf\{f(x): t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\},$$

$$m_i''=\inf\{g(x): t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\},$$

并且类似地定义 M_i, M'_i, M''_i. 虽然不一定有

$$m_i = m'_i + m''_i,$$

但下式却能成立(第 7 题)

$$m_i \geqslant m'_i + m''_i.$$

同样地，$$M_i \leqslant M'_i + M''_i.$$

因此，$$L(f,P)+L(g,P) \leqslant L(f+g,P)$$

和 $$U(f+g,P) \leqslant U(f,P)+U(g,P).$$

于是，

$$L(f,P)+L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \leqslant U(f+g,P) \leqslant U(f,P)+U(g,P).$$

因为 f 和 g 都是可积的，故有划分 P', P'' 使得

$$U(f,P')-L(f,P')<\varepsilon/2,$$
$$U(g,P'')-L(g,P'')<\varepsilon/2.$$

若 P 包含 P' 和 P''，则

$$U(f,P)+U(g,P)-[L(f,P)+L(g,P)]<\varepsilon,$$

从而 $$U(f+g,P)-L(f+g,P)<\varepsilon.$$

这证明 $f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积. 另外，

(1) $$L(f,P)+L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \leqslant \int_a^b (f+g) \leqslant U(f+g,P) \leqslant U(f,P)+U(g,P);$$

并且

(2) $$L(f,P)+L(g,P) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g \leqslant U(f,P)+U(g,P).$$

因为 $U(f,P)-L(f,P)$ 和 $U(g,P)-L(g,P)$ 都可以要多小就多小，所以

$$U(f,P)+U(g,P)-[L(f,P)+L(g,P)]$$

也可以要多小就多小；于是由(1)和(2)得

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

定理 6 若 f 在$[a, b]$上可积，则对于任何数 c，函数 cf 在$[a, b]$上可积，并且

$$\int_a^b cf=c\cdot\int_a^b f.$$

证明 证明(比定理 5 的证明容易得多)留给你们做．最好将 $c\geqslant 0$ 和 $c\leqslant 0$ 这两种情形分开处理．为什么?

(定理 6 只是以下更一般定理的一个特殊情形，即若 f 和 g 可积，则 $f\cdot g$ 在$[a, b]$上可积．但这个定理很难证明(见第 32 题)．)

在本章中，我们只得到了一个复杂的定义，一些内容简单但证明复杂的定理，以及一个根本没有证明的定理．这不是由于积分提出一个比导数更难的课题，而是由于前几章中所陈述的有力的工具暂时无法起作用．微积分的最有意义的发现是这样的事实：即积分与导数有密切的联系——一旦我们掌握这个联系，积分将和导数同样有用，并且也同样容易用．导数与积分之间的联系值得单独写一章，但我们在本章所要作的准备工作，可以作为一个提示．我们先叙述一个简单的关于积分的不等式，有许多重要定理要用到它．

定理 7 假设 f 在$[a, b]$上可积，并且对于$[a, b]$内所有的 x 有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f\leqslant M(b-a).$$

证明 显然，对于任意划分 P，有

$$m(b-a)\leqslant L(f, P) \text{ 和 } U(f, P)\leqslant M(b-a).$$

因

$$\int_a^b f=\sup\{L(f, P)\}=\inf\{U(f, P)\},$$

由此立即得到所要求的不等式．

现在假设 f 在$[a, b]$上可积. 我们可以在$[a, b]$上定义一个新的函数 F:

$$F(x)=\int_a^x f=\int_a^x f(t)dt.$$

(这是根据定理 4.)我们已经知道,f 即使不连续也可能是可积的,在习题中给出一些"病态"的可积函数的例子. 因而 F 的性态是非常意外地令人满意.

定理 8 若 f 在$[a, b]$上可积,而 F 在$[a, b]$上定义为

$$F(x)=\int_a^x f,$$

则 F 在$[a, b]$上连续.

证明 假设 c 在$[a, b]$内.因 f 在$[a, b]$上可积, 故由定义知,它在$[a, b]$上是有界的; 设 M 为这样的数: 对于$[a, b]$内所有的 x 有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

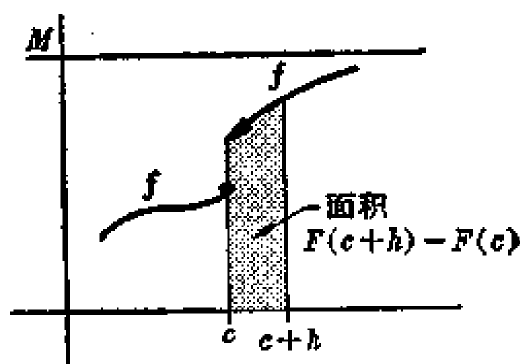


图 13

若 $h>0$,则(图 13)

$$F(c+h)-F(c)=\int_a^{c+h} f-\int_a^c f=\int_c^{c+h} f.$$

因为对于所有的 x 有

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M,$$

于是由定理 7 得

$$-M\cdot h\leqslant\int_c^{c+h} f\leqslant M\cdot h;$$

换言之,

$$(1)\qquad -M\cdot h\leqslant F(c+h)-F(c)\leqslant M\cdot h.$$

若 $h<0$,可以导出一个类似的不等式. 注意

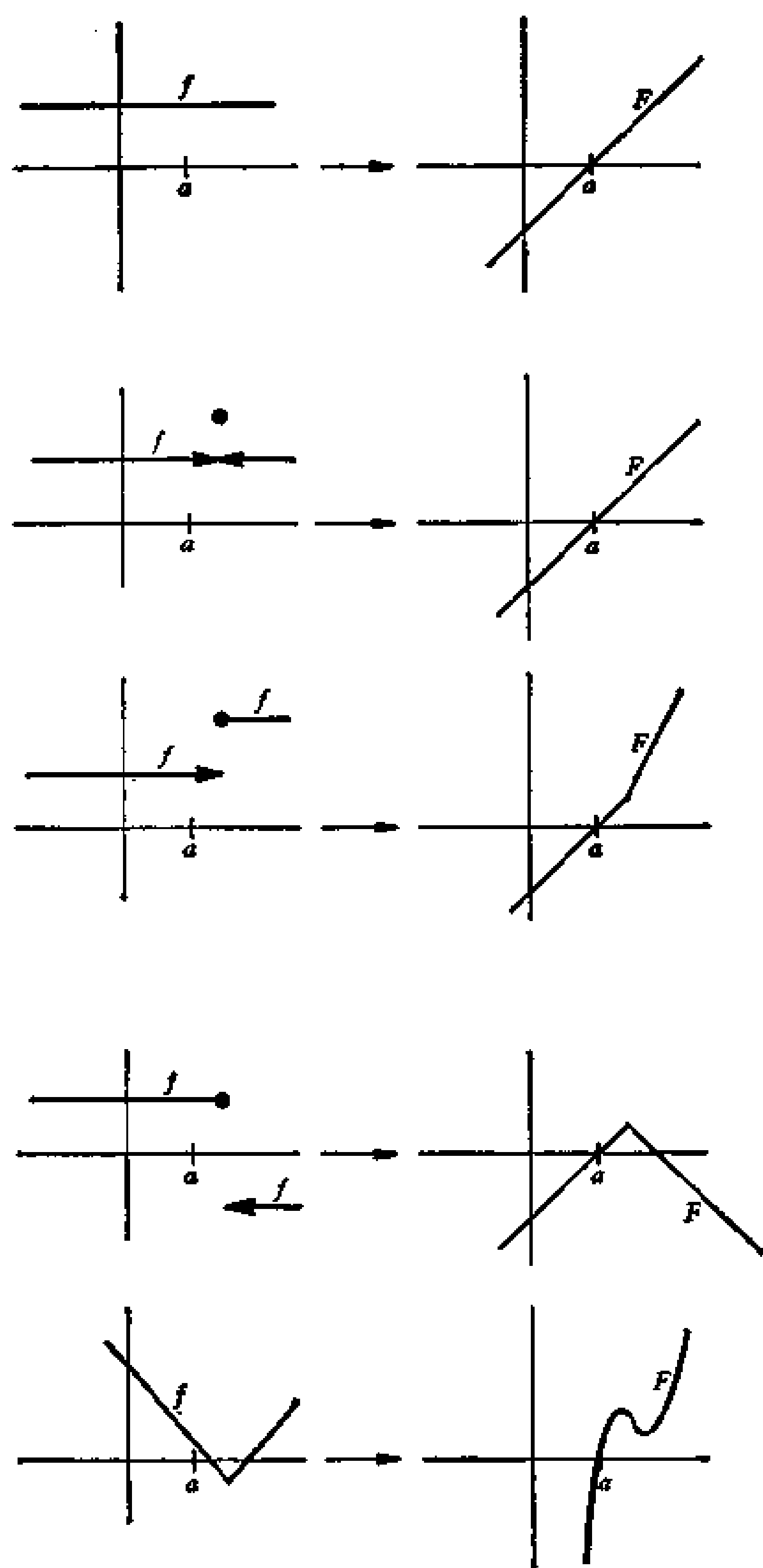


图 14

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f=-\int_{c+h}^{c} f.$$

将定理 7 应用于长为 $-h$ 的区间$[c+h, c]$，我们得

$$Mh\leqslant\int_{c+h}^{c} f\leqslant -Mh;$$

乘以 -1 后，不等式全部反过来，我们有

$$(2)\qquad Mh\leqslant F(c+h)-F(c)\leqslant -Mh.$$

不等式(1)和(2)可以合并：

$$|F(c+h)-F(c)|\leqslant M\cdot|h|.$$

因此，若 $\varepsilon>0$，并假设$|h|<\varepsilon/M$，我们有

$$|F(c+h)-F(c)|<\varepsilon.$$

这证明

$$\lim_{h\to 0}F(c+h)=F(c);$$

换言之，F 在 c 处连续. ▌

图 14 比较了 f 和对于各个函数 f 的 $F(x)=\int_a^x f$；F 的性态总显得比 f 好. 在下一章中，我们将会看到这是多么正确.

习　题

1. 通过考虑分成 n 个相等子区间的划分，并应用习题二, 5 中得到的关于 $\sum_{i=1}^{n} i^3$ 的公式，证明 $\int_0^b x^3dx=b^4/4$. 本题可以直接模仿正文中的演算，但你须将它写成所有细致的要点都很清楚的正式证明.

2. 同样地，证明 $\int_0^b x^4dx=b^5/5$.

*3. (a) 应用习题二, 6 证明：当 n 取得足够大时，可使 $\sum_{k=1}^{n} k^p/n^{p+1}$ 要多接近就能多接近于 $1/(p+1)$.

(b) 证明 $\int_0^b x^p dx=b^{p+1}/(p+1)$.

4. 判定下列函数中的哪些函数在[0, 2]上是可积的，并计算积分. 如果你

会的话.

(i) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(iii) $f(x)=x+[x]$.

(iv) $f(x)=\begin{cases}x+[x], & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

(v) $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 具有 }a+b\sqrt{2}\text{ 形式, 其中 }a\text{ 和 }b\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 不具有这种形式}.\end{cases}$

(vi) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\text{ 或 }x>1.\end{cases}$

(vii) f 是如图 15 所示的函数.

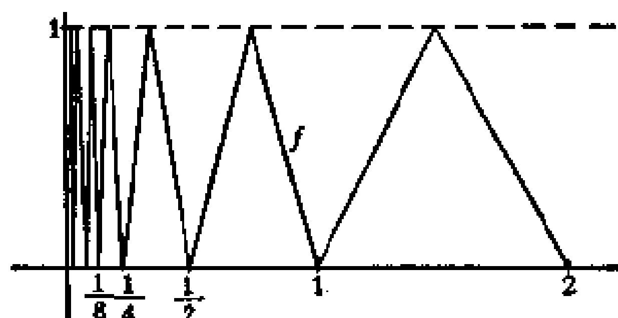


图 15

5. 求下列各图形所围成的区域的面积:

(i) $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+2$ 的图形.

(ii) $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=-x^2$ 的图形, 以及通过 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 的两条直立线.

(iii) $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=1-x^2$ 的图形.

(iv) $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=1-x^2$ 以及 $h(x)=2$ 的图形.

(v) $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^2-2x+4$ 的图形, 以及直立轴.

(vi) $f(x)=\sqrt{x}$ 的图形, 水平轴, 以及通过 $(2,0)$ 的直立线.

(不要试图去求 $\int_0^2\sqrt{x}\,dx$; 你要找出一种推测其答案的途径, 它只

用你已经知道怎样求值的积分．由本例暗示的问题，将在第 16 题中讨论.）

6. 求：用$\int_a^b f$和$\int_c^d g$表示的

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)dy\right)dx.$$

（本题是彻底的记号练习；关键在于当常数出现时你能认得出来.）

7. 应用定理 5 的记号，证明

$$m_i'+m_i''=\inf\{f(x_1)+g(x_2):t_{i-1}\leqslant x_1,x_2\leqslant t_i\}\leqslant m_i.$$

8. (a) 哪些函数有任意下和等于任意上和这个性质？
   (b) 哪些函数有某个上和等于某个另外下和这个性质？
   (c) 哪些连续函数有所有下和都相等这个性质？
   *(d) 哪些可积函数有所有下和都相等这个性质？（记住，一个这样的函数是：当 x 为无理数时 $f(x)=0$，当 $x=p/q$ 为既约分数时 $f(x)=1/q$.）提示：你要用到习题八，6 中所提出的稠密集的概念，还要用到第 21 题的结果.

9. 若 $a<b<c<d$ 并且 f 在$[a,d]$上可积，证明 f 在$[b,c]$上可积.（不要硬做.）

10. (a) 证明：若 f 在$[a,b]$上可积，并且对于$[a,b]$内所有的 x 有 $f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f\geqslant 0$.
    (b) 证明：若 f 和 g 在$[a,b]$上可积，并且对于$[a,b]$内所有的 x 有 $f(x)\geqslant g(x)$，则$\int_a^b f\geqslant\int_a^b g$.（现已不用告诫：如果你花很大气力做(b)，那你只是白费时间.）

11. 证明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

（几何解释使它似乎可信.）提示：$[a,b]$的每一划分 $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ 产生$[a+c,b+c]$的一个划分 $P'=\{t_0+c,\cdots,t_n+c\}$，反之亦然.

*12. 证明

$$\int_1^a\frac{1}{t}dt+\int_1^b\frac{1}{t}dt=\int_1^{ab}\frac{1}{t}dt.$$

提示：上式可以写成$\int_1^a 1/t\,dt=\int_b^{ab}1/t\,dt$．$[1,a]$的每一划分 $P=\{t_0,$

$\cdots, t_n\}$产生$[b, ab]$的一个划分 $P'=\{bt_0, \cdots, bt_n\}$, 反之亦然.

*13. 证明

$$\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt.$$

(注意, 第 12 题是一特殊情形.)

14. 假设 f 在$[a, b]$上有界, 并且除了在(a, b)内的 x_0 之外, f 在$[a, b]$内的其余各点都连续. 证明 f 在 $[a, b]$ 上可积. 提示: 模仿正文中的一个例题.

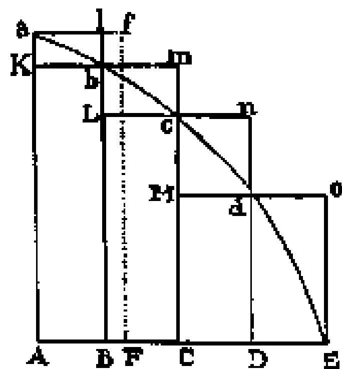
15. 假设 f 在$[a, b]$上非减. 注意, 因为对于$[a, b]$内的 x 有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$, 所以 f 在$[a, b]$上自然有界.

(a) 若 $P=\{t_0, \cdots, t_n\}$是$[a, b]$的划分, 则 $L(f, P)$和 $U(f, P)$ 等于什么?

(b) 假设对于每个 i 有 $t_i-t_{i-1}=\delta$. 证明 $U(f, P)-L(f, P)=\delta[f(b)-f(a)]$.

(c) 证明 f 是可积的.

(d) 给出一个在 $[0, 1]$ 上无穷多个点不连续的非减函数的例子. 将本题与下列摘自牛顿的《自然哲学的数学原理》*中的内容相比较, 也许是有趣的.



引理 II

若在以垂直线Aa, AE 和曲线 acE 为界的任意图形 AacE 内, 有任意数目之内接平行四边形 Ab, Bc, Cd 等, 这些平行四边形包含相等的底 AB, BC, CD 等以及平行于图形的一边Aa的边Bb, Cc, Dd 等; 再补上平行四边形 aKbl, bLcm, cMdn 等. 则设那些平行四边形的宽度缩小、它们的数目无限增大, 我认为内接形 AKbLcMdD, 外接形 AalbmcndoE, 与曲线形 AabcdE 相互间所具有的最终的比乃是等量之比.

因内接形与外接形相差的部分, 等于平行四边形 Kl, Lm, Mn, Do 之和, 即(由于它们的底全部相等)以它们的一个底Kb和它们高度的和

---

* 牛顿的《自然哲学的数学原理》的修订本, 由弗洛林 · 卡佐利修订, 莫特翻译, 加利福尼亚, 伯克利, 加利福尼亚大学出版社, 1946.

Aa 为边的矩形，亦即矩形 ABla. 但因其宽度 AB 被设为无限缩小，故此矩形可变得小于任意给定的空间. 于是(根据引理1)内接形与外接形最终互相相等；这个中间的曲线形，更将最终等于它们中的任何一个. 证毕.

*16. 假设 f 是递增的. 图 16 提示:

$$\int_a^b f^{-1}=bf^{-1}(b)-af^{-1}(a)-\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f.$$

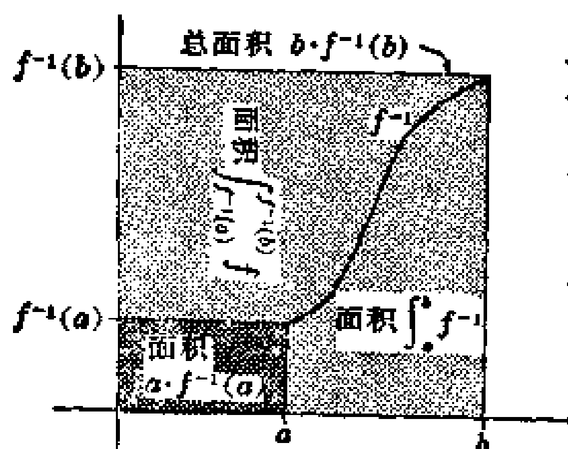


图 16

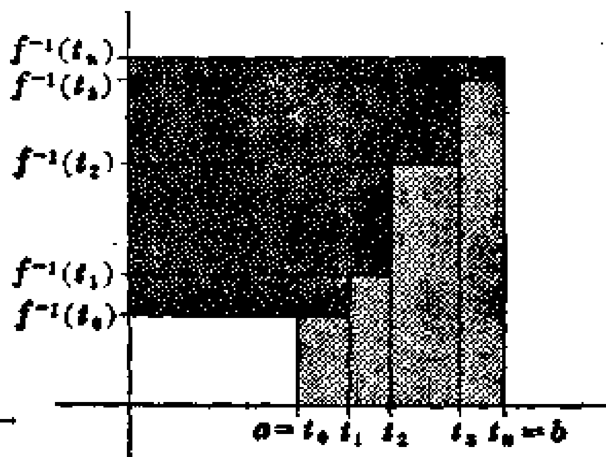


图 17

(a) 若 $P=\{t_0, \cdots, t_n\}$ 是$[a, b]$的划分，设 $P'=\{f^{-1}(t_0), \cdots, f^{-1}(t_n)\}$. 证明，如图 17 所示，

$$L(f^{-1}, P)+U(f, P')=bf^{-1}(b)-af^{-1}(a).$$

(b) 现在证明前面的公式.

(c) 对于 $0\leqslant a<b$ 求 $\int_a^b \sqrt[3]{x}\,dx$.

17. 若定义在$[a, b]$上的函数s，有$[a, b]$的一个划分$P=\{t_0, \cdots, t_n\}$，使 s 在每个(t_{i-1}, t_i)上是常数（s 在 t_i 的值可以是任意的），则此函数称为**阶梯函数**.

(a) 证明：若 f 在$[a, b]$上可积，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在着一阶梯函数 $s_1\leqslant f$ 使得 $\int_a^b f-\int_a^b s_1<\varepsilon$，以及一阶梯函数 $s_2\geqslant f$ 使得

$$\int_a^b s_2-\int_a^b f<\varepsilon.$$

(b) 假设对于所有 $\varepsilon>0$，存在着阶梯函数 $s_1\leqslant f$ 和 $s_2\geqslant f$，使得

$$\int_a^b s_2-\int_a^b s_1<\varepsilon.$$

证明 f 是可积的.

(c) 求一个这样的函数 f: 它不是阶梯函数, 但对于 $[a, b]$ 的某一划分, 它满足 $\int_a^b f = L(f, P)$.

*18. 证明: 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在着一个连续函数 $g \leqslant f$, 使得 $\int_a^b f - \int_a^b g < \varepsilon$. 提示: 先作一个具有这个性质的阶梯函数, 然后再找连续的. 绘一个图将会大有帮助.

19. (a) 证明: 若 s_1 和 s_2 是在 $[a, b]$ 上的阶梯函数, 那么 s_1+s_2 也是.

(b) 不用定理 5, 证明 $\int_a^b (s_1+s_2) = \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2$.

(c) 应用(b)(和第 17 题), 给出一个定理 5 的另一个证法.

20. 假设 f 在 $[a, b]$ 上可积. 证明: 在 $[a, b]$ 内存在着一个数 x 使得 $\int_a^x f = \int_x^b f$. 举例说明, 欲取 x 在 (a, b) 内, 不是总可能的.

*21. 本题目的是要证明: 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 必在 $[a, b]$ 内的许多点连续.

(a) 设 $P=\{t_0, \cdots, t_n\}$ 是 $[0, 1]$ 的一个划分, 使得 $U(f, P) - L(f, P) < b-a$. 证明: 对于某个 i, 我们有 $M_i - m_i < 1$.

(b) 证明: 存在着两数 a_1 和 b_1, 满足 $a<a_1<b_1<b$ 和 $\sup\{f(x): a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x): a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} < 1$. (你可由 (a) 取 $[a_1, b_1] = [t_{i-1}, t_i]$, 只是 $i=1$ 和 n 除外; 在这两种情形中, 很简单的办法就能解决问题.)

(c) 证明: 存在着两数 a_2 和 b_2, 满足 $a_1<a_2<b_2<b_1$ 和 $\sup\{f(x): a_2 \leqslant x \leqslant b_2\} - \inf\{f(x): a_2 \leqslant x \leqslant b_2\} < \frac{1}{2}$.

(d) 继续用这个方法求出一区间序列 $I_n = [a_n, b_n]$, 使得 $\sup\{f(x): x$ 在 I_n 内$\} - \inf\{f(x): x$ 在 I_n 内$\} < 1/n$. 应用区间套定理 (习题八, 14), 求出一点 x, 使 f 在该点连续.

(e) 证明: f 在 $[a, b]$ 内的无穷多个点连续.

*22. 回忆第 10 题, 对于 $[a, b]$ 内所有的 x, 当 $f(x) \geqslant 0$ 时 $\int_a^b f \geqslant 0$.

(a) 举出一例: 对于所有的 x 有 $f(x) \geqslant 0$, 对于 $[a, b]$ 内的某个 x 有 $f(x)>0$, 而且 $\int_a^b f = 0$.

(b) 假设对于$[a,b]$内所有的x有$f(x)\geqslant 0$，f在$[a,b]$内的点x_0连续，以及$f(x_0)>0$. 证明$\int_a^b f>0$. 提示：只要证明一个下和$L(f,P)$是正的即可.

(c) 假设f在$[a,b]$上可积，以及对于$[a,b]$内所有的x有$f(x)>0$. 证明$\int_a^b f>0$. 提示：你要用到第21题；的确，那是编入第21题的一个理由.

*23. (a) 假设f在$[a,b]$上连续，以及对于$[a,b]$上所有的连续函数g有$\int_a^b fg=0$. 证明$f=0$. (本题容易做；有一个明显的g可供选择.)

(b) 假设f在$[a,b]$上连续，以及对于那些在$[a,b]$上满足附加条件$g(a)=g(b)=0$的连续函数g有$\int_a^b fg=0$. 证明$f=0$. (这个看来单纯的事实，是变分法中一条重要的引理；见"建议读物".)
提示：由假设$f(x_0)>0$或$f(x_0)<0$，引出一个矛盾；你所选取的g依赖于f在x_0附近的性态.

24. 设当x为有理数时$f(x)=x$，而当x为无理数时$f(x)=0$.

(a) 对于$[0,1]$内的所有划分P，计算$L(f,P)$.

(b) 求$\inf\{U(f,P):P$是$[0,1]$的划分$\}$.

*25. 设当x为无理数时$f(x)=0$，而当$x=p/q$为既约分数时$f(x)=1/q$. 证明f在$[0,1]$上可积以及$\int_0^1 f=0$. (每一下和显然为0；你必须弄清楚怎样使上和变小.)

*26. 求两个函数f和g，使它们各自可积但其复合$g\circ f$不可积. 提示：与第25题有关.

27. (a) 证明：若对于$[a,b]$内所有的x有$m\leqslant f(x)\leqslant M$，则对于满足$m\leqslant\mu\leqslant M$的某个数$\mu$有

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\mu.$$

(b) 证明：若f在$[a,b]$上连续，则对于$[a,b]$内的某个ξ有

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi);$$

并举例说明连续性是必不可少的. 这个事实称为积分的(第一)中值定理.

28. (a) 假设 f 在$[a,b]$上连续，而 g 在$[a,b]$上可积并且是非负的. 证明：对于$[a,b]$内的某个 ξ 有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

这个结果称为积分第二(或广义)中值定理. 提示：因为 g 是非负的，所以不等式 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 意味着

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

(b) 说明对于 g 的假设是必不可少的. (用$[-1, 1]$上的 $g(x)=x$ 试一下.)

积分的第一和第二中值定理将在第十九章中用到(有点不很必要). 下一题是我从一些老的微积分课本中抄来的，称为积分的第三中值定理. 说实在的，我一点也不觉得它好在哪里.

*29. (a) 假设 g 在$[a,b]$上是递增的，f 在$[a,b]$上可积. 证明：在$[a,b]$内存在着某一数 ξ，使得

$$\int_a^b f(t)g(t)dt=g(a)\int_a^{\xi} f(t)dt+g(b)\int_{\xi}^b f(t)dt.$$

提示：当 $\xi=a$ 和 $\xi=b$ 时，右边的值各等于多少?

(b) 证明：关于 g 的假设是必不可少的. (用 $g(a)=g(b)=0$ 试一下.)

*30. 假设 f 是在$[a,b]$上的有界函数，并设 P 为$[a, b]$的划分. 设 M_i 和 m_i 的意义和平常一样，并设 M_i' 和 m_i' 对于函数 $|f|$ 有相应的意义.

(a) 证明

$$M_i'=\max(|M_i|, |m_i|),$$
$$m_i'=\min(|M_i|, |m_i|).$$

(b) 证明 $M_i'-m_i'\leqslant M_i-m_i$. 提示：你应分别两种情形来考虑，因为 max 和 min 就是这样定义的.

(c) 证明：若 f 在$[a,b]$上可积，则 $|f|$ 也可积.

(d) 证明：若 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积，则 $\max(f, g)$ 和 $\min(f,g)$ 也可积.

(e) 证明：当且仅当 f 的"正部分" $\max(f, 0)$和它的"负部分" $\min(f, 0)$在$[a,b]$上可积时，f 在$[a,b]$上可积.

31. 证明：若 f 在$[a,b]$上可积，则

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

提示：这容易由一系列不等式得到；习题一，14 与本题有关.

*32. 假设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积，以及对于 $[a, b]$ 内所有的 x 有 $f(x) \geqslant 0$. 设 P 为 $[a, b]$ 的划分. 设 M_i' 和 m_i' 表示 f 的相应的 sup 和 inf，对于 g，同样定义 M_i'' 和 m_i''，以及对于 fg，同样定义 M_i 和 m_i.

(a) 证明 $M_i \leqslant M_i' M_i''$ 和 $m_i \geqslant m_i' m_i''$.

(b) 证明

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} [M_i' M_i'' - m_i' m_i''](t_i - t_{i-1}).$$

(c) 应用 f 和 g 是有界的，从而对于 $[a, b]$ 内的 x 有 $|f(x)|, |g(x)| \leqslant M$ 这个事实，证明

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leqslant M\left\{\sum_{i=1}^{n} [M_i' - m_i'](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} [M_i'' - m_i''](t_i - t_{i-1})\right\}.$$

(d) 证明 fg 是可积的.

(e) 现在取消对于 $[a, b]$ 内的 x 有 $f(x) \geqslant 0$ 这个限制.

33. 假设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积. 柯西-许瓦尔兹不等式指出

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

(a) 模仿习题一，18 中许瓦尔兹不等式的一种证法，证明柯西-许瓦尔兹不等式.

(b) 如果等式成立，则是否必有 $f = \lambda g$ 对于某个 λ 成立？如果 f 和 g 连续，又会怎样？

(c) 证明许瓦尔兹不等式是柯西-许瓦尔兹不等式的一种特殊情形.

(d) 证明 $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right)$. 若将 0 和 1 换成 a 和 b，则此结果能否成立？

*34. 假设 f 是连续的，以及 $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. 证明

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a.$$

提示：$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ 这个条件能推出，对于 $t \geqslant$ 某个 N，$f(t)$ 接近 a. 这

意味着$\int_N^{N+M} f(t)dt$ 接近 Ma. 如果同N比起来M很大，则$Ma/(N+M)$接近 a.

选题解答

1. 设 $P_n=\{t_0, \cdots, t_n\}$是满足 $t_i=ib/n$ 的划分，则

$$
\begin{aligned}
L(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n}(t_{i-1})^3\cdot(t_i-t_{i-1})\\
&=\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3\cdot\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{b}{n}\\
&=\frac{b^4}{n^4}\sum_{j=0}^{n-1}j^3\\
&=\frac{b^4}{n^4}\left[\frac{(n-1)^4}{4}+\frac{(n-1)^3}{2}+\frac{(n-1)^2}{4}\right].
\end{aligned}
$$

并且，类似地有

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n) &= \frac{b^4}{n^4}\sum_{j=1}^{n}j^3\\
&=\frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}\right].
\end{aligned}
$$

显然，取 n 足够大，能使 $L(f, P_n)$ 和 $U(f, P_n)$ 要多接近就多接近于 $b^4/4$. 于是取 n 足够大，能使 $U(f,P_n)-L(f, P_n)$要多小就多小. 这说明 f 是可积的. 另外，对于所有的 n 只有一个数 a 满足 $L(f, P_n)\leqslant a\leqslant U(f,P_n)$；因$\int_0^b x^3dx$ 有这个性质，所以一旦我们证明了对于所有的 n 有 $L(f,P_n)\leqslant b^4/4\leqslant U(f,P_n)$，也就证明了 $\int_0^b x^3dx=b^4/4$. 这可以直接计算出来，但它实际上是由当 n 取得足够大时 $L(f, P_n)$和 $U(f, P_n)$要多接近就多接近于 $b^4/4$ 这个事实得出的. 事实上，假如 $b^4/4<\int_0^b x^3dx$ 成立，那么当 n 取得足够大时也就不可能使 $U(f, P_n)$ 要多接近就多接近于 $b^4/4$，因为每一个 $U(f,P_n)\geqslant\int_0^b x^3dx$. 同样地，我们不可能有 $b^4/4>$

$\int_0^b x^3 dx.$

2. 我们有

$$L(f,P_n)=\frac{b^5}{n^5}\left[\frac{(n-1)^5}{5}+\frac{(n-1)^4}{2}+\frac{(n-1)^3}{3}-\frac{(n-1)}{30}\right],$$

$$U(f,P_n)=\frac{b^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right].$$

显然，将 n 取得足够大，能使 $L(f,P_n)$ 和 $U(f,P_n)$ 要多接近就多接近于 $b^5/5$. 和第 1 题一样，这意味着 $\int_0^b x^4 dx=b^5/5$.

4. (i) $\int_0^2 f=0.$

(iii) $\int_0^2 f=3.$

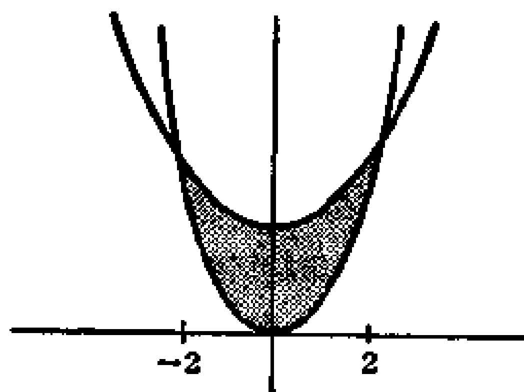
(v) f 不可积.

(vii) $\int_0^2 f=1.$

（关于 (i), (iii) 和 (vii) 中各函数可积的严格证明，见第 15 题. 这些积分的值由几何图形显然可以看出，也可用第 15 题证明的思路以及已知的积分严格求出.）

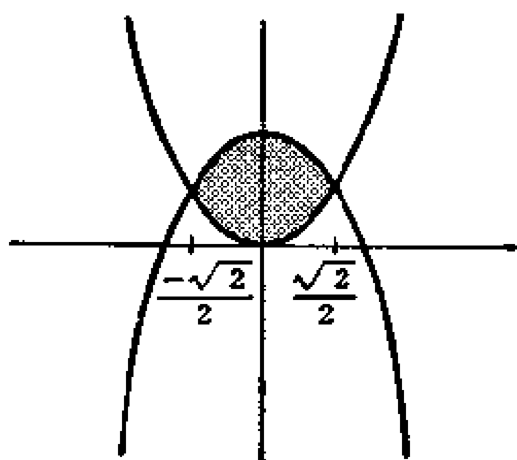
5. (i)

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\right)-x^2\right]dx=\frac{16}{3}.$$



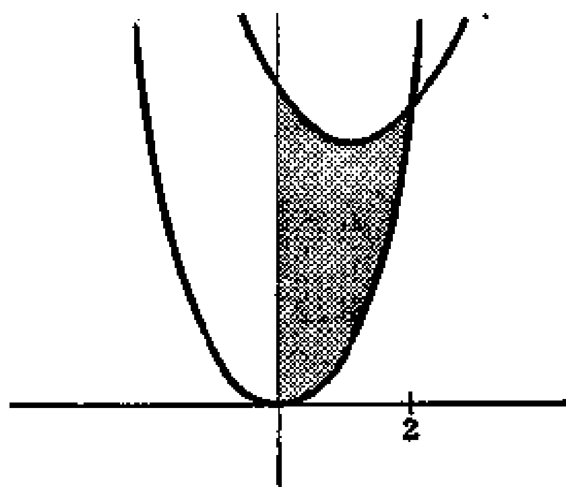
(iii)

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\left[(1-x^2)-x^2\right]dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



(v)

$$\int_0^2 [(x^2-2x+4)-x^2]dx=4.$$



6.

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)dy\right)dx$$
$$=\int_a^b\left(f(x)\int_c^d g(y)dy\right)dx \text{ (这里 } f(x) \text{ 是常数)}$$
$$=\int_c^d g(y)dy\cdot\int_a^b f(x)dx \text{ (这里} \int_c^d g(y)dy \text{ 是常数).}$$

10. (a) 显然，对于任意划分 P 有 $L(f,P)\geqslant 0$.

(b) 将(a)应用于 $f-g$，并应用下列事实

$$\int_a^b (f-g)=\int_a^b f-\int_a^b g.$$

24. (a) 0.

(b) $\frac{1}{2}$.

27. (a) 显然, 对于$[a, b]$的所有划分P有

$$m(b-a)\leqslant L(f, P)\leqslant U(f, P)\leqslant M(b-a).$$

由此得

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

于是

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

满足 $m\leqslant\mu\leqslant M$.

(b) 设m和M为f在$[a, b]$上的最小值和最大值. 因f是连续的, 所以它取得m和M两值, 从而取得(a)的数μ.

31. 因 $$-|f|\leqslant f\leqslant|f|,$$

我们有 $$-\int_a^b|f|\leqslant\int_a^b f\leqslant\int_a^b|f|,$$

于是 $$\left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f|.$$

(第 30 题意味着$\int_a^b|f|$有意义.)

第十四章　微积分基本定理

由前一章的提示，你也许已经猜到本章的头一个定理．我们知道，若 f 可积，则 $F(x)=\int_a^x f$ 连续；自然，我们要问当原来的函数 f 连续时会出现什么情况．结果是 F 是可微的（且其导数特别简单）．

定理1（微积分第一基本定理）　设 f 在 $[a,b]$ 上可积，并将 F 在 $[a,b]$ 上定义为

$$F(x)=\int_a^x f.$$

若 f 在 $[a,b]$ 内的 c 处连续，则 F 在 c 处可微，并且

$$F'(c)=f(c).$$

（若 $c=a$ 或 b，则 $F'(c)$ 当然理解为 F 的右导数或左导数．）

证明　我们假设 c 在 (a,b) 内；$c=a$ 或 b 时证明的简单修改，可由读者来补充．根据定义，

$$F'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}.$$

先假设 $h>0$，则

$$F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f.$$

定义 m_h 和 M_h 如下（图1）：

$$m_h=\inf\{f(x): c\leqslant x\leqslant c+h\},$$
$$M_h=\sup\{f(x): c\leqslant x\leqslant c+h\}.$$

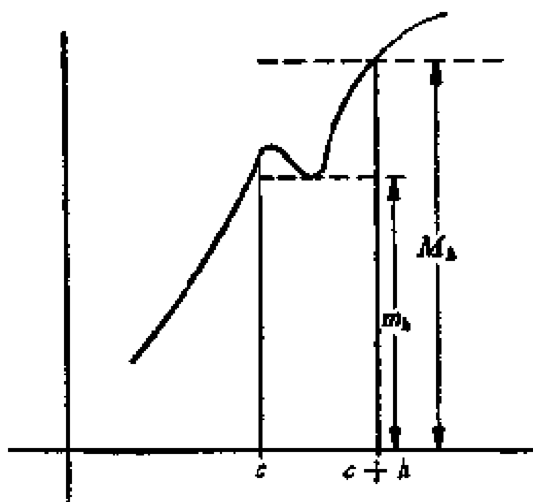


图 1

由第十三章定理7知

$$m_h\cdot h\leqslant\int_c^{c+h} f\leqslant M_h\cdot h.$$

因此 $$m_h \leqslant \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leqslant M_h.$$

如果 $h \leqslant 0$，论证中只有一些细节需要改变．设

$$m_h = \inf\{f(x): c+h \leqslant x \leqslant c\},$$

$$M_h = \sup\{f(x): c+h \leqslant x \leqslant c\}.$$

则 $$m_h \cdot (-h) \leqslant \int_{c+h}^{c} f \leqslant M_h \cdot (-h).$$

由于 $$F(c+h)-F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f,$$

由此得 $$m_h \cdot h \geqslant F(c+h)-F(c) \geqslant M_h \cdot h.$$

因为 $h<0$，因此除以 h 后，不等式再次反向，得到与先前相同的结果：

$$m_h \leqslant \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leqslant M_h.$$

这个不等式对于任何可积函数都成立，不论该函数连续与否．然而，因为 f 在 c 处连续，故

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c),$$

这就证明了

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = F(c). \blacksquare$$

虽然定理 1 只讨论由积分上限变化所得到的函数，一个简单的技巧能说明当下限变化时将会出现什么情况．设 G 定义如下

$$G(x) = \int_{x}^{b} f,$$

则 $$G(x) = \int_{a}^{b} f - \int_{a}^{x} f.$$

因此，若 f 在 c 处连续，则

$$G'(c) = -f(c).$$

这里出现负号是很好的，这使我们能将定理 1 推广到甚至是对于

$x<a$ 定义的函数

$$F(x)=\int_a^x f.$$

在此情形中，我们可以写

$$F(x)=-\int_x^a f,$$

故若 $c<a$，我们有

$$F'(c)=-(-f(c))=f(c),$$

与先前完全一样.

注意，无论在哪一种情形中，F 在 c 处的可微性只由 f 在 c 处的连续性来保证. 然而，当 f 在$[a, b]$内所有的点连续时，定理 1 最有趣. 在此情形中，F 在$[a, b]$内所有的点可微，并且

$$F'=f.$$

一般地说，很难断定一个已知函数 f 是否为某个另外函数的导数；由于这个缘故，第十一章定理 7 和达布定理(习题十一，39)特别有意思，因为它们揭露了 f 所必有的某些性质. 然而，若 f 连续，这完全是不成问题的——根据定理 1，f 是某个函数，即函数

$$F(x)=\int_a^x f$$

的导数.

定理 1 有一简单的推论，它往往能将积分的计算归结成显然的事.

推论 若 f 在$[a, b]$上连续，且对于某个函数 g 有 $f=g'$，则

$$\int_a^b f=g(b)-g(a).$$

证明 设

$$F(x)=\int_a^x f.$$

则在$[a, b]$上 $F'=f=g'$. 因此，存在着一数 c，使得

$$F=g+c.$$

数 c 容易求出：注意

$$0=F(a)=g(a)+c,$$

因此 $c=-g(a)$；于是

$$F(x)=g(x)-g(a).$$

特别对于 $x=b$，上式也能成立．于是

$$\int_a^b f=F(b)=g(b)-g(a).$$

乍看这个推论的证明，使人感到这个推论似乎无用：例如，若

$$g(x)=\int_a^x f,$$

那么知道

$$\int_a^b f=g(b)-g(a)$$

究竟有什么好处？当然，问题在于我们可能碰巧知道一个具有这种性质的很不一样的函数 g．例如，若

$$g(x)=\frac{x^3}{3} \text{ 和 } f(x)=x^2,$$

则 $g'(x)=f(x)$，于是无需计算下和与上和我们就能得到：

$$\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$

我们可以同样地处理其他的幂函数；若 n 为一自然数而

$$g(x)=x^{n+1}/(n+1),$$

则 $g'(x)=x^n$，于是

$$\int_a^b x^n\,dx=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

对于任何自然数 n，在任何包含 0 的区间上，函数 $f(x)=x^{-n}$ 虽然无界，但若 a 和 b 同时为正或同时为负，则

$$\int_a^b x^{-n}\,dx=\frac{b^{-n+1}}{-n+1}-\frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

当然只有当 $n\neq-1$ 时上式才能成立. 我们不知道

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx$$

的简单表达式.

计算这个积分的问题将于以后讨论，但它现在提供一个防止一种严重错误的好机会. 推论 1 的结论往往与积分的定义相混淆——许多学生以为 $\int_a^b f$ 是定义为: "$g(b)-g(a)$，其中 g 为一个其导数是 f 的函数." 这个"定义"不但是错的，并且也是无用的. 一个理由是，一函数 f 可积却未必是另一个函数的导数. 例如，设当 $x\neq1$ 时 $f(x)=0$，而 $f(1)=1$，则 f 虽然可积，但 f 不可能是一导数(为什么不能?). 另外还有一个更重要的理由: 若 f 是连续的，我们知道对于某函数 g 有 $f=g'$; 但我们只是由定理 1 知道这一点. 函数 $f(x)=1/x$ 提供一个很好的说明: 若 $x>0$，则 $f(x)=g'(x)$，其中

$$g(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt,$$

而我们知道没有比这更简单的函数 g 具有这个性质。

定理 1 的推论很有用，通常称为微积分第二基本定理. 在本书中，这个名称用于更强的结果(不过实际上这个结果并不更有用). 正如我们刚才所述，一函数 f 即使它不连续，也可以是 g' 的形式. 若 f 可积，则下式仍然成立

$$\int_a^b f=g(b)-g(a).$$

可是其证明必定完全不同——我们不能用定理 1，因此必须回到积分的定义.

定理 2 (微积分第二基本定理) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，并且对于某个函数 g 有 $f=g'$，则

$$\int_a^b f=g(b)-g(a).$$

证明 设 $P=\{t_0, \cdots, t_n\}$ 为 $[a, b]$ 的任意划分. 根据中值定理,在 $[t_{i-1}, t_i]$ 内存在着一点 x_i 使得

$$g(t_i)-g(t_{i-1})=g'(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$=f(x_i)(t_i-t_{i-1}).$$

设
$$m_i=\inf\{f(x):t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\},$$
$$M_i=\sup\{f(x):t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\},$$

那么,显然有

$$m_i(t_i-t_{i-1})\leqslant f(x_i)(t_i-t_{i-1})\leqslant M_i(t_i-t_{i-1}),$$

即
$$m_i(t_i-t_{i-1})\leqslant g(t_i)-g(t_{i-1})\leqslant M_i(t_i-t_{i-1}).$$

将 $i=1, \cdots, n$ 的各式相加,我们得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})\leqslant g(b)-g(a)\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})$$

于是,对于任意划分 P 有

$$L(f,P)\leqslant g(b)-g(a)\leqslant U(f,P).$$

而这意味着

$$g(b)-g(a)=\int_a^b f.$$

我们曾经用定理 1 的推论(或同样地,定理 2)求一些初等函数的积分:

$$\int_a^b x^n dx=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad n\neq -1.$$

(若 $n<0$,则其中 a 和 b 同时为正或同时为负.)

正如我们在第十三章中所指出的,积分并不总是代表函数、水平轴以及通过 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$ 的直立线所包围的面积. 例如,若 $a<0<b$,则

$$\int_a^b x^3 dx$$

并不代表图 2 所示的区域的面积，而该面积是

$$-\left(\int_a^0 x^3dx\right)+\int_0^b x^3dx=-\left(\frac{0^4}{4}-\frac{a^4}{4}\right)+\left(\frac{b^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)$$

$$=\frac{a^4}{4}+\frac{b^4}{4}.$$

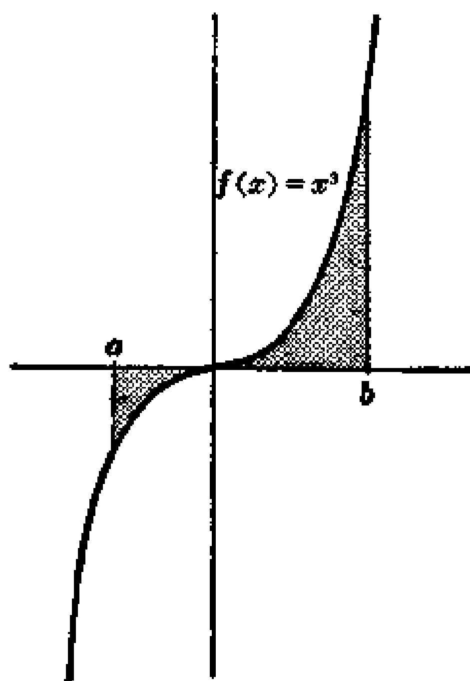


图 2

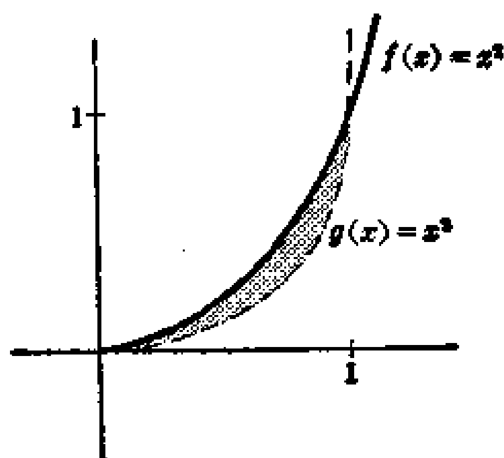


图 3

同样地要留神求多个函数的图形所围成的区域的面积——这个问题经常可以包含颇多技巧．先看一个简单的例子，如图 3 所示，我们要求在区间[0, 1]上函数

$$f(x)=x^2 \quad 和 \quad g(x)=x^3$$

的图形之间的区域的面积．若 $0\leqslant x\leqslant 1$，则 $0\leqslant x^3\leqslant x^2$，因此，$g$ 的图形在 f 的图形的下方．于是我们所关心的区域的面积是

$$面积\ R(f,0,1)-面积\ R(g,0,1),$$

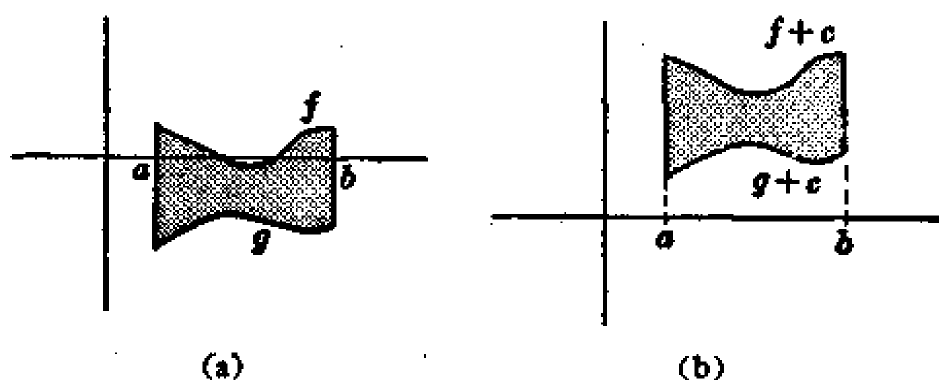
这个面积是

$$\int_0^1 x^2\,dx-\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

这个面积可以表示为

$$\int_a^b (f-g).$$

若对于$[a,b]$内所有的x有$g(x)\leqslant f(x)$，那么，即使f和g有时是负的，这个积分总是等于f和g所围成的面积．由图4最容易看出这一点．若c为这样的数，它使得$f+c$和$g+c$在$[a,b]$上为非负，则由f和g所围成的区域R_1，与$f+c$和$g+c$所围成的区域R_2具有相同的面积．因此，



(a) (b)

图 4

$$\text{面积}\ R_1=\text{面积}\ R_2=\int_a^b (f+c)-\int_a^b (g+c)$$
$$=\int_a^b [(f+c)-(g+c)]$$
$$=\int_a^b (f-g).$$

这种看法在下述问题中有用：求

$$f(x)=x^3-x \text{ 和 } g(x)=x^2$$

的图形所围成的区域的面积．首先必须更精确地确定这个区域．

当
$$x^3-x=x^2,$$
即
$$x^3-x^2-x=0,$$
即
$$x(x^2-x-1)=0,$$
即
$$x=0,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

时，f和g的图形相交．在区间$([1-\sqrt{5}]/2,0)$上我们有

$$x^3-x\geqslant x^2,$$

而在区间$(0,[1+\sqrt{5}]/2)$上我们有 $x^2\geqslant x^3-x$. 这些论断容易由图形(图 5)看出,而且也不难验证如下. 因为只有当

$$x=0,\ [1+\sqrt{5}]/2 \quad 或 \quad [1-\sqrt{5}]/2$$

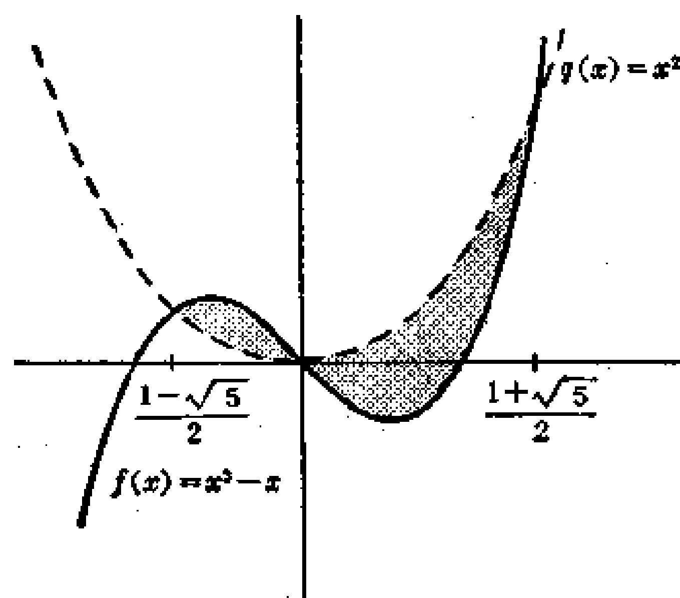


图 5

时 $f(x)=g(x)$, 在区间$([1-\sqrt{5}]/2,0)$和$(0,[1+\sqrt{5}]/2)$上函数 $f-g$ 不变号;因此比方说只要观察

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}>0,$$

$$1^3-1-1^2=-1<0,$$

就能断定

$$在([1-\sqrt{5}]/2,0)上\ f-g>0,$$

$$在(0,[1+\sqrt{5}]/2)上\ f-g<0.$$

于是所指的区域的面积为

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0}(x^3-x-x^2)dx+\int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[x^2-(x^3-x)]dx.$$

如本例所揭示的，求一区域面积的主要问题也许是精确地确定其区域. 然而，存在着更实质的逻辑性问题——迄今为止，我们只定义过某些很特殊区域的面积，这些区域甚至不包括刚才计算过其面积的某些区域；我们只简单地假定过面积对于这些区域有意义，并确实具有“面积”的某些合理的性质. 这些议论并不意味着要你不必重视训练计算面积的技巧，而是说更好地研究面积的定义是有必要的，尽管它应该在高等微积分中去讨论. 在本书中以及在历史上，都是由于要定义面积而想到去定义积分，但积分实际上并不提供定义面积的最好方法，尽管它通常是计算面积的适当工具.

为了定义面积而发明积分，而对于这个目的积分又不恰当，听到这件事，可能会使人泄气，但我们马上会看到，对于别的一些目的，它是何等重要. 积分的最重要的应用已经强调过：若 f 连续，则积分提供一个函数 y，使得

$$y'(x)=f(x).$$

这个方程是“微分方程”(一个函数 y 的方程，其中包含 y 的导数)的最简单的例子. 由微积分基本定理知，若 f 连续，则该微分方程有解. 在以后各章以及在许多问题中，我们要解更复杂的方程，但它们的求解几乎总以某种方式依赖于积分. 为了解微分方程，就要构造一个新的函数，而积分是解决这个问题的最好方法之一.

因为由微积分基本定理提供的可微函数在以后将起很重要的作用，因此，领会下列事实是很重要的：和那些不怎么神秘的函数一样，这些函数经复合后还可以产生更多的函数，其导数可用链式法则求得.

例如，假设

$$f(x)=\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\sin^2 t}dt.$$

尽管这种记法多少有点掩盖事实，但 f 是由下列函数复合成的

$$C(x)=x^3 \text{ 和 } F(x)=\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt.$$

实际上，$f(x)=F(C(x))$；换言之，$f=F\circ C$. 因此，根据链式法则，

$$\begin{aligned}f'(x)&=F'(C(x))\cdot C'(x)\\&=F'(x^3)\cdot 3x^2\\&=\frac{1}{1+\sin^2 x^3}\cdot 3x^2.\end{aligned}$$

若将 f 改定义为

$$f(x)=\int_{x^3}^a \frac{1}{1+\sin^2 t}dt,$$

则
$$f'(x)=-\frac{1}{1+\sin^2 x^3}\cdot 3x^2.$$

若将 f 定义为倒过来的复合，

$$f(x)=\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)^3,$$

则
$$\begin{aligned}f'(x)&=C'(F(x))\cdot F'(x)\\&=3\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)^2\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x}.\end{aligned}$$

同样地，若

$$f(x)=\int_a^{\sin x} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt,$$

$$g(x)=\int_{\sin x}^a \frac{1}{1+\sin^2 t}dt,$$

$$h(x)=\sin\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right),$$

则
$$f'(x)=\frac{1}{1+\sin^2(\sin x)}\cdot\cos x,$$

$$g'(x)=\frac{-1}{1+\sin^2(\sin x)}\cdot\cos x,$$

$$h'(x)=\cos\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x}.$$

显得很可怕的函数

$$f(x)=\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt$$

也是一个复合函数；实际上，$f=F\circ F$. 因此

$$\begin{aligned} f'(x)&=F'(F(x))\cdot F'(x)\\ &=\frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)}\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x}.\end{aligned}$$

如这些例子所示，出现在积分号上方(或下方)的式子，表示当 f 写成复合函数的形式时出现在靠右边的函数. 作为最后的一个例子，考虑三重复合

$$f(x)=\int_a^{\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt,$$

$$g(x)=\int_a^{\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)}\frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right]} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt$$

它们可以写成

$$f=F\circ F\circ C \quad 和 \quad g=F\circ F\circ F.$$

省略中间步骤(如果你仍觉得靠不住，可以补上)，我们得

$$f'(x)=\frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)}\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x^3}\cdot 3x^2,$$

$$\begin{aligned} g'(x)=&\frac{1}{1+\sin^2\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right]}\cdot\\ &\frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)}\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x}.\end{aligned}$$

和第十章求比较简单的微分一样，在做了一些习题之后，这些演算会变得容易得多，并且和第十章的习题一样，在对微积分基本定理的前后关系多少有点不熟悉时，求这些微分只是用来检验你对链式法则的理解程度.

在下列各章中积分的一些有力的应用都是以微积分基本定理为依据，而此定理的证明却很容易——好象所有实质性的工作都包含在积分的定义中. 事实上，这并不完全对. 为了将定理 1 应用于连续函数，我们需要一个尚未证明的定理：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积. 将要给出的证明要依靠一个技巧，这个技巧虽然不很富于启发，但至少可用以填补我们知识的空白.

若 f 为在 $[a,b]$ 上的任意有界函数，那么即使 f 不可积，但

$$\sup\{L(f,P)\} \text{ 和 } \inf\{U(f,P)\}$$

却都存在. 这两个数分别称为 f 在 $[a,b]$ 上的**下积分**和 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**，并用

$$\mathbf{L}\int_a^b f \text{ 和 } \mathbf{U}\int_a^b f$$

表示. 下积分和上积分都有积分所具有的几个性质. 特别若 $a<c<b$，则

$$\mathbf{L}\int_a^b f=\mathbf{L}\int_a^c f+\mathbf{L}\int_c^b f$$

和

$$\mathbf{U}\int_a^b f=\mathbf{U}\int_a^c f+\mathbf{U}\int_c^b f,$$

以及若对于 $[a,b]$ 内所有的 x 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$m(b-a)\leqslant\mathbf{L}\int_a^b f\leqslant\mathbf{U}\int_a^b f\leqslant M(b-a).$$

这些事实的证明留作练习，因为这些证明与积分相应结果的证明很相似. 关于积分的结果实际上是上积分和下积分的结果的一个推论，因为只有当

$$\mathbf{L}\int_a^b f=\mathbf{U}\int_a^b f$$

时 f 才是可积的. 我们将证明, 对于连续函数, 这个等式总能成立, 从而证明连续函数 f 可积. 实际上, 证明对于 $[a, b]$ 内所有的 x 有

$$\mathbf{L}\int_a^x f=\mathbf{U}\int_a^x f$$

这个事实更容易; 这个技巧表明: 定理 1 的证明的大部分, 甚至不依赖于 f 是可积的这个事实! 下面证明第十三章的定理 3.

定理 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

证明 在 $[a, b]$ 上将函数 L 和 U 定义为

$$L(x)=\mathbf{L}\int_a^x f \text{ 和 } U(x)=\mathbf{U}\int_a^x f.$$

设 x 在 (a, b) 内. 若 $h>0$ 以及

$$m_h=\inf\{f(t): x\leqslant t\leqslant x+h\},$$
$$M_h=\sup\{f(t): x\leqslant t\leqslant x+h\},$$

则
$$m_h\cdot h\leqslant\mathbf{L}\int_x^{x+h} f\leqslant\mathbf{U}\int_x^{x+h} f\leqslant M_h\cdot h,$$

于是
$$m_h\cdot h\leqslant L(x+h)-L(x)\leqslant U(x+h)-U(x)\leqslant M_h\cdot h$$

或
$$m_h\leqslant\frac{L(x+h)-L(x)}{h}\leqslant\frac{U(x+h)-U(x)}{h}\leqslant M_h.$$

若 $h<0$ 以及

$$m_h=\inf\{f(t): x+h\leqslant t\leqslant x\},$$
$$M_h=\sup\{f(t): x+h\leqslant t\leqslant x\},$$

和定理 1 的证明一样, 我们得到同样的不等式.

因 f 在 x 处连续, 我们有

$$\lim_{h\to 0} m_h=\lim_{h\to 0} M_h=f(x),$$

这就证明, 对于 (a, b) 内的 x 有

$$L'(x)=U'(x)=f(x).$$

这意味着，存在着一个数 c 使得对于$[a,b]$内所有的 x 有

$$U(x)=L(x)+c.$$

因

$$U(a)=L(a)=0,$$

所以这个数 c 必定等于 0，于是对于$[a,b]$内所有的 x 有

$$U(x)=L(x).$$

特别地，

$$\mathbf{U}\int_a^b f=U(b)=L(b)=\mathbf{L}\int_a^b f,$$

而这意味着 f 在$[a,b]$上可积.

习　题

1. 求下列每个函数的导数.

   (i) $F(x)=\int_a^{x^3}\sin^3 t\,dt.$

   (ii) $F(x)=\int_3^{\left(\int_1^x \sin^3 t\,dt\right)}\frac{1}{1+\sin^6 t+t^2}dt.$

   (iii) $F(x)=\int_{15}^x\left(\int_8^y\frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt\right)dy.$

   (iv) $F(x)=\int_x^b\frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt.$

   (v) $F(x)=\int_a^b\frac{x}{1+t^2+\sin^2 t}dt.$

   (vi) $F(x)=\sin\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin^3 t\,dt\right)dy\right).$

   (vii) F^{-1}，其中 $F(x)=\int_1^x\frac{1}{t}dt.$

   (viii) F^{-1}，其中 $F(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$

   （求用 $F^{-1}(x)$ 表示的 $(F^{-1})'(x)$.）

2. 对于下列每个 f，若 $F(x)=\int_0^x f$，在哪些点有 $F'(x)=f(x)$？（注意：即使 f 在 x 处不连续，也可能 $F'(x)=f(x)$.）

   (i) $f(x)=0$ 如果 $x\leqslant 1$，$f(x)=1$ 如果 $x>1$.

   (ii) $f(x)=0$ 如果 $x<1$，$f(x)=1$ 如果 $x\geqslant 1$.

   (iii) $f(x)=0$ 如果 $x\neq 1$，$f(x)=1$ 如果 $x=1$.

(iv) $f(x)=0$ 如果 x 为无理数, $f(x)=1/q$ 如果 $x=p/q$(既约分数).

(v) $f(x)=0$ 如果 $x\leqslant 0$, $f(x)=x$ 如果 $x\geqslant 0$.

(vi) $f(x)=0$ 如果 $x\leqslant 0$, $f(x)=1/[1/x]$如果 $x>0$.

(vii) f 是如图 6 所示的函数.

(viii) $f(x)=1$ 如果 $x=1/n$(n 是 **N** 中之数), 在别处 $f(x)=0$.

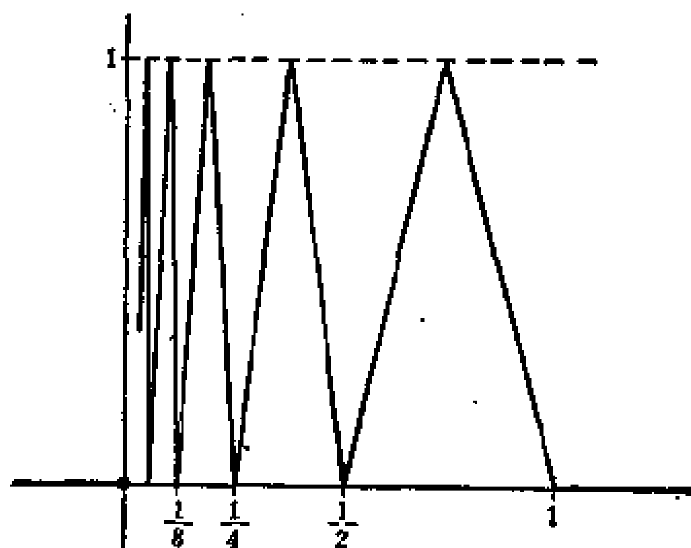


图 6

3. 求$(f^{-1})'(0)$, 若

(i) $f(x)=\int_0^x [1+\sin(\sin t)]dt$.

(ii) $f(x)=\int_1^x \sin(\sin t)\,dt$.

(不要试图明确地算出 f.)

4. 若 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, 求 $F'(x)$. (答案不是 $xf(x)$; 在试图去求 F' 之前, 你应先做一点关于积分的明显运算.)

5. 证明: 若 f 连续, 则

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du.$$

提示: 利用第 4 题, 微分两边.

**6. 利用第 5 题证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du=2\int_0^x\left(\int_0^{u_2}\left(\int_0^{u_1} f(t)dt\right)du_1\right)du_2.$$

7. 求一函数 f 使 $f''(x)=1/\sqrt{1+\sin^2 x}$. (这一题应该很容易; 不要误解

"求"字.)

*8. 一个函数 f 如果对于所有的 x 有 $f(x+a)=f(x)$, 则称为周期为 a 的周期函数.

(a) 若 f 是周期为 a 的周期函数, 并在 $[0,a]$ 上可积, 证明

$$\int_0^a f=\int_b^{b+a} f, \text{对于所有的} b.$$

(b) 求一函数 f, 使 f 不是周期函数, 但 f' 是. 提示: 选一周期函数 g, 使它能保证 $f(x)=\int_0^x g$ 不是周期函数.

(c) 设 f' 是周期为 a 的周期函数. 证明当且仅当 $f(a)=f(0)$ 时 f 为周期函数.

9. 求 $\int_a^b \sqrt[5]{x}\,dx$. 只要猜出一个使 $f'(x)=\sqrt[5]{x}$ 的函数 f, 并利用微积分第二基本定理. 然后利用习题十三, 16 来验证.

*10. 利用微积分基本定理及习题十三, 16, 导出习题十二, 15 的结果.

11. (a) 求 $F(x)=\int_1^x 1/t\,dt$ 及 $G(x)=\int_b^{bx} 1/t\,dt$ 的导数.

(b) 现在给出习题十三, 12 的一个新证明.

*12. 利用微积分基本定理及达布定理(习题十一, 39), 给出介值定理的另一证明.

13. 证明: 若 h 连续, f 和 g 可微, 且

$$F(x)=\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt,$$

则 $F'(x)=h(g(x))\cdot g'(x)-h(f(x))\cdot f'(x)$. 提示: 试将它化为你已能掌握的两种情形, 这两种情形以一常数作为积分下限或上限.

*14. (a) 设 $G'=g$ 和 $F'=f$. 证明: 若函数 y 对于某区间内所有的 x, 满足微分方程

$$(*)\quad g(y(x))\cdot y'(x)=f(x),$$

则有一数 c 使得,

$(**)\quad G(y(x))=F(x)+c$ 　　对于此区间内所有的 x.

(b) 证明, 反之, 若 y 满足 $(**)$, 则 y 为 $(*)$ 的解.

(c) 若

$$y'(x)=\frac{1+x^2}{1+y(x)}$$

求 y 必须满足的条件.

(在此情形中，$g(t)=1+t$ 且 $f(t)=1+t^2$.)然后"解"所得方程以求出所有可能的解 y(没有一个解以 $\mathbf{R}$ 作为它的定义域).

(d) 若

$$y'(x)=\frac{-1}{1+5[y(x)]^4},$$

求 y 必须满足的条件.

(借助于习题十二, 10, 就能证明存在满足所得方程的函数.)

(e) 求满足

$$y(x)y'(x)=-x$$

的所有函数 y. 求满足 $y(0)=-1$ 的解 y.

*15. 极限$\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^N f$ 如果存在, 则记为 $\int_0^\infty f\left(\text{或}\int_0^\infty f(x)dx\right)$, 并称之为"广义积分".

(a) 求$\int_1^\infty x^r dx$, 若 $r<-1$.

(b) 利用习题十三, 12 证明 $\int_1^\infty 1/x dx$ 不存在. 提示: 关于 $\int_1^{2^n} 1/x dx$你能说什么?

(c) 设对于 $x\geqslant 0$ 有 $f(x)\geqslant 0$ 且$\int_0^\infty f$ 存在. 证明: 若对于所有的 $x\geqslant 0$ 有 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$, 则 $\int_0^\infty g$ 也存在.

(d) 说明为什么$\int_0^\infty 1/(1+x^2)dx$ 存在. 提示: 将此积分在 1 处分开.

*16. 广义积分$\int_{-\infty}^a f$ 显然定义为 $\lim\limits_{N\to-\infty}\int_N^a f$. 但另一类广义积分$\int_{-\infty}^\infty f$的定义方式却不明显: 它等于$\int_0^\infty f+\int_{-\infty}^0 f$, 只要这两个广义积分都存在.

(a) 说明为什么$\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)dx$ 存在.

(b) 说明为什么$\int_{-\infty}^\infty x dx$ 不存在. (但注意 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^N x dx$ 的确存在.)

(c) 证明: 如果$\int_{-\infty}^\infty f$ 存在, 则 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^N f$ 存在且等于 $\int_{-\infty}^\infty f$. 其次证明, $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N}^{N+1} f$ 及 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-N^2}^N f$ 都存在, 且等于 $\int_{-\infty}^\infty f$. 你能作出这些事实的合理的推广吗? (如果你不能, 那你做这些特例时将很艰难!)

*17. 有另一类"广义积分",其中区间有界,但函数无界:

(a) 设 $a>0$,求 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a 1/\sqrt{x}\,dx$. 不论 $f(0)$ 是怎样定义的,此极限都用 $\int_0^a 1/\sqrt{x}\,dx$ 来表示,即使函数 $f(x)=1/\sqrt{x}$ 在 $[0, a]$ 上无界.

(b) 求 $\int_0^a x^r dx$,如果 $-1<r<0$.

(c) 利用习题十三,12,证明 $\int_0^a x^{-1}dx$ 即使当作极限也无意义.

(d) 给 $\int_a^0 |x|^r dx$(当 $a<0$ 时)下一个合理的定义,并对于 $-1<r<0$ 计算它.

(e) 对 $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}dx$ 下一个作为两个极限之和的合理的定义,并证明这两个极限都存在. 提示:为什么 $\int_{-1}^0 (1+x)^{-1/2}dx$ 存在? 当 $-1<x<0$ 时,$(1+x)^{-1/2}$ 与 $(1-x^2)^{-1/2}$ 应该怎样比较?

*18. 最后,可以将积分概念的这两种可能的推广进行组合.

(a) 若当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=1/\sqrt{x}$,而当 $x\geqslant 1$ 时 $f(x)=1/x^2$,求 $\int_0^\infty f(x)dx$(在确定它是什么意思之后).

(b) 说明 $\int_0^\infty x^r dx$ 毫无意义.(区别 $-1<r<0$ 及 $r<-1$ 两种情况.在一种情况下,积分在 0 处出问题,另一种情况下,在∞处;对于 $r=-1$,积分在两处都有问题.)

选题解答

1. (i) $(\sin^3 x^3)\cdot 3x^2$.

 (iii) $\int_a^x \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt$.

 (v) $\int_a^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt$.

 (vii) $(F^{-1})'(x)=\frac{1}{F'(F^{-1}(x))}=F^{-1}(x)$.

2. (i) 所有的 $x\neq 1$.

(iii) 所有的 $x\neq 1$.

(v) 所有的 x.

(vii) 所有的 $x\neq 0$.（因为当 $x\leqslant 0$ 时 $F(x)=0$，但存在任意接近于 0的 $x>0$ 满足 $\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{2}$，故 F 在 0 处不可微.）

3. (i)

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{1+\sin(\sin(f^{-1}(0)))}$$

$$=\frac{1}{1+\sin(\sin 0)}=1.$$

4. $F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，于是

$$F'(x)=xf(x)+\int_0^x f(t)dt.$$

7.

$$f(x)=\int_0^x\left(\int_0^y\left(\int_0^z\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}dt\right)dz\right)dy.$$

9. 我们可以取

$$f(x)=\frac{x^{(1/n)+1}}{\frac{1}{n}+1}.$$

则
$$\int_0^b\sqrt[n]{x}\,dx=f(b)-f(0)=\frac{b^{(1/n)+1}}{\frac{1}{n}+1}.$$

第十五章 三角函数

函数sin和cos的定义比人们猜想的要精细得多. 为此, 本章一开头用的是非正式和直观的定义,这用不着过多地去追究它,因为我们很快就要用我们真正打算使用的正式定义去代替它们.

在初等几何中, 从一公共起点出发的两条射线合起来就是角(图1).

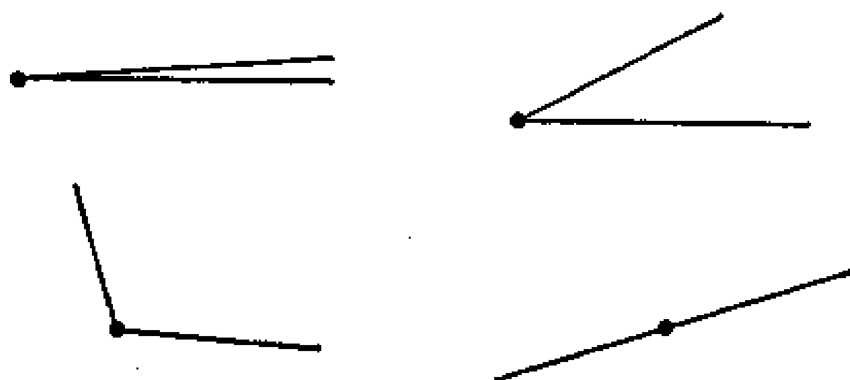


图 1

对于三角而言更有用的是"有向角", 这可以认为是从同一起点出发的射线偶(l_1, l_2),具体形象如图2.

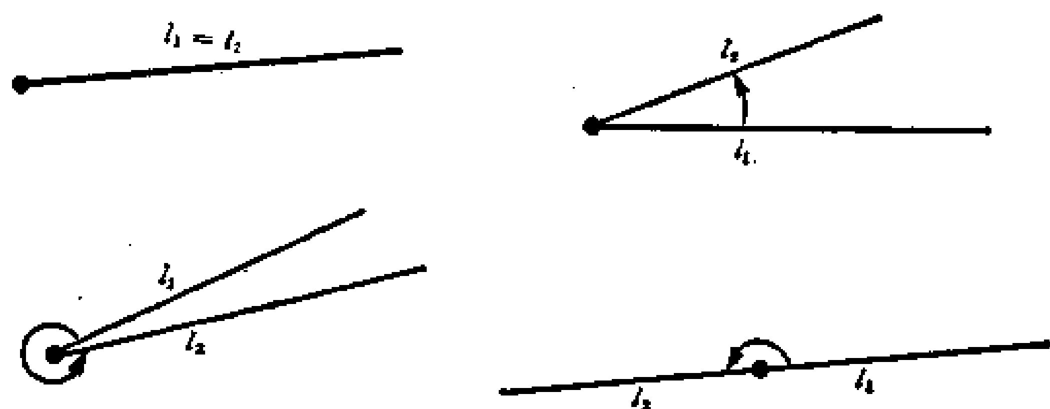


图 2

如果我们把水平坐标轴正向的那一半选作 l_1，那末有向角完全可由第二条射线来描绘(图 3)．

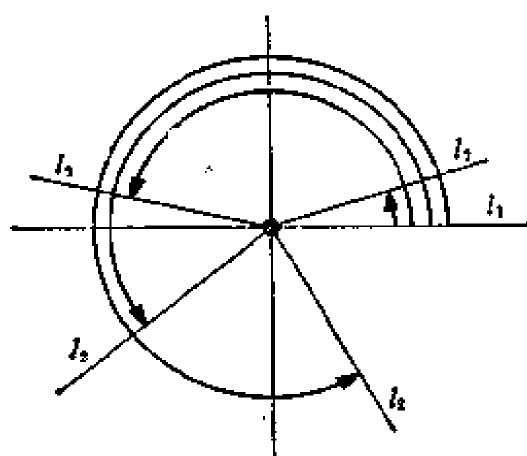


图 3

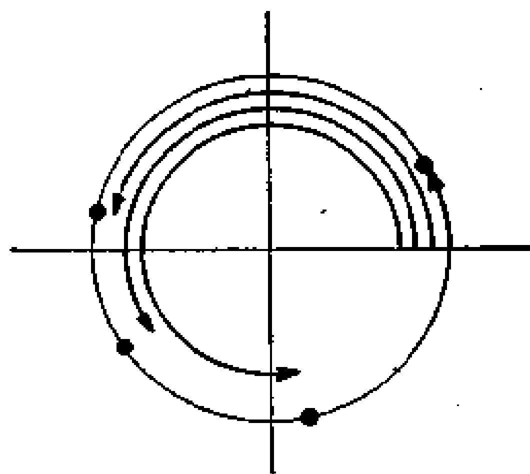


图 4

因为每条射线与单位圆相交恰好一次，所以可以更简单地以单位圆上的一点(图 4)，即在 $x^2+y^2=1$ 上的一点 (x, y) 来表示有向角．

有向角的 sin 和 cos 现在可以定义如下(图 5)：有向角由 $x^2+y^2=1$ 上一点 (x, y) 所确定，这角的正弦定义为 y，余弦定义为 x．

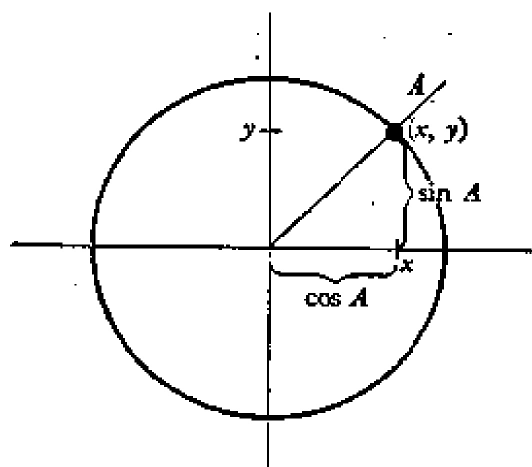


图 5

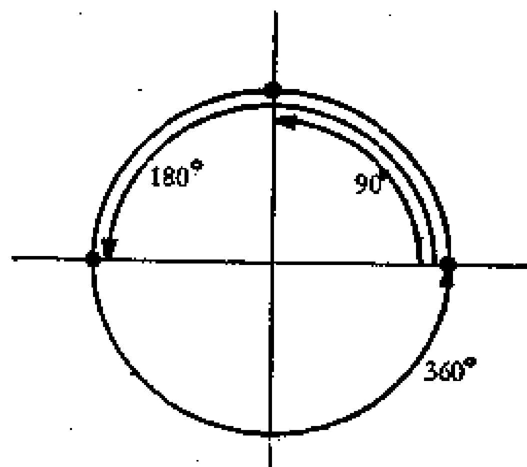


图 6

尽管前一段已有精确的味道，但对 sin 和 cos 的定义我们还不能就此完结．事实上这仅仅是开始．我们所定义的是有向角的正

弦和余弦，而我们想要对每一个数 x 定义 $\sin x$ 和 $\cos x$. 通常的作法是把角度与所有的数联系起来. 最老的方法是"以度数计量角". "绕一周"的一个角与 360 相联系, "绕半周"的一个角与 180 相联系,"四分之一周"的角与 90 相联系,等等(图 6). 由此, 与数 x 相联系的角叫做"x 度的角". 0 度的角与 360 度的角是一致的,这种多义性可有意地进一步发展, 以使 90 度的一个角也就是 360+90 度的角等. 现在我们能够定义一个函数,用 $\sin^{\circ}$ 表示如下:

$$\sin^{\circ}(x)=x\text{ 度的角的正弦.}$$

这种表示角的方法有两个困难. 尽管对于 90 或 45 度角我们所指的意义是清楚的,但如$\sqrt{2}$度的角指的是什么就不十分清楚. 即使这种困难可以克服,但依靠任意选定的数 360 的这种体系,是不大可能导致优良结果的——如果函数 $\sin^{\circ}$ 在数学上得到满意的性质,这只会是侥幸而致.

"弧度法"试图给这两个缺陷提供补救方法. 给定任意数 x, 在单位圆上选一点 P,使 x 为从(1, 0)开始沿逆时针方向转到 P 点的圆弧长(图 7). 由 P 点所确定的有向角叫做"x弧度的角". 因为整个圆周长是 2π,所以 x 弧度的角和 $2\pi+x$ 弧度的角是完全相同的. 现在可定义函数 $\sin^{r}$ 如下:

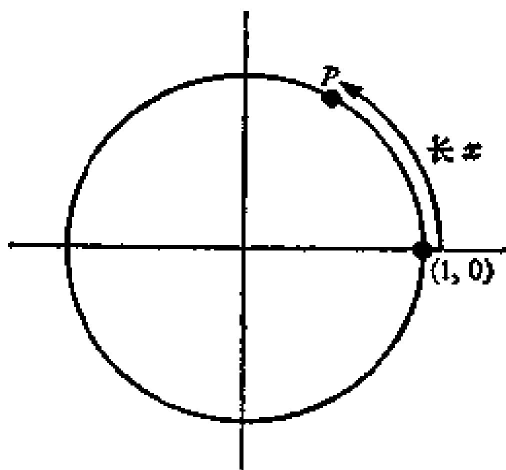


图 7

$$\sin^{r}(x)=x\text{ 弧度的角的正弦.}$$

采用同样方法能够容易地定义 $\sin^{\circ}$. 因为我们要有 $\sin^{\circ}360=\sin^{r}2\pi$,所以可定义

$$\sin^{\circ}x=\sin^{r}\frac{2\pi x}{360}=\sin^{r}\frac{\pi x}{180}.$$

由于 $\sin^r$(不是$\sin^\circ$)是我们唯一感兴趣的函数，所以我们马上就要把 $\sin^r$ 中的上标 r 去掉. 这样作以前，尚须注意几点.

$\sin^\circ x$ 和 $\sin^r x$ 有时写作

$$\sin x^\circ,$$

$$\sin x \text{ 弧度}.$$

但这个记号很容易迷惑人；数 x 仅仅是一个数——并无标记说明它指的是"度"还是"弧度". 由于弄不清记号 $\sin x$ 的意义，人家会问：

"x 表示的是度还是弧度？"

意思是：

"你是指'$\sin^\circ$'还是'$\sin^r$'？"

即使对于要求精确的数学家而言，要不是因为不考虑这一点对某些问题会得出不正确的答案（见习题 18），这些说明都可以省略.

虽然函数 $\sin^r$ 就是我们希望简单地记为sin(今后专用)的函数，但有一个困难包含在 $\sin^r$ 的定义中. 我们提出的定义要依赖曲线长度的概念. 虽然我们可以离开本题定义长度，但在目前，用面积来重新表述 $\sin^r x$ 的定义要容易得多，而面积可用积分来讨论.（用长度讨论略述在第 32 到第 34 题中.）

假定 x 是单位圆上从 $(1,0)$ 到 P 点的一段弧的长度，则这段弧为单位圆周总长度 2π 的 $x/2\pi$. 令 S 表示如图 8 所示的"扇形"；S 由单位圆，水平轴以及通过 $(0,0)$ 和 P 的射线围成. S 的面积应是单位圆面积的 $x/2\pi$ 倍，此圆的面积是 π，因此 S 的面积应为

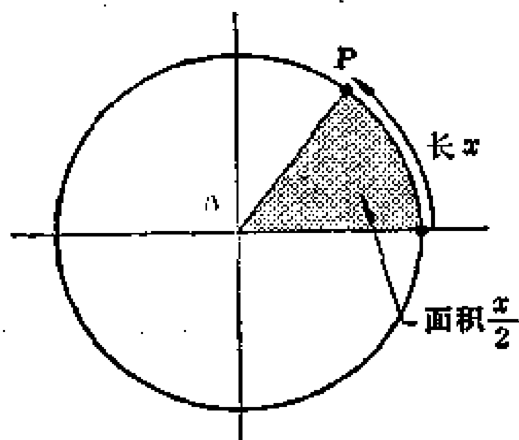


图 8

$$\frac{x}{2\pi}\cdot\pi=\frac{x}{2}.$$

所以我们能够把 $\cos x$ 和 $\sin x$ 定义为确定面积为 $x/2$ 的扇形的点 P 的坐标.

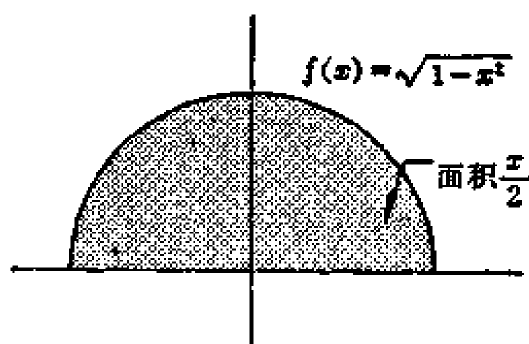


图 9

以这些说明为背景，即可开始严格定义函数 sin 和 cos. 第一个定义把 π 与单位圆的面积等同起来——更确切些，将 π 定义为半圆面积的两倍(图 9).

定义

$$\pi=2\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

(这个定义并不是为了装饰. 要给三角函数下定义，首先要在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 的范围内定义 $\sin x$ 和 $\cos x$.)

第二个定义是对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 描述一下由单位圆，水平轴和通过 $(x,\sqrt{1-x^2})$ 的射线所围成的扇形面积 $A(x)$. 如果 $0\leqslant x\leqslant 1$，这块面积可以用一个三角形的面积与单位圆下的一个区域的面积之和表示(图 10):

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\int_{x}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

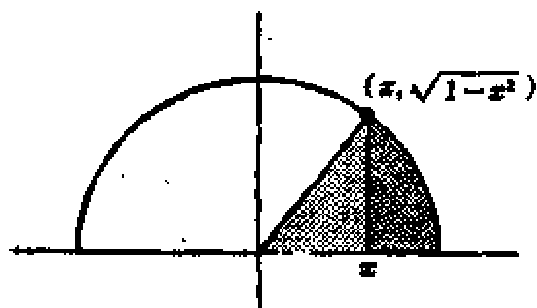


图 10

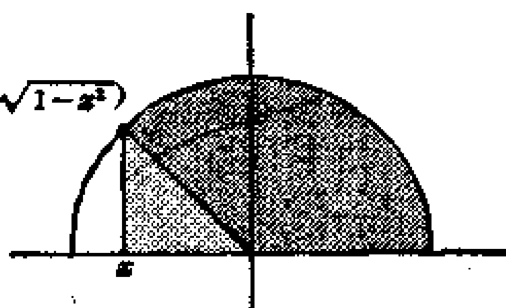


图 11

同一公式对$-1\leqslant x\leqslant 0$也适用．此时(图 11),

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

这一项是负的，它表示要从

$$\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

中减去的三角形的面积.

定义

若	$-1\leqslant x\leqslant 1,$
则	$A(x)=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\displaystyle\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt.$

注意：若$-1<x<1$，则A在x是可微的，且(用微积分基本定理)

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left[x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\right]-\sqrt{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-x^2+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]-\sqrt{1-x^2}$$

$$=\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}$$

$$=\frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

也可看到(图 12)：在区间$[-1,1]$上，函数A从

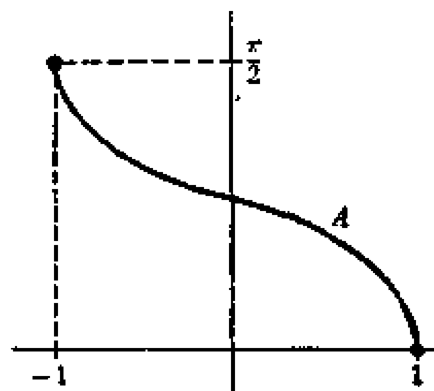


图 12

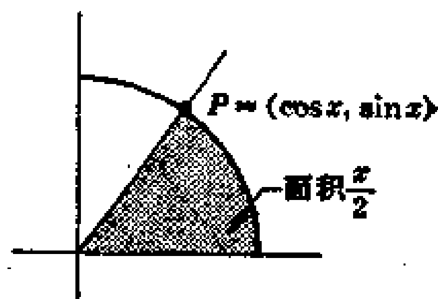


图 13

$$A(-1)=0+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

递减到 $A(1)=0$. 这可直接从 A 的定义得出，也可从其微分在 $(-1,1)$ 上是负值这一事实得出.

对于 $0\leqslant x\leqslant\pi$，我们希望把 $\sin x$ 和 $\cos x$ 定义为单位圆上点 $P=(\cos x,\sin x)$ 的坐标，由 P 确定的扇形面积为 $x/2$(图 13). 换言之:

定义

> 若 $0\leqslant x\leqslant\pi$，则 $\cos x$ 是在 $[-1,1]$ 内使
> $$A(\cos x)=\frac{x}{2}$$
> 的唯一的数；而
> $$\sin x=\sqrt{1-(\cos x)^2}.$$

这个定义实际上只需要几句话即可说明其合理性. 为了要知道确有满足 $A(y)=x/2$ 的数，我们利用事实：A 是连续的，A 取到值 0 和 $\pi/2$. 要使我们的初步定义成为准确的，那么这样没有明说地应用介值定理是个关键. 我们将定义作出并说明后，现在就可以迅速向前进展.

定理 1 如果 $0<x<\pi$，则

$$\cos'(x)=-\sin x,$$

$$\sin'(x)=\cos x.$$

证明 设 $B=2A$，则定义 $A(\cos x)=x/2$ 可写为

$$B(\cos x)=x;$$

换言之，cos 正好是 B 的反函数. 我们已经算出

$$A'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

由此得出

$$B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= (B^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}}\\ &= -\sqrt{1-(\cos x)^2}\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

由于

$$\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}$$

我们又得到

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x\cdot\cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\\ &= \frac{\cos x\sin x}{\sin x}\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

定理 1 包含的内容可用来绘 sin 和 cos 在区间 $[0,\pi]$ 上的草图。由于

$$\cos'(x) = -\sin x < 0,\quad 0 < x < \pi,$$

函数 cos 从 $\cos 0=1$ 到 $\cos\pi=-1$ 是递降的(图 14)。于是在 $[0,\pi]$ 内有唯一的 y 使 $\cos y=0$。要求 y，注意 cos 的定义，

$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

意味着

$$A(0) = \frac{y}{2},$$

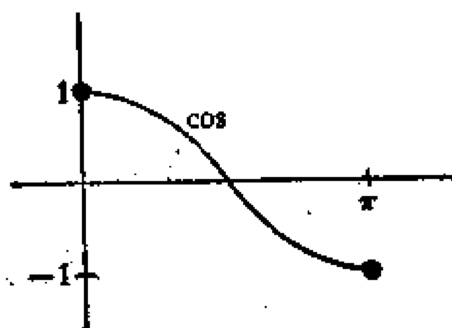


图 14

所以

$$y=2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

容易看出

$$\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

因此也可写作

$$y=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

现在我们有

$$\sin'(x)=\cos x\begin{cases}>0, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ <0, & \pi/2<x<\pi,\end{cases}$$

所以 sin 在$[0, \pi/2]$上从 $\sin 0=0$ 递增至 $\sin\pi/2=1$，然后在$[\pi/2, \pi]$上递减至 $\sin\pi=0$(图 15)。

x 不在$[0, \pi]$内时，$\sin x$ 和 $\cos x$ 的值通过下面两步很容易确定：

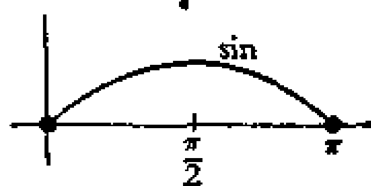


图 15

(1) 若 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$，则

$$\sin x=-\sin(2\pi-x),$$
$$\cos x=\cos(2\pi-x).$$

图 16 表示 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在$[0, 2\pi]$上的图形。

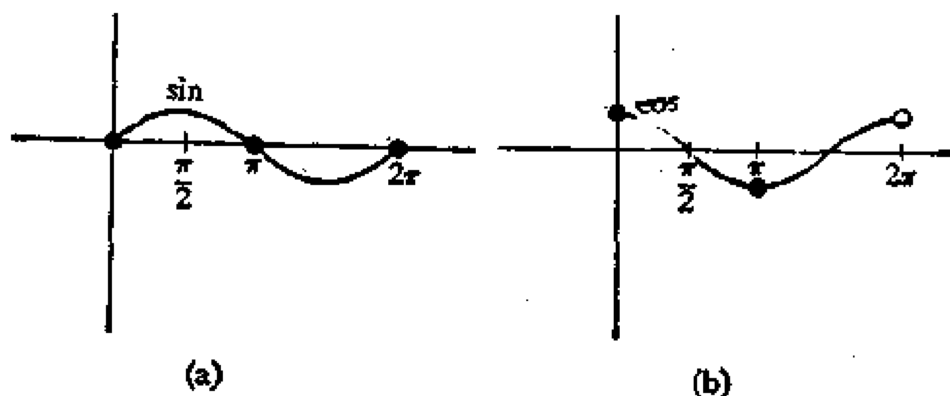


图 16

(2) 若 $x=2\pi k+x'$，其中 k 为某一整数，而 x' 在 $[0, 2\pi]$ 内，则

$$\sin x=\sin x',$$

$$\cos x=\cos x'.$$

图 17 表示定义在整个 $\mathbf{R}$ 上的 sin 和 cos 的图形.

把 sin 和 cos 函数扩充到 $\mathbf{R}$ 后，我们必须检验一下这些函数基本性质仍旧成立. 这在大多数情况下很容易. 例如，显然等式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

对所有 x 都成立. 若 x 不是 π 的倍数，也不难证明

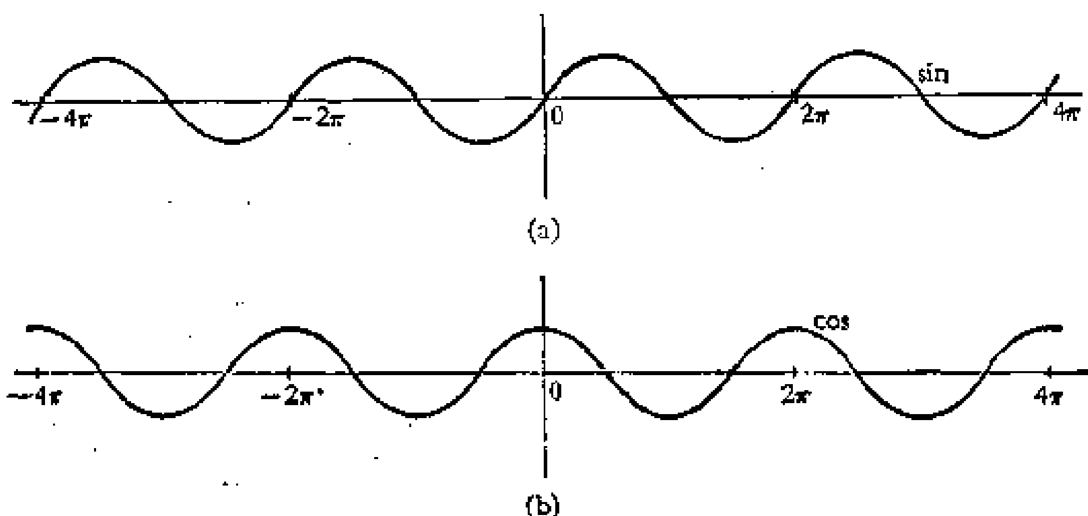


图 17

$$\sin'(x)=\cos x,$$

$$\cos'(x)=-\sin x.$$

例如，若 $\pi<x<2\pi$，则

$$\sin x=-\sin(2\pi-x),$$

因此

$$\begin{aligned}\sin'(x)&=-\sin'(2\pi-x)\cdot(-1)\\&=\cos(2\pi-x)\\&=\cos x.\end{aligned}$$

若 x 是 π 的倍数，则要点技巧. 只需要应用第十一章定理 7 即可推断这个公式在此情况下也是正确的.

其他标准的三角函数可毫无困难地给出．我们定义

$$\left.\begin{aligned}\sec x&=\frac{1}{\cos x}\\ \tan x&=\frac{\sin x}{\cos x}\end{aligned}\right\} x\neq k\pi+\pi/2,$$

$$\left.\begin{aligned}\csc x&=\frac{1}{\sin x}\\ \cot x&=\frac{\cos x}{\sin x}\end{aligned}\right\} x\neq k\pi.$$

这些函数图形如图 18 所示．下一个定理要把这些函数的导数列出来，由此你可深信这些图形的一般特征无误．（因为这些结果随时都可重新推导出来，故无须记住定理的叙述．）

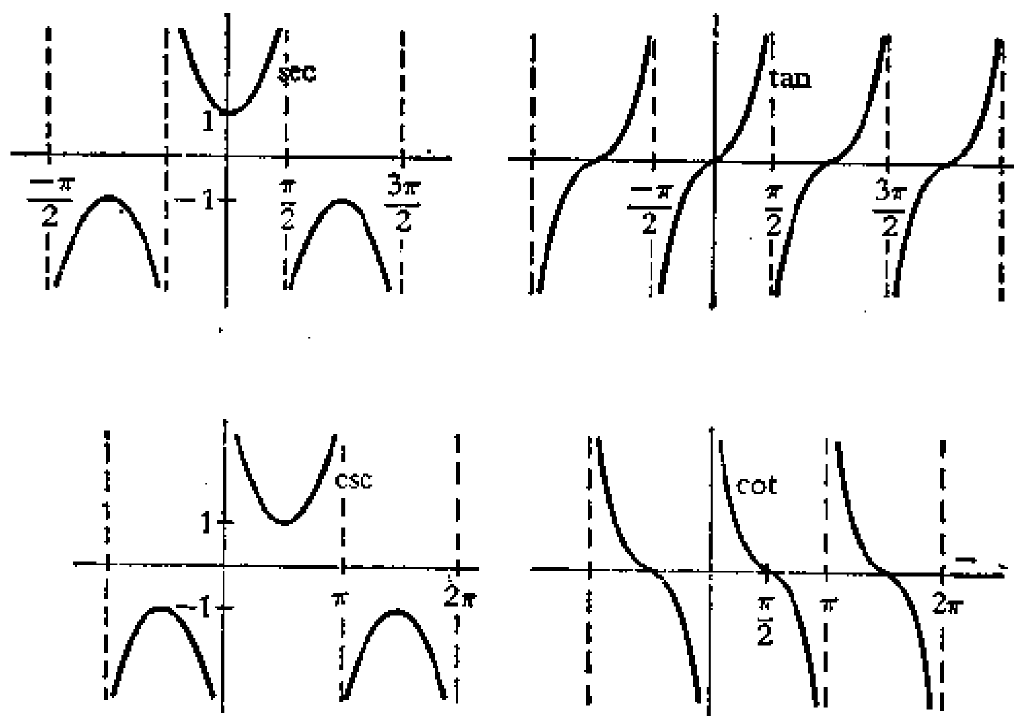


图 18

定理 2 若 $x\neq k\pi+\pi/2$，则

$$\sec'(x)=\sec x\tan x,$$

$$\tan'(x)=\sec^2 x.$$

若 $x\neq k\pi$，则

$$\csc'(x) = -\csc x \cot x,$$
$$\cot'(x) = -\csc^2 x.$$

证明 留给读者(直接计算).

反三角函数也是容易微分的. 三角函数不是一一的, 因此首先要把它们限制到适当的区间. 可能得到的最大长度是 π, 通常选取的区间是(图 19)

$[-\pi/2, \pi/2]$ 对于 sin,

$[0, \pi]$ 对于 cos,

$(-\pi/2, \pi/2)$ 对于 tan.

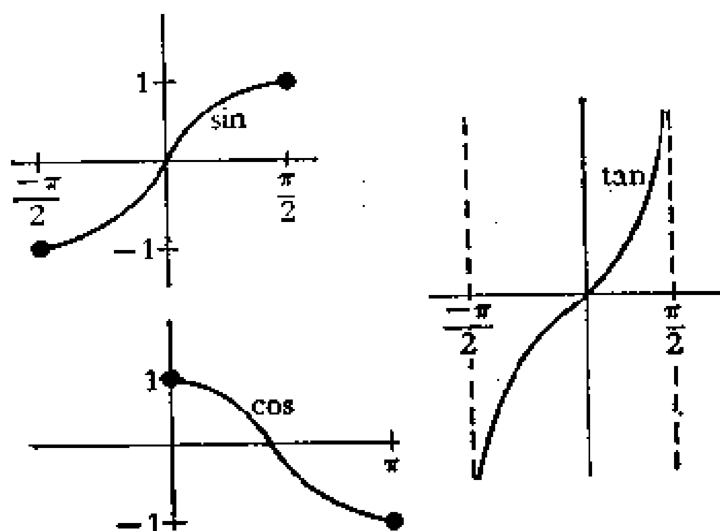
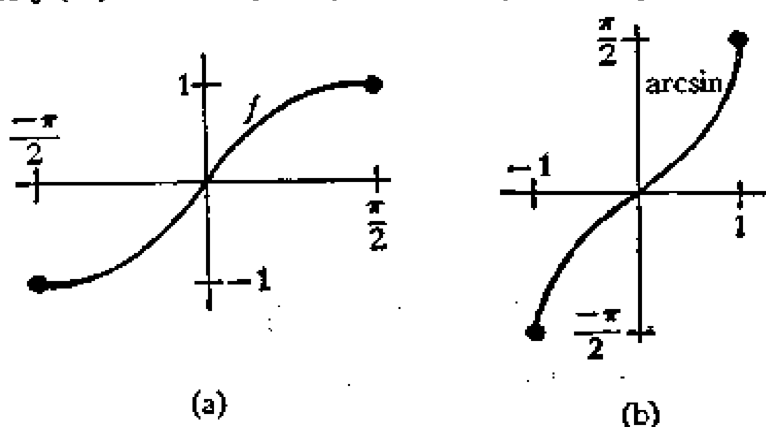


图 19

(其他三角函数的反函数不常用,故在此不讨论了.)

函数 $f(x)=\sin x(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2)$ 的逆用 arc sin (图 20)表



(a) (b)

图 20

示；arc sin 的定义域是$[-1,1]$. 因为 arc sin 不是 sin（它不是一一的）的逆，而是限制了的函数 f 的逆，所以避免使用记号 $\sin^{-1}$；$\sin^{-1}$ 的另一缺点是会被解释为 $1/\sin x$.

函数

$$g(x)=\cos x,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$$

的逆用 arc cos（图 21）表示；arc cos 的定义域是$[-1,1]$.

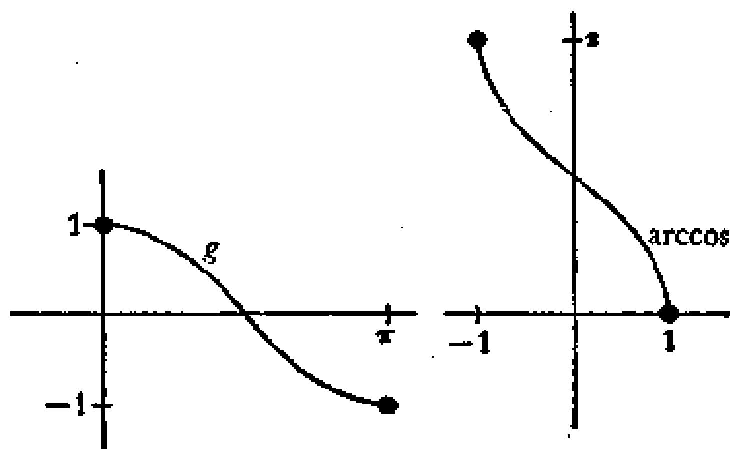


图 21

函数

$$h(x)=\tan x,\quad -\pi/2<x<\pi/2$$

的逆用 arc tan（图 22）表示；arc tan 是在整个 $\mathbf{R}$ 上都一一，而且是有界的可微函数的最简单例子之一.

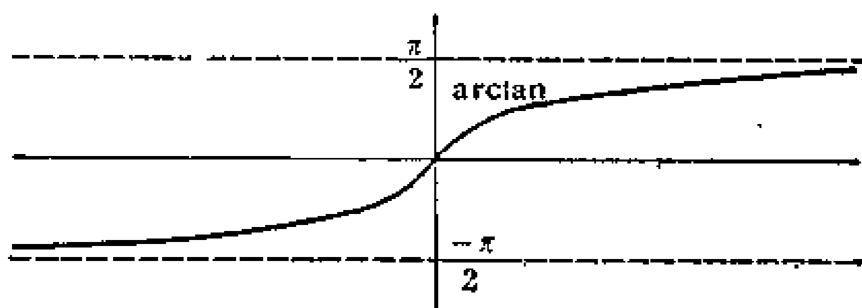


图 22

反三角函数的导数意外的简单，它根本不含三角函数. 求导

数是一件简单事，但要把它们用适当形式表示，还须要简化如同

$$\cos(\arcsin x),$$

$$\sec(\arctan x)$$

这样的式子.

一张简图是记住正确简化的最好方法. 例如，图 23 表示一个有向角，它的正弦是 x——于是此角是 $(\arcsin x)$ 弧度的一个角；于是，$\cos(\arcsin x)$ 是另一边的长，即 $\sqrt{1-x^2}$. 但在证明下一个定理时，我们不用这种图.

定理 3 若 $-1<x<1$，则

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

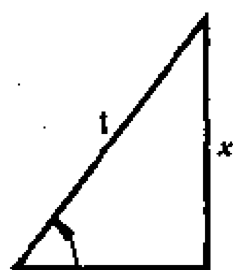


图 23

此外，对所有 x 我们有

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

证明
$$\begin{aligned}\arcsin'(x)&=(f^{-1})'(x)\\&=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\&=\frac{1}{\sin'(\arcsin x)}\\&=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}.\end{aligned}$$

既然

$$[\sin(\arcsin x)]^2+[\cos(\arcsin x)]^2=1,$$

即

$$x^2+[\cos(\arcsin x)]^2=1;$$

所以，

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}.$$

(由于 $\arcsin x$ 在$[-\pi/2, \pi/2]$内, 故 $\cos(\arcsin x)>0$,因而平方根取正值.)第一个公式得到证明.

第二个公式已经证明过(在定理1的证明中). 也可以仿效第一个公式的情形去证明,若出现困难,就是一个有价值的练习. 第三个公式的证明如下.

$$\begin{aligned}\arctan'(x)&=(h^{-1})'(x)\\&=\frac{1}{h'(h^{-1}(x))}\\&=\frac{1}{\tan'(\arctan x)}\\&=\frac{1}{\sec^2(\arctan x)}.\end{aligned}$$

用 $\cos^2\alpha$ 除等式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

两边得

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha.$$

由此得到

$$[\tan(\arctan x)]^2+1=\sec^2(\arctan x),$$

或

$$x^2+1=\sec^2(\arctan x),$$

这就证明了第三个公式.

公式 $\sin'(x)=\cos x$ 的传统证法(与此处所证完全不同)概述于习题26. 这个证明依靠先建立极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,$$

和"和角公式"

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

既然已经知道了 sin 和 cos 的导数, 那末这两个公式就很容易导

出. 第一个正好是特例 $\sin'(0)=\cos(0)$. 第二个依靠函数 sin 和 cos 的一个优美特征. 要想推导这个结果, 需要一个引理, 其证明包含一种聪明技巧; 更直接的证明将在第四部分提供.

引理 设 f 处处有二阶导数且

$$f''+f=0,$$
$$f(0)=0,$$
$$f'(0)=0.$$

则
$$f=0.$$

证明 把第一个方程的两边乘以 f' 得

$$f'f''+ff'=0.$$

于是

$$[(f')^2+f^2]'=2(f'f''+ff')=0,$$

所以 $(f')^2+f^2$ 是一个常值函数. 从 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=0$ 得知此常数是 0; 因此

$$[f'(x)]^2+[f(x)]^2=0, \text{ 对于所有 } x.$$

由此推出

$$f(x)=0 \quad \text{对于所有 } x.$$

定理 4 设 f 处处有二阶导数且

$$f''+f=0,$$
$$f(0)=a,$$
$$f'(0)=b,$$

则

$$f=b\cdot\sin+a\cdot\cos.$$

(特别是, 若 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=1$, 则 $f=\sin$; 若 $f(0)=1$ 且 $f'(0)=0$, 则 $f=\cos$.)

证明 令

$$g(x)=f(x)-b\sin x-a\cos x.$$

则

$$g'(x)=f'(x)-b\cos x+a\sin x,$$
$$g''(x)=f''(x)+b\sin x+a\cos x.$$

所以

$$g''+g=0,$$
$$g(0)=0,$$
$$g'(0)=0,$$

这表示

$$0=g(x)=f(x)-b\sin x-a\cos x,\ \text{对所有}\ x.$$

定理 5 若 x 和 y 为任意两个数，则

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

证明 对任何特定数 y 可由

$$f(x)=\sin(x+y)$$

定义一个函数 f. 则有

$$f'(x)=\cos(x+y),$$
$$f''(x)=-\sin(x+y).$$

于是，

$$f''+f=0$$
$$f(0)=\sin y,$$
$$f'(0)=\cos y.$$

从定理 4 可得出

$$f=(\cos y)\cdot\sin+(\sin y)\cdot\cos;$$

即

$$\sin(x+y)=\cos y\sin x+\sin y\cos x,\ \text{对于所有}\ x.$$

因为一开始就可以选取 y 为任何数，因此就证明了第一个公式对于所有 x 和 y 都成立。

第二个公式以同法证明.

作为本章结束语和第十七章的序言，我们提出另一个定义函数 sin 的方法. 由于

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1,$$

从微积分第二基本定理得出

$$\arcsin x=\arcsin x-\arcsin 0=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

这个方程可以作为 arcsin 的定义. 由此立即可得

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

于是函数 sin 就可定义为 $(\arcsin)^{-1}$，而且反函数的导数公式表明

$$\sin'(x)=\sqrt{1-\sin^2 x},$$

它可以定义为 $\cos x$. 结果可证明 $A(\cos x)=x/2$，发展到最后，重新获得我们在本章中由之出发的那个定义. 而许多东西能够讲得更快. 下定义前完全无须启发；这些定义的合理性对作者而言是熟知的，但对学生而言并非如此，对于他们那是有意安排的！然而，正如在第十七章我们将看到，这种途径有时确实十分合理.

习　　题

1. 微分下列各函数：

   (i) $f(x)=\arctan(\arctan(\arctan x))$.

   (ii) $f(x)=\arcsin(\arctan(\arccos x))$.

   (iii) $f(x)=\arctan(\tan x\arctan x)$.

   (iv) $f(x)=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2. 用罗必塔法则求下列各极限：

   (i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x+x^3/6}{x^3}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+x^3/6}{x^4}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+x^2/2}{x^2}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+x^2/2}{x^4}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x+x^3/3}{x^3}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

(a) 求 $f'(0)$.

(b) 求 $f''(0)$.

在此处你几乎必须用罗必塔法则，但到第二十三章我们不费什么功夫就能求出 $f^{(k)}(0)$.

4. 绘出下列函数的图形.

(a) $f(x)=\sin 2x$.

(b) $f(x)=\sin(x^2)$.（只用sin的图形就可以作出相当不错的草图. 实际上,本题只要求你想得单纯一些,因为确定导数 $f'(x)=\cos(x^2)\cdot 2x$ 的符号并不比直接确定 f 的性态容易. 表示 $f'(x)$ 的式子指出了一个重要事实，但是由于 f 是偶函数，$f'(0)=0$ 一定是对的，而且在你的图上，这也会很清楚.）

(c) $f(x)=\sin x+\sin 2x$.（首先在同一组坐标轴上，x 从 0 到 2π，仔细绘出 $g(x)=\sin x$ 和 $h(x)=\sin 2x$ 的图形，并推测它们的和是什么样子，这也许是有益的. 通过考虑 f 的导数，你很容易求出在 $[0,2\pi]$ 上 f 有多少临界点. 然后通过求出在这每一个点 f 的符号，可以确定这些临界点的性质；绘出草图也许对解答有所启发.）

(d) $f(x)=\tan x-x$.（先确定 f 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 内的性态. 除去平移了一定量之外，f 在所有区间 $(k\pi-\pi/2,\ k\pi+\pi/2)$ 内的图形看起来都一样. 为什么？）

(e) $f(x)=\sin x-x$.（第十一章附录中的材料对这个函数特别有帮

助.)

(f)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

((d)题能使你近似地确定 f' 的零点位于何处. 注意 f 是偶函数且在点 0 连续; 也要考虑 x 很大时 f 的大小.)

5. 证明 cos 的和角公式.

6. (a) 由 sin 和 cos 的和角公式导出 $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$ 和 $\cos 3x$ 的公式.

   (b) 利用这些公式求出下列三角函数值(在初等三角中通常是由几何的方法导出的):

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\frac{\pi}{4}=1,$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. (a) 证明 $A\sin(x+B)$ 对于适当的 a 和 b 可以写成 $a\sin x+b\cos x$. (本章中的一个定理提供了简短的证明, 你应能算出 a 和 b 的值.)

   (b) 反之, 给定 a 和 b, 试求数 A 和 B 使 $a\sin x+b\cos x=A\sin(x+B)$ 对所有 x 都成立.

   (c) 利用(b) 绘 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的图形.

8. (a) 证明

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

其中 x, y 和 $x+y$ 假定不具有 $k\pi+\pi/2$ 的形式. (利用 sin 和 cos 的和角公式.)

   (b) 证明

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

指出需对 x 和 y 加的限制. 提示: 在(a)中将 x 换为 $\arctan x$, 而 y 换为 $\arctan y$.

9. 证明

$$\arcsin\alpha+\arcsin\beta=\arcsin\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha^2}\right),$$

指出对 α 和 β 需加的限制.

10. 证明，若 m 和 n 为任意数，则

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].$$

11. 证明，若 m 和 n 为自然数，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0.$$

这些关系在傅里叶级数理论中特别重要. 虽然这个题目只在建议读物中才得到认真的注意，但下面一个习题对它们的重要性有所提示.

12. (a) 若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-a\cos nx)^2dx$$

的最小值在

$$a=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

时达到，而

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-a\sin nx)^2\,dx$$

的最小值则当

$$a=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

时达到.（在每种情形中，将 a 提出积分号，得到一个 a 的二次式.）

(b) 定义

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

证明，若 c_i 和 d_i 为任意数，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\left[\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}c_n\cos nx+d_n\sin nx\right]\right)^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-2\pi\left(\frac{a_0c_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_nc_n+b_nd_n\right)$$

$$+\pi\left(\frac{c_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}c_n^2+d_n^2\right)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n^2+b_n^2\right)$$

$$+\pi\left(\left(\frac{c_0}{\sqrt{2}}-\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2+\sum_{n=1}^{N}(c_n-a_n)^2+(d_n-b_n)^2\right),$$

从而证明第一个积分当 $a_i=c_i$ 和 $b_i=d_i$ 时最小．换言之，在函数 $s_n(x)=\sin nx$ 和 $c_n(x)=\cos nx\,(1\leqslant n\leqslant N)$ 的所有“线性组合”中，特定函数

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

在$[-\pi,\pi]$上与 f“最相吻合”．

13. 将 $\sin x+\sin y$ 和 $\cos x+\cos y$ 化为三角函数乘积的公式．提示：先对 $\sin(a+b)+\sin(a-b)$ 求一个公式，这样做有何好处？

14. (a) 由 $\cos 2x$ 的公式出发，导出 $\sin^2x$ 和 $\cos^2x$ 用 $\cos 2x$ 表示的公式．

 (b) 对于 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，证明

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\quad 和\quad \sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

 (c) 利用(a)求 $\int_a^b\sin^2x dx$ 和 $\int_a^b\cos^2x dx$.

15. 试求 $\sin(\arctan x)$ 和 $\cos(\arctan x)$ 的不包含三角函数的表达式. 提示: $y=\arctan x$ 等于说 $x=\tan y=\sin y/\cos y=\sin y/\sqrt{1-\sin^2 y}$.

16. 若 $x=\tan u/2$, 试将 $\sin u$ 和 $\cos u$ 用 x 表示. (利用第 15 题; 答案是很简单的表达式.)

17. (a) 证明 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$. (我们绘出的 sin 和 cos 的图形似乎一直就是这样.)

    (b) $\arcsin(\cos x)$ 和 $\arccos(\sin x)$ 是什么?

18. (a) 求 $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$. 提示: 答案不是 45.

    (b) 求 $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt$.

19. 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

20. (a) 定义函数 $\sin^\circ$ 和 $\cos^\circ$ 为 $\sin^\circ(x)=\sin(\pi x/180)$ 和 $\cos^\circ(x)=\cos(\pi x/180)$. 求 $(\sin^\circ)'$ 和 $(\cos^\circ)'$ 用函数 $\sin^\circ$ 和 $\cos^\circ$ 表示的式子.

    (b) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^\circ x}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin^\circ\frac{1}{x}$.

21. 证明对于单位圆上的每一点, 至少有一个(因而有无穷多个) θ, 使它表示为 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 的形式.

22. (a) 证明 π 是 sin 在其上一一的区间的最大可能长度, 且这种区间必有如 $(2k\pi-\pi/2, 2k\pi+\pi/2)$ 的形式.

    (b) 假设对于 $(2k\pi-\pi/2,\ 2k\pi+\pi/2)$ 内的 x 我们令 $g(x)=\sin x$. $(g^{-1})'$ 等于什么?

23. 设 $f(x)=\sec x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$. 求 f^{-1} 的定义域并绘它的草图.

24. 证明对于所有不同的数 x 和 y 有 $|\sin x-\sin y|<|x-y|$. 提示: 用 $\leqslant$ 代替 $<$ 的同样命题, 是一个熟知的定理的直接推论; 然后简单的补充考虑使 $\leqslant$ 可换为 $<$.

*25. 预言

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx$$

的值是对观察能力的极好检验. f 为连续函数时最易于观察, 但是一旦你对证明这个极限有了正确想法, 则对任意可积的函数很易建立这个极限.

(a) 通过准确计算积分，证明$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b \sin\lambda x dx=0$.

(b) 证明若 s 为$[a,\ b]$上的阶梯函数(此名词出自习题十三，17)，则 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b s(x)\sin\lambda x dx=0$.

(c) 最后，利用习题十三，17 证明，对于任意在$[a,\ b]$上可积的函数 f 都有$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0$.

这个结果就象第 11 题一样，在傅里叶级数理论中起重要作用；它称为黎曼-勒贝格引理.

26. 本题略述了三角函数的经典的处理. 图 24 中画阴影的扇形面积是 $x/2$.

(a) 通过考虑三角形 OAB 和 OCB 证明，若 $0<x<\frac{\pi}{4}$，则

$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\sin x}{2\cos x}.$$

(b) 推断

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

并证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(c) 利用此极限求

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

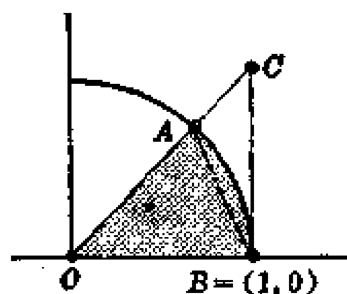


图 24

(d) 利用(b)和(c)，以及 sin 的和角公式，由导数定义出发求 $\sin'(x)$.

27. 在正文中还简短地提到过另一讲述三角函数的途径——由用积分来定义反三角函数出发. 从arctan 开始比较方便(因为此函数对所有 x 有定义). 做此题时假定你从未听说过三角函数.

(a) 令$\alpha(x)=\int_0^x(1+t^2)^{-1}dt$. 证明 α 是奇函数且递增，以及 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)$都存在，二者互为反号. 如果我们定义 $\pi=2\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)$，则 α^{-1} 定义在$(-\pi/2,\pi/2)$上.

(b) 证明$(\alpha^{-1})'(x)=1+[\alpha^{-1}(x)]^2$.

(c) 对于 $x' \neq \pi/2$ 或 $-\pi/2$ 的 $x = k\pi + x'$，定义 $\tan x = \alpha^{-1}(x')$。接着对不等于 $k\pi + \pi/2$ 或 $k\pi - \pi/2$ 的 x 定义 $\cos x = 1/\sqrt{1+\tan^2 x}$，以及 $\cos(k\pi \pm \pi/2) = 0$。先证明 $\cos'(x) = -\tan x \cos x$，然后证明对所有 x 有 $\cos''(x) = -\cos x$。

*28. 若我们乐于假定某些微分方程有解，则还能有另一研究三角函数的途径。实际上，假设存在某个不总是 0 的函数 y_0 满足 $y_0'' + y_0 = 0$。

(a) 证明 $y_0^2 + (y_0')^2$ 是常数，并由此推断或者

$$y_0(0) \neq 0 \text{ 或者 } y_0'(0) \neq 0.$$

(b) 证明存在函数 s 满足 $s'' + s = 0$，以及 $s(0) = 0$ 和 $s'(0) = 1$。提示：以形式为 $ay_0 + by_0'$ 的函数试代 s。

若我们定义 $\sin = s$ 和 $\cos = s'$，则几乎关于三角函数的所有事实都成为明显的了。只有一件事需要下点功夫，即怎样引出数 π。最好是利用第十一章附录的一个习题。

(c) 利用第十一章附录的第 6 题证明 $\cos x$ 对所有 $x > 0$ 的值不可能都是正的，因而存在一个使 $\cos x_0 = 0$ 的最小的 $x_0 > 0$，于是我们可以定义 $\pi = 2x_0$。

(d) 证明 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$。（由于 $\sin^2 + \cos^2 = 1$，我们有 $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$；问题在于确定为什么 $\sin \pi/2$ 是正的。）

(e) 求 $\cos\pi$, $\sin\pi$, $\cos 2\pi$ 和 $\sin 2\pi$。（自然你可以用任何一个和角公式，因为一旦我们知道 $\sin' = \cos$ 和 $\cos' = -\sin$，就能导出这些公式。）

(f) 证明 $\cos$ 和 $\sin$ 是周期为 2π 的周期函数。

29. (a) 在定义 $\sin$ 的全部工作之后，假若发现 $\sin$ 是有理函数，这将使人难堪。证明情况并非如此。（$\sin$ 有个有理函数不可能有的简单性质。）

(b) 证明 $\sin$ 甚至不能用代数方程定义为隐函数；就是说，不存在有理函数 $f_0, \cdots, f_{n-1}$ 使得对所有 x

$$(\sin)^n + f_{n-1}(x)(\sin)^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0.$$

提示：证明 $f_0 = 0$，于是 $\sin x$ 可作为因子提出。余下的因子为 0，也许 2π 的倍数处要除外；但由此可推出对所有 x 它为 0。（为什么？）于是你能用归纳法证明。

*30. 设 ϕ_1 和 ϕ_2 满足

$$\phi_1''+g_1\phi_1=0,$$
$$\phi_2''+g_2\phi_2=0,$$

而且 $g_2>g_1$.

(a) 证明

$$\phi_1''\phi_2-\phi_2''\phi_1-(g_2-g_1)\phi_1\phi_2=0.$$

(b) 证明，若对所有(a,b)内的 x 有 $\phi_1(x)>0$ 和 $\phi_2(x)>0$，则

$$\int_a^b[\phi_1''\phi_2-\phi_2''\phi_1]>0.$$

进而推断

$$[\phi_1'(b)\phi_2(b)-\phi_1'(a)\phi_2(a)]-[\phi_1(b)\phi_2'(b)-\phi_1(a)\phi_2'(a)]>0.$$

(c) 证明在此情况下，不可能有 $\phi_1(a)=\phi_1(b)=0$. 提示：研究 $\phi_1'(a)$ 和 $\phi_1'(b)$ 的符号.

(d) 证明：若在(a,b)上 $\phi_1>0,\phi_2<0$ 或 $\phi_1<0,\phi_2>0$ 或 $\phi_1<0,\phi_2<0$ 也不可能有 $\phi_1(a)=\phi_1(b)=0$.（几乎不用额外的工作就能作出此题.）

本题的最后结果可以陈述如下：若 a 和 b 是 ϕ_1 的相邻的两个零点，则 ϕ_2必在 a,b 间某处有一零点. 这个具有稍微一般的形式的结果，叫做斯图姆比较定理. 作为特例，微分方程

$$y''+(x+1)y=0$$

的任意解在正水平轴上必有彼此相距不超过 π 的零点。

31. 证明，若 $\sin x/2\neq0$，则

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

本题到这一步是数学外行们喜欢的.

用归纳法的证明，依赖于建立公式

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}+\cos(n+1)x=\frac{\sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

这需要在恰当的地方反复利用和角公式，而不需多加考虑. 在习题二十六，13 中将有更适当的推导. 象本章习题中的另外两个结果一

样，这个等式在傅里叶级数的研究中很重要，而且我们还将在习题十八，28 和二十二，17 中用到它.

本章剩下的几个题目对弧长的有关命题作一简单介绍，还将说明如何用弧长来定义三角函数.

*32. 设 f 为$[a, b]$上的连续函数. 若 $P=\{t_0, \cdots, t_n\}$ 是$[a, b]$的一个划分，定义

$$l(f, P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2}.$$

数 $l(f, P)$ 表示内接于 f 的图形的折线的长度（图 25）. 我们定义 f 在$[a, b]$上的长度为对于所有划分 P 的所有 $l(f, P)$ 的最小上界（假如所有这样的 $l(f, P)$ 构成的集是上有界的）.

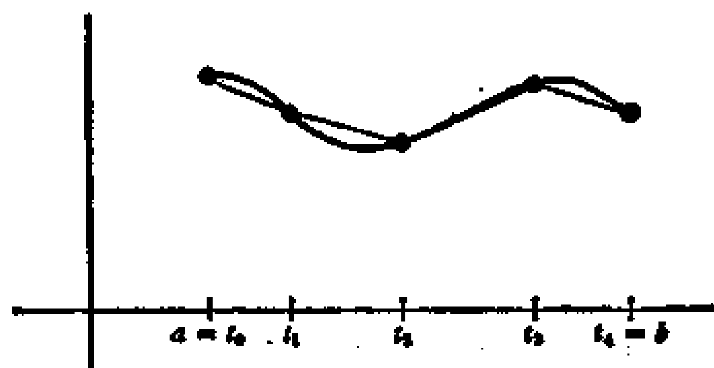


图 25

(a) 若 f 是$[a, b]$上的线性函数，证明 f 的长度是 $(a, f(a))$ 到 $(b, f(b))$ 的距离.

(b) 若 f 不是线性函数，证明有一个$[a, b]$的划分 $P=\{a, t, b\}$，使得 $l(f, P)$ 大于 $(a, f(a))$ 到 $(b, f(b))$ 的距离.（你需用习题四，8.）

(c) 推断在所有$[a, b]$上的满足 $f(a)=c$ 和 $f(b)=d$ 的函数中，线性函数的长度小于其他任何函数的长度.（或，用习惯上的但实在含糊的说法："直线是两点间的最短距离."）

*33. (a) 假设 f' 在$[a, b]$上有界. 若 P 是$[a, b]$的任意划分，证明

$$L(\sqrt{1+(f')^2}, P)\leqslant l(f, P)\leqslant U(\sqrt{1+(f')^2}, P).$$

提示：利用中值定理.

(b) 为什么 $\sup\{L(\sqrt{1+(f')^2}, P)\}\leqslant\sup\{l(f, P)\}$？（这很容易.）

(c) 然后证明 $\sup\{l(f, P)\}\leqslant\inf\{U(\sqrt{1+(f')^2}, P)\}$，并由此证明，

若$\sqrt{1+(f')^2}$在$[a, b]$上可积，则f在$[a, b]$上的长度就是$\int_a^b\sqrt{1+(f')^2}$. 提示：只须证明，若P'和P''是任意两个划分，则$l(f, P')\leqslant U(\sqrt{1+(f')^2}, P'')$即可. 若$P$包含$P'$和$P''$二者的所有点，$l(f, P')$与$l(f, P)$相比如何？

*34. 设$f(x)=\sqrt{1-x^2}$（对于$-1\leqslant x\leqslant 1$），定义$\mathscr{L}(x)$为f在$[x, 1]$上的长度.

(a) 证明

$$\mathscr{L}(x)=\int_x^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

（这实际上是一个如习题十四，17 所定义的广义积分.）

(b) 证明对于$-1<x<1$,

$$\mathscr{L}'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) 定义π为$\mathscr{L}(-1)$. 对于$0\leqslant x\leqslant\pi$，定义$\cos x$为$\mathscr{L}(\cos x)=x$，并定义$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$. 证明对于$0<x<\pi$，$\cos'(x)=-\sin x$和$\sin'(x)=\cos x$.

选题解答

1. (i)

$$\frac{1}{1+\arctan^2(\arctan x)}\cdot\frac{1}{1+\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

(iii)

$$\frac{1}{1+(\tan x\arctan x)^2}\cdot\left(\sec^2 x\arctan x+\frac{\tan x}{1+x^2}\right).$$

2. (i) 0.

(iii) 0.

(v) 0.

6. (a) $\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x.$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x.$

$$\begin{aligned}\sin 3x&=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x\\&=2\sin x\cos^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin x\\&=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x\cos x \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

(b) 因为 $\cos\frac{\pi}{4}>0$ 和

$$0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{4}-1,$$

我们有 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由于 $\sin\frac{\pi}{4}>0$ 和 $\sin^2+\cos^2=1$, 故得 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 以及 $\tan\frac{\pi}{4}=1$. 类似地,

由于 $\cos\pi/6>0$ 和

$$0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos 3\cdot\frac{\pi}{6}=4\cos^3\frac{\pi}{6}-3\cos\frac{\pi}{6},$$

我们有 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由于 $\sin\frac{\pi}{6}>0$, 故由此得

$\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}=\frac{1}{2}$.

8. (a)

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y} \\ &= \frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}} \\ &= \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.\end{aligned}$$

(b) 由(a)我们有

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x+\arctan y) &= \frac{\tan(\arctan x)+\tan(\arctan y)}{1-\tan(\arctan x)\tan(\arctan y)} \\ &= \frac{x+y}{1-xy},\end{aligned}$$

当 $\arctan x$, $\arctan y$和 $\arctan x+\arctan y\neq k\pi+\pi/2$ 时成立. 因为 $-\pi/2<\arctan x$, $\arctan y<\pi/2$,故除去$\arctan x+\arctan y=\pm\pi/2$ (这等价于 $xy=1$)时之外这条件总能满足. 由此等式我们可以推断

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

当 $\arctan x+\arctan y$在$(-\pi/2, \pi/2)$内时成立, 只要 $xy<1$ 这条件总对. (若$x, y>0$而且 $xy>1$. 从而$\arctan x+\arctan y>\pi/2$, 则必须在此式右端加 π, 而若 $x, y<0$, 且 $xy>1$, 从而 $\arctan x+\arctan y<-\pi/2$, 则应减 π.)

10. 第一个公式由下列等式的第一个减去第二个导出:

$$\cos(m-n)x=\cos(mx-nx)=\cos mx\cos(-nx)-\sin mx\sin(-nx)$$
$$=\cos mx\cos nx+\sin mx\sin nx,$$
$$\cos(m+n)x=\cos mx\cos nx-\sin mx\sin nx.$$

其他公式以同法导出.

11. 它可从习题 10 得出, 若 $m\neq n$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n}-\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]-\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n}-\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\}$$
$$=0.$$

但若 $m=n$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1-\cos(m+n)x]dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\pi-\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]-\left[-\pi-\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\}=\pi.$$

其他公式类此证明.

14. (a) 已知

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x$$
$$=2\cos^2 x-1,$$

所以

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

(b) 这些公式可由(a)得到，因为 $\cos x/2\geqslant 0$ 且 $\sin x/2\geqslant 0$(由于 $0\leqslant x\leqslant \pi/2$).

(c)

$$\int_a^b \sin^2 x dx=\int_a^b \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}(b-a)-\frac{1}{4}(\sin 2b-\sin 2a).$$

$$\int_a^b \cos^2 x dx=\int_a^b \frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{4}(\sin 2b-\sin 2a).$$

18. (a) $\arctan 1-\arctan 0=\pi/4$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x-\arctan 0=\pi/2$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\sin x=1$.

20. (a) $(\sin^\circ)'(x)=\frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{\pi}{180}\cos^\circ(x)$.

$(\cos^\circ)'(x)=\frac{\pi}{180}\cdot -\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{-\pi}{180}\sin^\circ(x)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^\circ x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x/180)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin(\pi x/180)}{\pi x/180}=\frac{\pi}{180}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin^\circ\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^\circ x}{x}=\frac{\pi}{180}$.

第十六章　π 是无理数

这一偏离本书主题的短章，是为了说明我们已经能够探讨某些精致的数学问题．整个一章就是给出 π 是无理数的一个初等证明．象许多深刻的定理的“初等”证明一样，我们无法提供证明中许多步骤的想法；然而，一步一步地跟着证明前进还是完全办得到的．

在证明之前必须进行两项考察．第一个涉及函数

$$f_n(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

它显然满足

$$0<f_n(x)<\frac{1}{n!},\quad 对于\ 0<x<1.$$

通过考虑实际乘开 $x^n(1-x)^n$ 所得的式子，揭示出函数 f_n 的一个重要性质．此式 x 的幂的最低次数为 n，而最高次为 $2n$，于是 f_n 可以写成形式

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n}c_ix^i,$$

其中 c_i 是整数．很清楚由此式有

$$f_n(0)=0,\quad 若\ k<n\ 或\ k>2n.$$

其次

$$f_n^{(n)}(x)=\frac{1}{n!}[n!c_n+含\ x\ 的各项]$$

$$f_n^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n!}[(n+1)!c_{n+1}+含\ x\ 的各项]$$

$$\vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x)=\frac{1}{n!}[(2n)!c_{2n}].$$

这表示

$$f_n^{(n)}(0)=c_n,$$
$$f_n^{(n+1)}(0)=(n+1)c_{n+1},$$
$$\vdots$$
$$f_n^{(2n)}(0)=(2n)(2n-1)\cdots(n+1)c_{2n},$$

这里各式右端都是整数. 于是

$$f_n^{(k)}(0)\text{对于所有 } k \text{ 都是整数.}$$

由关系式

$$f_n(x)=f_n(1-x)$$

可推出

$$f_n^{(k)}(x)=(-1)^k f_n^{(k)}(1-x);$$

从而

$$f_n^{(k)}(1)\text{对于所有 } k \text{ 也是整数.}$$

π 是无理数的证明需要一项进一步的考察: 若 a 是任意数, 且 $\varepsilon>0$, 则对于充分大的 n 我们将有

$$\frac{a^n}{n!}<\varepsilon.$$

要证明这一点, 只需注意, 如果 $n\geqslant 2a$, 则

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a}{n+1}\cdot\frac{a^n}{n!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a^n}{n!}.$$

现在设 n_0 是满足 $n_0\geqslant 2a$ 的任意自然数, 则不论值

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

可能等于多少, 接下去的各值都满足

$$\frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{n_0}}{n_0!}$$
$$\frac{a^{(n_0+2)}}{(n_0+2)!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$
$$\vdots$$
$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!}<\frac{1}{2^k}\cdot\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.$$

若 k 大到满足$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!\varepsilon}<2^k$,则

$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!}<\varepsilon,$$

这是所要求的结果. 做了这些考察，我们就为本章的定理作好准备.

定理 1 π 是无理数；事实上，π^2 是无理数.（注意，由 π^2 是无理数可推出 π 是无理数，因为如果 π 是有理数，则 π^2 一定也是有理数.）

证明 假设 π^2 是有理数，则

$$\pi^2=\frac{a}{b}$$

对某整数 a 和 b 成立. 令

(1) $$G(x)=b^n[\pi^{2n}f_n(x)-\pi^{2n-2}f_n''(x)+\pi^{2n-4}f_n^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^nf_n^{(2n)}(x)].$$

注意每一个因子

$$b^n\pi^{2n-2k}=b^n(\pi^2)^{n-k}=b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}=a^{n-k}b^k$$

都是整数. 因为 $f_n^{(k)}(0)$ 和 $f_n^{(k)}(1)$ 都是整数，这就证明

$$G(0)\text{和}G(1)\text{都是整数.}$$

将 G 微分两次得

(2) $$G''(x)=b^n[\pi^{2n}f_n''(x)-\pi^{2n-2}f_n^{(4)}(x)+\cdots+(-1)^nf_n^{(2n+2)}(x)],$$

其中最后一项 $(-1)^nf_n^{(2n+2)}(x)$ 为零. 因此，将(1)和(2)相加给出

(3) $$G''(x)+\pi^2G(x)=b^n\pi^{2n+2}f_n(x)=\pi^2a^nf_n(x).$$

现在令

$$H(x)=G'(x)\sin\pi x-\pi G(x)\cos\pi x,$$

则由(3)

$$H'(x)=\pi G'(x)\cos\pi x+G''(x)\sin\pi x-\pi G'(x)\cos\pi x+\pi^2G(x)\sin\pi x$$

$$=[G''(x)+\pi^2G(x)]\sin\pi x$$

$$=\pi^2a^nf_n(x)\sin\pi x.$$

由微积分第二基本定理，

$$\pi^2\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi xdx=H(1)-H(0)$$

$$=G'(1)\sin\pi-\pi G(1)\cos\pi-G'(0)\sin 0+\pi G(0)\cos 0$$

$$=\pi[G(1)+G(0)].$$

因而

$$\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi xdx \quad 是一整数.$$

另一方面，

$$0<f_n(x)<1/n!, \quad 对于\ 0<x<1,$$

于是

$$0<\pi a^nf_n(x)\sin\pi x<\frac{\pi a^n}{n!}, \quad 对于\ 0<x<1.$$

所以

$$0<\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi xdx<\frac{\pi a^n}{n!}.$$

这一段推理与 n 的值完全无关. 现在设 n 足够大，则

$$0<\pi\int_0^1 a^nf_n(x)\sin\pi xdx<\frac{\pi a^n}{n!}<1.$$

但这是荒谬的，因为这个积分是一个整数，而在 0 和 1 之间不存在整数. 因而我们开始的假设一定不正确：π^2 是无理数. ▌

这个证明是公认不可思议的；也许最不可思议的是 π 进入证明的方式——粗看好象我们在根本没引用 π 的定义的情况下就证明了 π 是无理数. 对证明再次仔细的审查表明，恰好是 π 的一个性

质起了主要作用——

$$\sin(\pi)=0.$$

其证明确实依赖于函数 sin 的一些性质，而且表明使得 $\sin x=0$ 的最小正数 x 是无理数. 事实上，只需要用到 sin 的很少几条性质，即

$$\sin'=\cos,$$
$$\cos'=-\sin,$$
$$\sin(0)=0,$$
$$\cos(0)=1.$$

甚至此表也可简缩；就证明所涉及到的而言，cos 正好可定义为 sin′. 证明中所要用到的 sin 的性质从而可写成

$$\sin''+\sin=0,$$
$$\sin(0)=0,$$
$$\sin'(0)=1.$$

当然，实际这一点也不奇怪，因为，正象我们在前一章中已经看到的，这些性质完整地表示了函数 sin 的特征.

习　题

1. (a) 证明图 1 中三角形 OAB 和 OAC 的面积有如下关系

$$\text{面积 } OAC=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16(\text{面积 } OAB)^2}}{2}}.$$

提示：由方程 $xy=2\cdot(\text{面积 } OAB)$，$x^2+y^2=1$ 中解出 y.

(b) 设 P_m 为内接于单位圆的正 m 边形. 若 A_m 是 P_m 的面积，证明

$$A_{2m}=\frac{m}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-(2A_m/m)^2}}.$$

这个结果可使我们得到 A_{2^n} 的(越来越复杂的)表达式，从 A_4

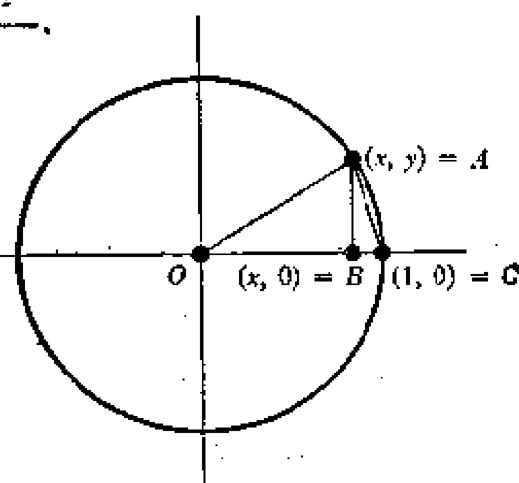


图 1

=2 开始，从而将 π 算到所需要的精确度(按习题八，11)．虽然第十九章会有更好的方法，但按此方法作一点微小改动就可得到 π 的一个很有趣的表达式：

2. (a) 利用

$$\frac{面积(OAB)}{面积(OAC)}=OB,$$

证明若 α_m 为点 O 到 P_m 的一边的距离，则

$$\frac{A_m}{A_{2m}}=\alpha_m.$$

(b) 证明

$$\frac{2}{A_{2^k}}=\alpha_4\cdot\alpha_8\cdot\dots\cdot\alpha_{2^{k-1}}.$$

(c) 利用

$$\alpha_m=\cos\frac{\pi}{m},$$

及公式 $\cos x/2=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$(习题十五，14)，证明

$$\alpha_4=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_8=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha_{16}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},$$

等等．

这与(b)合在一起证明：$2/\pi$ 可写成“无穷乘积”

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\dots;$$

精确地说，这个式子表示，选取充分大的 n，其前 n 个因子之积可要多接近就多接近于 $2/\pi$．这个乘积是在 1579 年由弗朗索伊斯·维特(Francois Viete)发现的，它只是 π 的许多令人惊讶的表达式中的一个，这些表达式中的有些在以后要提到．

第十七章 对数函数和指数函数

在第十五章里，积分曾为函数 sin 和 cos 的初步定义提供了严格的公式表示. 本章中，积分起更重要作用. 有些函数连初步定义都难给出. 例如,考虑函数

$$f(x)=10^x.$$

假设该函数对于所有的 x 有定义,并有一个定义于正 x 的反函数,这个反函数是"以 10 为底的对数",

$$f^{-1}(x)=\log_{10}x.$$

在代数中，10^x 通常只定义于有理数 x，而对于无理数 x，10^x的定义根本不予考虑. 简单地复习一下当 x 为有理数时 10^x 的定义,不但可以说明之所以不予考虑的原因，而且可以回想起一条支配 10^x 定义的重要原则.

符号 10^n 最初只对自然数 n 定义. 这个符号被证明是非常方便的,特别是当很大的数相乘时更为明显,因为

$$10^n\cdot 10^m=10^{n+m}.$$

为了保持这个等式,将 10^x 定义扩充到有理数 x；这个要求确实迫使我们采用通常的定义. 由于我们要求等式

$$10^0\cdot 10^n=10^{0+n}=10^n$$

成立,就必须定义 $10^0=1$;由于要等式

$$10^{-n}\cdot 10^n=10^0=1$$

成立,就须定义 $10^{-n}=1/10^n$;由于要等式

$$\underbrace{10^{1/n}\cdot\cdots\cdot 10^{1/n}}_{n\text{ 次}}=10^{\overbrace{1/n+\cdots+1/n}^{n\text{ 次}}}=10^1=10$$

成立，就须定义 $10^{1/n}=\sqrt[n]{10}$;由于要等式

$$\underbrace{10^{1/n}\cdot\cdots\cdot 10^{1/n}}_{m\text{次}}=10^{\overbrace{1/n+\cdots+1/n}^{m\text{次}}}=10^{m/n}$$

成立，就须定义 $10^{m/n}=(\sqrt[n]{10})^m$.

不幸，就这一问题来说，这个过程无法进行下去．虽然我们有了一个支配定义 10^x 的原则，即须将 10^x 定义得使它满足 $10^{x+y}=10^x10^y$；但对于无理数 x，这个原则提不出一个定义 10^x 的简单的代数方法．由于这个缘故，我们试用某种更隐晦的方式来求一函数 f，使它满足

$$(*)\qquad f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\quad \text{对于所有的 } x \text{ 和 } y.$$

当然，我们只对不恒为零的函数感兴趣，故需加条件 $f(1)\neq 0$．如果我们加上更特殊的条件 $f(1)=10$，则(*)将意味着 $f(x)=10^x$，其中 x 为有理数，并可对于其余的 x 将 10^x 定义为 $f(x)$；一般地说，对于有理数 x，$f(x)$等于$[f(1)]^x$.

如果我们试一下去解决下列显然更难的问题：求一可微函数 f，使它满足

$$f(x+y)=f(x)f(y),\quad \text{对于所有的 } x \text{ 和 } y,$$
$$f(1)=10,$$

就可以给我们提示一条求这样函数的途径．假设这样的函数存在，我们可以试求 f'——从 f 的导数中可以找出定义 f 本身的线索．由于

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h}\\ &=f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}. \end{aligned}$$

于是其答案取决于

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h};$$

现在假设这个极限存在，并以 α 表示. 则

$$f'(x)=\alpha\cdot f(x),\quad \text{对于所有的 } x.$$

f 的导数又用 f 来表示了. 因此，即使 α 能够求出，这种方法看来也会自动失效.

如果我们考察反函数 $f^{-1}=\log_{10}$，整个情况就会改观：

$$\log_{10}'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$=\frac{1}{\alpha\cdot f(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\alpha x}.$$

f^{-1} 的导数几乎达到尽可能的简单. 更有趣的是，在先前所研究的积分 $\int_a^b x^n dx$ 中，只有积分 $\int_a^b x^{-1}dx$ 无法求出. 因为 $\log_{10}1=0$，我们有

$$\frac{1}{\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}dt=\log_{10}x-\log_{10}1=\log_{10}x.$$

由上式可以想到，应将 $\log_{10}x$ 定义为 $(1/\alpha)\int_1^x t^{-1}dt$. 这里的困难是 α 为未知. 为了避免这个困难，我们定义

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{t}dt,$$

并希望这个积分是以某数为底的对数，而这个底可以以后确定. 总之，从数学观点来看，用这种方式定义的函数比 $\log_{10}$ 更合理. $\log_{10}$ 之所以有用是因为在阿拉伯记数法中，数 10 起重要作用（根本的原因是由于我们有十个手指），而函数 log 为一个非常简单但又无法用我们已知的任何函数来表示的积分提供了一个记号.

定义

若 $x>0$，

则 $$\log x=\int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

log 的图形如图 1 所示. 注意, 若 $x>1$, 则 $\log x>0$, 若 $0<x<1$, 则 $\log x<0$, 因为, 根据我们的约定

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt=-\int_x^1 \frac{1}{t}dt<0.$$

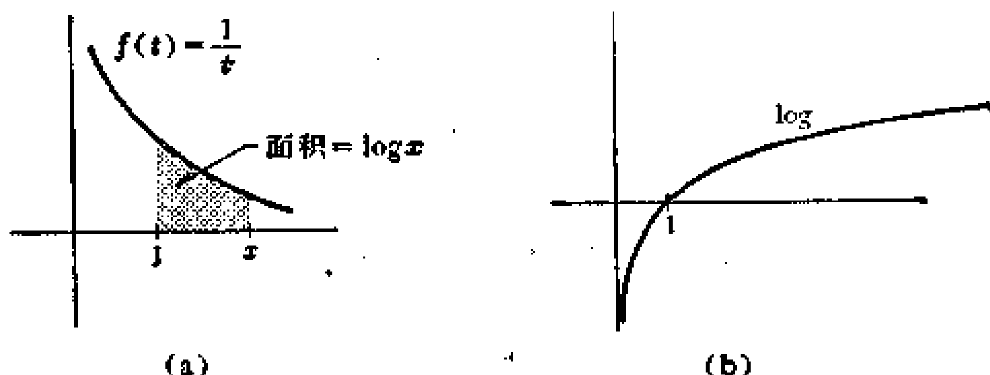


图 1

对于 $x\leqslant 0$, 用这种方法无法求出数 $\log x$, 因为 $f(t)=1/t$ 在 $[x,1]$ 上无界.

由下列定理可以看出, 我们采用记号"log"是有道理的.

定理 1 若 $x, y>0$, 则

$$\log(xy)=\log x+\log y.$$

证明 首先注意, 根据微积分的基本定理, $\log'(x)=1/x$. 现在任取一数 $y>0$, 并令

$$f(x)=\log(xy).$$

则

$$f'(x)=\log'(xy)\cdot y=\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x}.$$

于是 $f'=\log'$. 这意味着有一数 c 满足

$$f(x)=\log x+c, \quad 对于所有的 x>0,$$

即

$$\log(xy)=\log x+c, \quad 对于所有的 x>0.$$

其中 c 可如下求得. 当 $x=1$ 时, 我们有

$$\log(1\cdot y)=\log 1+c=c.$$

于是

$$\log(xy)=\log x+\log y,\quad 对于所有的\ x>0.$$

因该式对于所有的 $y>0$ 成立，于是定理得证.

推论 1 若 n 为一自然数，且 $x>0$，则

$$\log(x^n)=n\log x.$$

证明 留给你们做(用归纳法).

推论 2 若 $x, y>0$，则

$$\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log x-\log y.$$

证明 本推论可由下式得到

$$\log x=\log\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=\log\left(\frac{x}{y}\right)+\log y.$$

定理 1 提供了关于 log 的图形的重要信息. 函数 log 显然是上升的，但因 $\log'(x)=1/x$，故当 x 变大时，其导数变得非常小，从而 log 之增长越来越慢. 不易马上看出，在 R 上 log 是有界的还是无界的. 但注意到，对于任一自然数 n，

$$\log(2^n)=n\log 2\quad(且\ \log 2>0);$$

由此可见，事实上 log 没有上界. 同样地

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right)=\log 1-\log 2^n=-n\log 2;$$

因此，在 $(0, 1)$ 上 log 没有下界. 因为 log 是连续的，它实际上可取所有的值. 因此，函数 $\log^{-1}$ 的定义域是 R. 这个重要函数有一专门的名称，很快就可以看到，这个名称是取得恰如其分的.

定义

> "指数函数"exp 就是由 $\log^{-1}$ 定义的函数.

exp 的图形如图 2 所示. 因为 $\log x$ 只当 $x>0$ 时有定义，故恒有 $\exp(x)>0$. 函数 exp 的导数容易求出.

定理 2 对于所有的数 x

$$\exp'(x)=\exp(x).$$

证明 $\exp'(x)=(\log^{-1})'(x)$

$$=\frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\log^{-1}(x)}}$$

$$=\log^{-1}(x)=\exp(x).$$

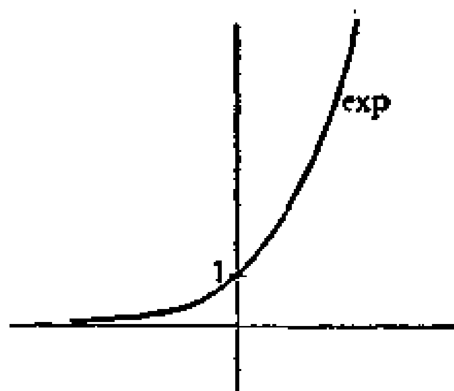


图 2

exp 的第二个重要性质是定理 1 的一个简单的推论.

定理 3 若 x 与 y 为任意两数，则

$$\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y).$$

证明 设 $x'=\exp(x)$ 和 $y'=\exp(y)$，则

$$x=\log x',$$

$$y=\log y'.$$

于是

$$x+y=\log x'+\log y'=\log(x'y').$$

上式意味着

$$\exp(x+y)=x'y'=\exp(x)\cdot\exp(y).$$

这定理和本章开头的讨论都暗示了 exp(1)是特别重要的. 事实上，对于这个数有一专门记号.

定义

$$\boxed{e=\exp(1)}$$

该定义等价于下列方程

$$1=\log e=\int_1^e\frac{1}{t}dt.$$

如图 3 所示，因为 $1\cdot(2-1)$是 $f(t)=1/t$ 在$[1,2]$上的一个上和，

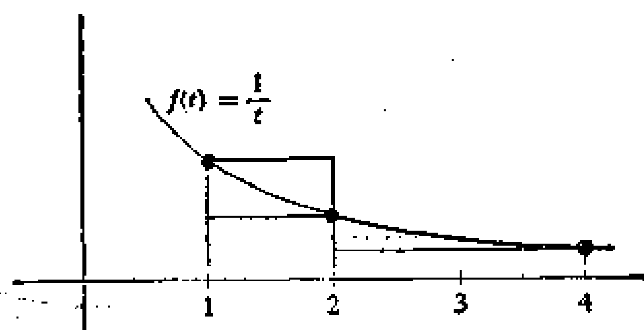


图 3

所以

$$\int_1^2 \frac{1}{t}dt<1,$$

而因为$\frac{1}{2}(2-1)+\frac{1}{4}(4-2)=1$是$f(t)=\frac{1}{t}$在[1，4]上的一个下和，所以

$$\int_1^4 \frac{1}{t}dt>1,$$

于是

$$\int_1^2 \frac{1}{t}dt<\int_1^e \frac{1}{t}dt<\int_1^4 \frac{1}{t}dt,$$

由此可见

$$2<e<4.$$

在第十九章里，我们将求 e 的更好的近似值，并证明 e 为无理数(比证明 π 为无理数容易得多！).

注意到本章开头的内容，方程

$$\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$$

意味着

$$\begin{aligned}\exp(x)&=[\exp(1)]^x\\&=e^x，对于所有的有理数 x.\end{aligned}$$

因 exp 定义于所有的 x，且对于有理数 x，$\exp(x)=e^x$，故对于所有的 x 将 e^x **定义**为 $\exp(x)$，与我们先前采用指数记号是一致的.

定义

> 对于任意的数x,
> $$e^x=\exp(x).$$

现在也许弄清了"指数函数"这个术语. 我们已经成功地定义了对于任意(甚至是无理数)指数 x 的 e^x. 虽然我们尚未给 $a\neq e$ 时的 a^x 下定义,但下其定义时有一合理的原则可循. 若 x 为有理数,则

$$a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a},$$

因最后面的式子定义于所有的 x, 故可用来定义 a^x.

定义

> 若 $a>0$, 则对于任意实数 x,
> $$a^x=e^{x\log a}.$$
> (若 $a=e$, 则此定义显然与前一定义相同.)

为了使 $\log a$ 有定义, 须令 $a>0$. 这个限制并不多余, 因为, 例如我们甚至无法指望

$$(-1)^{1/2}\overset{?}{=}\sqrt{-1}$$

有定义.(当然,根据过去的定义,对于某些有理数 x, 符号 a^x 是有意义的;例如

$$(-1)^{1/3}=\sqrt[3]{-1}=-1.)$$

我们对 a^x 所下的定义满足

$$(e^x)^y=e^{xy}, \text{ 对于所有的 } x \text{ 和 } y.$$

正如我们所期望的那样, 当 e 用任何数 $a>0$ 来代替时, 上式仍能成立,其证明包含适当地解释术语. 同时我们将证明 a^x 的其他重要性质.

定理 4 若 $a>0$, 则

(1) $(a^b)^c=a^{bc}$ 对于所有的 b, c.

(注意到 a^b 自然是正的，故 $(a^b)^c$ 有定义)；

(2) $a^1=a$ 和 $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$，对于所有的 x,y.

(注意，(2)意味着 a^x 的定义与我们过去对于有理数 x 所下的 a^x 的定义相一致.)

证明 (1) $$(a^b)^c=e^{c\log a^b}=e^{c\log(e^{b\log a})}$$
$$=e^{c(b\log a)}=e^{cb\log a}=a^{bc}.$$

(这一串等式的每一步都是由我们刚下的定义或 $\exp=\log^{-1}$ 这个事实得出的.)

(2) $$a^1=e^{1\log a}=e^{\log a}=a,$$
$$a^{x+y}=e^{(x+y)\log a}=e^{x\log a+y\log a}=e^{x\log a}\cdot e^{y\log a}$$
$$=a^x\cdot a^y.$$

图 4 显示了对于几种不同 a 的 $f(x)=a^x$ 的图形. 这种函数的图形依 $a<1$, $a=1$ 或 $a>1$ 而定. 若 $a=1$，则 $f(x)=1^x=1$. 假设 $a>1$. 在此情况下 $\log a>0$. 于是，若

$$x<y,$$

则 $$x\log a<y\log a,$$

于是 $$e^{x\log a}<e^{y\log a},$$

即 $$a^x<a^y.$$

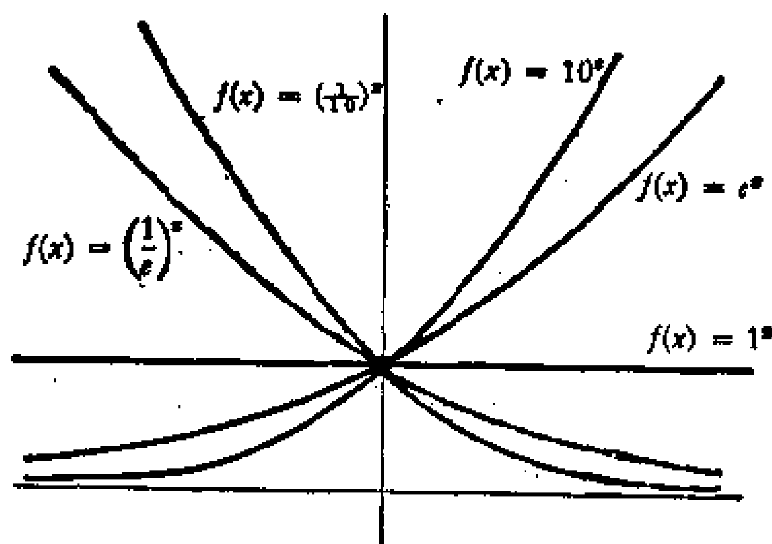


图 4

因此，函数 $f(x)=a^x$ 是递增的．另一方面，若 $0<a<1$，则 $\log a<0$，同理可证函数 $f(x)=a^x$ 是递减的．无论在那一种情形中，若 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则 $f(x)=a^x$ 是一一的．因为 exp 取所有的正值，故亦容易看到 a^x 取所有的正值．于是它的反函数定义于所有的正数，并取所有的值．设 $f(x)=a^x$，则 f^{-1} 就是通常用 $\log_a$ 表示的函数(图 5)．

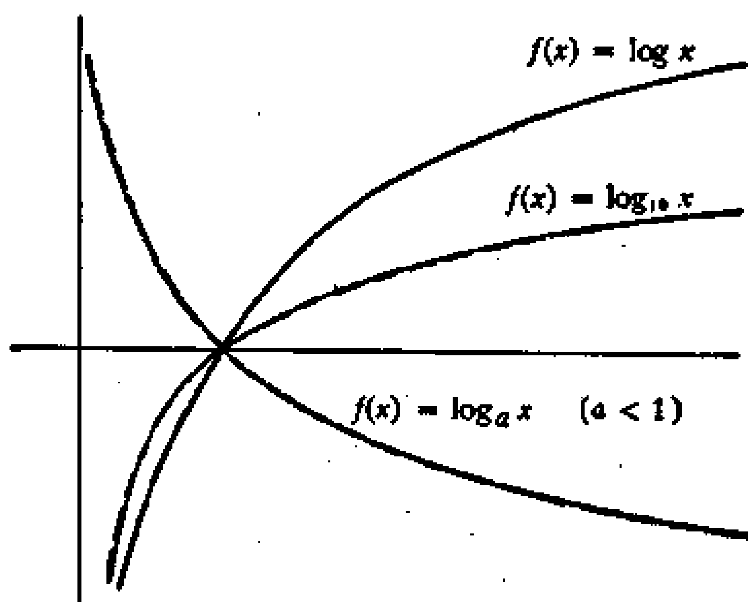


图 5

正象 a^x 可用 exp 表示那样，$\log_a$ 也可用 log 表示．实际上，若

$$y=\log_a x,$$

则
$$x=a^y=e^{y\log a},$$

于是
$$\log x=y\log a,$$

或
$$y=\frac{\log x}{\log a}.$$

换言之，
$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}.$$

$f(x)=a^x$ 和 $g(x)=\log_a x$ 的导数也都容易求出：

$$f(x)=e^{x\log a},\quad \text{于是}\ f'(x)=\log a\cdot e^{x\log a}=\log a\cdot a^x,$$

$$g(x)=\frac{\log x}{\log a},\quad \text{于是}\quad g'(x)=\frac{1}{x\log a}.$$

象下列更复杂的函数

$$f(x)=g(x)^{h(x)}$$

也容易求其微分，如果你记得，根据定义，

$$f(x)=e^{h(x)\log g(x)};$$

由链式法则

$$f'(x)=e^{h(x)\log g(x)}\cdot\left[h'(x)\log g(x)+h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

$$=g(x)^{h(x)}\cdot\left[h'(x)\log g(x)+h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right].$$

把这个公式记住是毫无意义的——只要将上述原理应用于各具体问题即可，但记住该导数的头一个因子为 $g(x)^{h(x)}$ 确是有用的.

上式中有一特殊情形值得记住. 函数 $f(x)=x^a$ 先前只对于有理数 a 定义，我们现在可将函数 $f(x)=x^a$ 对任意数 a 定义，并求其导数；其结果正如我们所期望的：

$$f(x)=x^a=e^{a\log x},$$

于是

$$f'(x)=\frac{a}{x}\cdot e^{a\log x}=\frac{a}{x}\cdot x^a=ax^{a-1}.$$

指数函数的代数运算稍加练习，就成为人们的第二本性——只要记得应当遵守的全部规则实际上也就遵守了. exp 的基本性质仍然是定理 2 和 3 中所述的：

$$\exp'(x)=\exp(x),$$

$$\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y).$$

事实上，这两性质中的任何一个都接近于函数 exp 的特征. 当然，exp 不是满足 $f'=f$ 的唯一函数 f，因若 $f=ce^x$，则 $f'(x)=ce^x$

$=f(x)$；然而，只有这些函数具有这种性质.

定理 5 若 f 是可微的，且

$$f'(x)=f(x), \quad \text{对于所有的 } x,$$

则有一数 c 使得

$$f(x)=ce^x, \quad \text{对于所有的 } x.$$

证明 设

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x},$$

（可以这样假设，因对于所有的 x，$e^x\neq 0$.）则

$$g'(x)=\frac{e^x f'(x)-f(x)e^x}{(e^x)^2}=0.$$

因此，有一数 c 使得

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}=c, \quad \text{对于所有的 } x.$$

对于 exp 的第二个基本性质，讨论起来更复杂. 函数 exp 显然不是满足下式的唯一函数 f

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y).$$

事实上，$f(x)=0$ 或具有 $f(x)=a^x$ 形式的任何函数也满足上式. 但其真相比这复杂得多——虽有无穷多个其他函数满足这个性质，但若不用更高深的数学，想证明在已经提到的函数之外即使还有一个满足上式的函数，也是不可能的！由于这个缘故，10^x 的定义是很难下的：有无穷多个函数 f 满足

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),$$
$$f(1)=10,$$

但它们都**不是**函数 $f(x)=10^x$！但有一件事是真的——任何满足

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

的**连续**函数 f 必定具有 $f(x)=a^x$ 或 $f(x)=0$ 的形式（第 27 题指出证明的途径，并对具有这种性质的不连续函数也略提一下.）

除定理 2 与 3 中所述的两个基本性质之外，函数 exp 有一个

非常重要的更深一层的性质——exp“比任何多项式增大得快.”换言之，

定理 6 对于任何自然数 n，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty.$$

证明 证明分下列几步.

第一步. 对于所有的 x，$e^x>x$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$（该式可以看成为 $n=0$ 的情形）.

为了证明这一论断（对于 $x\leqslant 0$，该论断显然成立），只须证明

$$x>\log x,\ 对于所有的\ x>0.$$

若 $x<1$，上式显然成立，因为 $\log x<0$. 若 $x>1$，则（图 6）$x-1$ 是 $f(t)=1/t$ 在 $[1,x]$ 上的一个上和，故 $\log x<x-1<x$.

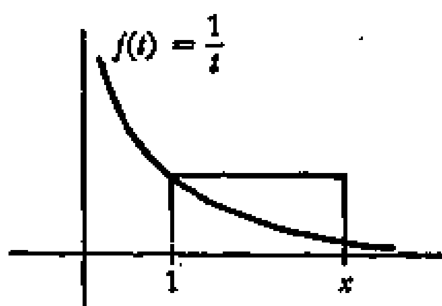


图 6

第二步. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$.

为了证明上式，注意到

$$\frac{e^x}{x}=\frac{e^{x/2}\cdot e^{x/2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot e^{x/2}.$$

根据第一步，括号内的表达式比 1 大，且 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x/2}=\infty$；可见 $\lim\limits_{x\to\infty}e^x/x=\infty$.

第三步. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$.

注意到

$$\frac{e^x}{x^n}=\frac{(e^{x/n})^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n\cdot n^n}=\frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

根据第二步，括号内的表达式可以任意增大，故其 n 次幂当然可以任意增大.

现在可以仔细研究下列很有趣的函数：$f(x)=e^{-1/x^2}$，$x\neq 0$. 我们有

$$f'(x)=e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}.$$

因此
$$f'(x)<0,\ \text{对于}\ x<0,$$
$$f'(x)>0,\ \text{对于}\ x>0,$$

于是对于负的 x，f 是递减的，而对于正的 x，f 是递增的. 另外. 若 $|x|$ 很大，则 x^2 很大，于是 $-1/x^2$ 接近 0，从而 e^{-1/x^2} 接近 1（图 7）。

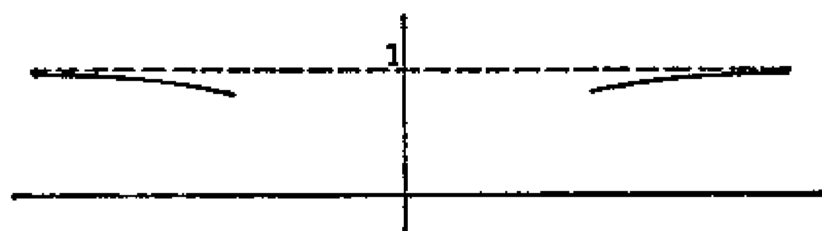


图 7

f 在 0 附近的情况更为有趣. 如果 x 很小，则 $1/x^2$ 很大，于是 e^{1/x^2} 很大，从而 $e^{-1/x^2}=1/(e^{1/x^2})$ 很小. 这一论证，若用 ε 和 δ 适当陈述，就能证明

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}=0.$$

因此，如果我们定义

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则该函数 f 是连续的（图 8）. 其实，f 在 0 处实际上是可微的：事

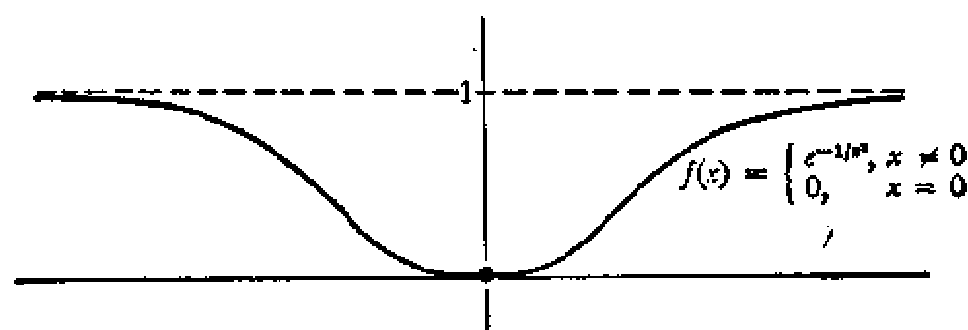


图 8

实上

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}}{e^{(1/h)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{(x^2)}}.$$

我们已经知道

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty;$$

下式更能成立

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{(x^2)}}{x}=\infty,$$

这意味着

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{(x^2)}}=0.$$

于是

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

我们现在可以求

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}\cdot\frac{2}{h^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot e^{-1/h^2}}{h^4}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{h^4}}{e^{1/h^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{e^{(x^2)}};$$

用同前面一样的方法可证 $f''(0)=0$. 于是

$$f''(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}\cdot\dfrac{-6}{x^4}+e^{-1/x^2}\cdot\dfrac{4}{x^6}, & x\neq 0\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

这个论证过程可以继续下去. 事实上, 用归纳法可证(第 29 题)对任意 k 有 $f^{(k)}(0)=0$. 函数 f 在 0 处极其平坦, 而且很快趋于 0, 这使它能掩盖许多其他函数的不规则性. 例如(图 9), 假设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

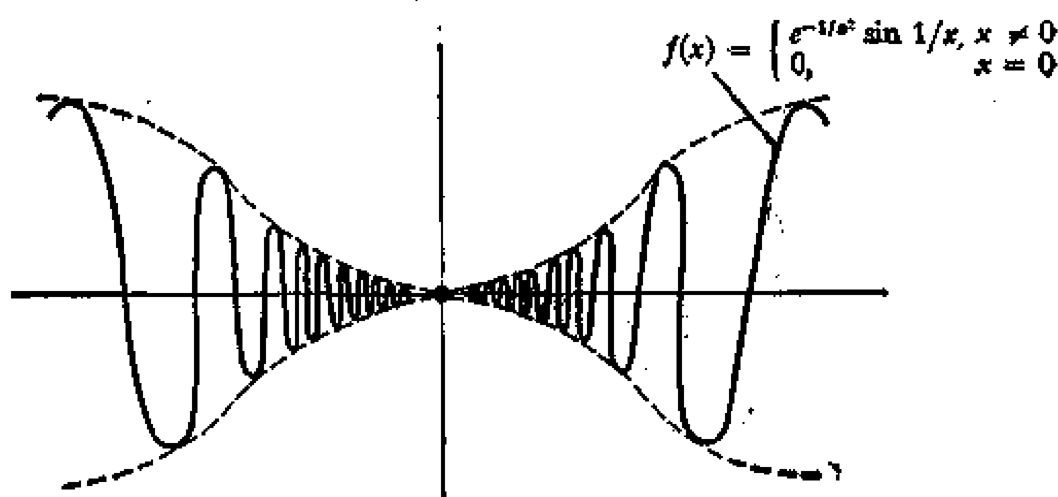


图 9

可以证明(第 30 题)这个函数对所有 k 也有 $f^{(k)}(0)=0$. 这个例子大概比任何其他例子都更令人惊异地表明, 一个很不好的函数, 也能无限次可微. 在第四部分中, 我们将研究对一个函数所要加的更多的限制条件, 这些条件将终于排除这种性态.

习　题

1. 微分下列各函数(记住 a^{b^c} 总是表示 $a^{(b^c)}$).

　(i) $f(x)=e^{e^{e^{e^x}}}$.

　(ii) $f(x)=\log(1+\log(1+\log(1+e^{1+e^{1+x}})))$.

(iii) $f(x)=(\sin x)^{\sin(\sin x)}$.

(iv) $f(x)=e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}$.

(v) $f(x)=\sin x^{\sin x^{\sin x}}$.

(vi) $f(x)=\log_{(e^x)}\sin x$.

(vii) $f(x)=\left[\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right]^{\log(\sin e^x)}$.

(viii) $f(x)=(\log(3+e^4))e^{4x}+(\arcsin x)^{\log 3}$.

(ix) $f(x)=(\log x)^{\log x}$.

(x) $f(x)=x^x$.

2. 绘出下列各函数的图形.

(a) $f(x)=e^{x+1}$.

(b) $f(x)=e^{\sin x}$.

(c) $f(x)=e^x+e^{-x}$.

(d) $f(x)=e^x-e^{-x}$.

（将这两个图形和exp及1/exp的图形相比较.）

(e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$.

3. 用罗必塔法则求下列各题的极限.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^2}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-x^2/2-x^3/6}{x^3}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^3}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+x^2/2}{x^2}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+x^2/2}{x^3}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+x^2/2-x^3/3}{x^3}$.

4. 函数

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1-\frac{2}{e^{2x}+1},$$

分别称为**双曲正弦**，**双曲余弦**和**双曲正切**（通常读作 sinch，cosh 和 tanch）．这些函数和相应的普通三角函数有许多相似之处．头一个相似之处如图 10 所示；关于图 10(b) 所示的区域的面积确实等于 $x/2$ 之证明，最好推迟到下一章进行，那时我们将讨论计算积分的方法．其余相似之处将在下列三题中讨论，但那些更深刻的相似之处要等到第二十六章讨论．如果你未做第 2 题，绘出函数 sinh，cosh，和 tanh 的图形．

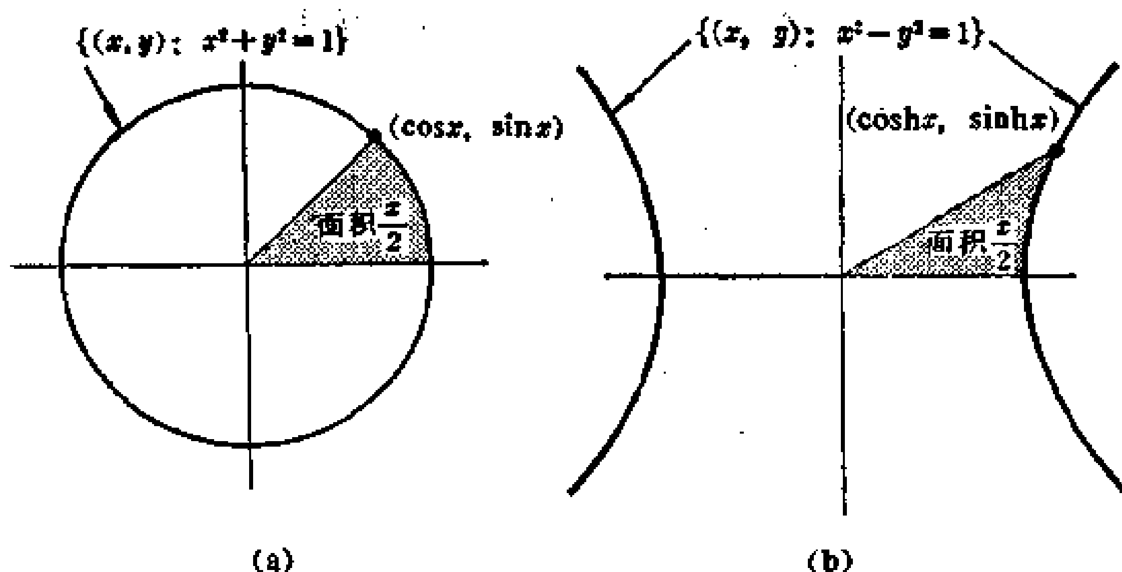


图　10

5. 证明

   (a) $\cosh^2-\sinh^2=1$.

   (b) $\tanh^2+1/\cosh^2=1$.

   (c) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$.

   (d) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$.

   (e) $\sinh'=\cosh$.

   (f) $\cosh'=\sinh$.

   (g) $\tanh'=\dfrac{1}{\cosh^2}$.

6. 函数 sinh 和 tanh 是一一的；它们的反函数，用 argsinh 和 arg tanh（双曲正弦和正切的"自变数"）表示，各在 $\mathbf{R}$ 和 $(-1,\ 1)$ 上定义．若将 cosh 限制在 $[0,\ \infty)$ 上，它就有一个定义于 $[1,\ \infty)$ 上的反函数，用

argcosh 表示．用第 5 题的公式证明

(a) $\sinh(\cosh^{-1}x)=\sqrt{x^2-1}$.

(b) $\cosh(\sinh^{-1}x)=\sqrt{1+x^2}$.

(c) $(\sinh^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(d) $(\cosh^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, 对于 $x>1$.

(e) $(\tanh^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 对于 $|x|<1$.

7. (a) 求 $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ 和 $\tanh^{-1}$ 的显式公式（对用 y 表示的 x 解方程 $y=\sinh^{-1}x$, 等等）.

(b) 求

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx, \text{ 对于 } a,b>1 \text{ 或 } a,b<1,$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}dx, \text{ 对于 } |a|,|b|<1.$$

将你的第三个积分的答案和写成

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]$$

后得到的积分答案相比较.

8. 求

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}a^x$, 对于 $0<a<1$.（回忆其定义！）

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(\log x)^n}$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\log x)^n}{x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to0^+}x(\log x)^n$. 提示：$x(\log x)^n=\dfrac{(-1)^n\left(\log\dfrac{1}{x}\right)^n}{\dfrac{1}{x}}$.

(e) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

9. 绘出 $f(x)=x^x$（对于 $x>0$）的图形.（用第 8 题(e).）

10. (a) 求 $f(x)=e^x/x^n$（对于 $x>0$）的最小值，并推断出，对于 $x>n$ 有

$f(x)>e^n/n^n$.

(b) 用式子 $f'(x)=e^x(x-n)/x^{n+1}$ 证明，对于 $x>n+1$ 有 $f'(x)>e^{n+1}/(n+1)^{n+1}$，并由此得出 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$的另一证法.

11. 绘出 $f(x)=e^x/x^n$ 的图形.

12. (a) 求$\lim_{y\to 0}\log(1+y)/y$.（虽然你能用罗必塔法则，但那样做是愚蠢的.）

(b) 求$\lim_{x\to\infty}x\log(1+1/x)$.

(c) 证明 $e=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$.

(d) 证明 $e^a=\lim_{x\to\infty}(1+a/x)^x$.（只要做一些代数运算，即可由(c)得出这个结果.）

*(e) 证明 $\log b=\lim_{x\to\infty}x(b^{1/x}-1)$.

13. 绘出 $f(x)=(1+1/x)^x$（对于 $x>0$）的图形.（用第 12 题(c).）

14. 若银行每年付息百分之 a，则最初的投资 I 过一年后可得 $I(1+a/100)$. 若银行用复利（即将所生的利息作为第二年计息的本金的一部分），则最初的投资过 n 年后可得 $I(1+a/100)^n$. 现在假设每年付息两次，过 n 年后最终的数额，哎呀，不是 $I(1+a/100)^{2n}$，而只有 $I(1+a/200)^{2n}$——虽然利息每年付两次，但因每半年的利息为 $a/2$，故在每次计算时利息必须减半. 这个数额虽比 $I(1+a/100)^n$ 大，但并不是大得那样多. 假设现在银行实行连续复利，即银行考虑，当一年计息 k 次时其投资将产生多少，然后取所有这些数的最小上界. 1 元的最初投资过一年后可得多少？

15. 设 $f(x)=\log|x|$，对于 $x\neq 0$. 证明 $f'(x)=1/x$，对于 $x\neq 0$.

*16. 证明：若 $f'=cf$ 其中 c 为某个数，则 $f(x)=ke^{cx}$ 其中 k 为某个数.

*17. 放射性物质以与现存的数量成正比的速率缩减（因为所有原子有相等的衰变概率，总的衰变与尚存的原子数目成正比）. 设 $A(t)$为在时刻 t 的数量，这意味着对于某个 c（它表示一个原子将衰变的概率）$A'(t)=cA(t)$.

(a) 求以在时刻 0 存在的数量 $A_0=(0)$表示的 $A(t)$.

(b) 证明：存在一个具有 $A(t+\tau)=A(t)/2$ 性质的数 τ（放射性元素的“半衰期”）.

*18. 牛顿冷却定律称，物体冷却速度与其温度及周围介质的温度之差成正比。假设周围介质的温度为一常数 M，求此物体在时刻 0 的温度 T_0 表示的物体在时刻 t 的温度。提示：解表示牛顿定律的微分方程时，记住 $T'=(T-M)'$.

*19. 证明：若 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $f=0$.

*20. 求所有满足 $f'(t)=f(t)+\int_0^1 f(t)dt$ 的函数 f.

21. (a) 证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\leqslant e^x，对于 x\geqslant 0.$$

提示：对 n 用归纳法，并比较其导数。

(b) 给出一个关于 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x/x^n=\infty$ 的新证法。

22. 应用适当形式的罗必塔法则(见习题十一，38)给出关于这个事实的另一种证法。

*23. 一点 P 沿长为 10^7 的线段 AB 运动，另一点 Q 沿一条无穷长的半直线运动(图 11)。P 的速度总等于 P 至 B 的距离(换言之，若 $P(t)$ 为 P 在时刻 t 的位置，则 $P'(t)=10^7-P(t)$)，而 Q 作匀速 $Q'(t)=10^7$ 运动。经过时间 t 后，Q 所经过的距离，定义为在时刻 t，P 至 B 的距离的纳皮尔对数。于是

$$10^7t=\mathrm{Naplog}[10^7-P(t)].$$

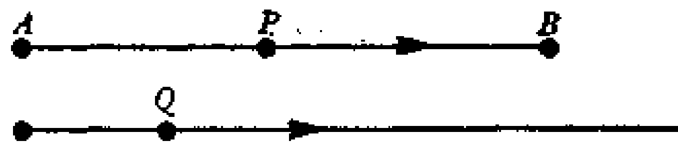


图 11

上式是纳皮尔(1550—1617)在 1614 年发表的*Mirifici logarithmonum canonis description*(《对数的奇妙规律的说明》)中给出的对数定义；在应用指数之前发表了这篇文章。之所以选用 10^7 这个数，是因为纳皮尔表(供天文与航行计算使用)列出了角的正弦的对数，而可用的最好的表列出七位数，并且纳皮尔想避免分数。证明

$$\mathrm{Naplog}\,x=10^7\log\frac{10^7}{x}.$$

提示：用与第 18 题相同的技巧解关于 P 的方程。

*24. (a) 绘出 $f(x)=(\log x)/x$ 的图形（特别注意接近 0 与∞时的性态）。

(b) e^{π} 与 π^{e} 哪一个大？

(c) 证明：若 $0<x<1$ 或 $x=e$，则满足 $x^y=y^x$ 的唯一的数 y 是 $y=x$；但若 $x>1, x\neq e$，则正好有一数 $y\neq x$ 满足 $x^y=y^x$；另外，若 $x<e$，则 $y>e$，而若 $x>e$ 则 $y<e$。（用(a)中的图形来解释这些内容！）

(d) 证明：若 x 与 y 为自然数且 $x^y=y^x$，则 $x=y$ 或 $x=2$，$y=4$，或 $x=4, y=2$。

(e) 证明：所有满足 $x^y=y^x$ 的数偶(x,y)的集合，由一条曲线和一条同它相交的直线组成；求其交点并绘出其草图。

**(f) 对于 $1<x<e$ 设 $g(x)$为满足 $x^{g(x)}=g(x)^x$ 的唯一$>e$ 的数. 证明 g 可微.（最好分别考虑两个函数，

$$f_1(x)=\frac{\log x}{x},\quad 0<x<e$$

$$f_2(x)=\frac{\log x}{x},\quad e<x$$

并用 f_1 和 f_2 来表示 g. 如果你正确地做了这一部分，你应能证明

$$g'(x)=\frac{[g(x)]^2}{1-\log g(x)}\cdot\frac{1-\log x}{x^2}.\ )$$

*25. 本题应用第十一章附录的材料.

(a) 证明 exp 是凸的，log 是凹的.

(b) 证明：若 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ 并且所有的 $p_i>0$，则

$$z_1^{p_1}\cdot\cdots\cdot z_n^{p_n}<p_1z_1+\cdots+p_nz_n.$$

（应用第十一章附录中的第 8 题.）

(c) 推出关于 $G_n\leqslant A_n$ 的另一证法（习题二，20）.

26. 假设对于所有的 x 和 y，f 满足 $f'=f$ 并且 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. 证明 $f=\exp$ 或 $f=0$.

*27. 证明：若对于所有的 x 和 y，f 是连续的并且 $f(x+y)=f(x)f(y)$，则对于所有的 x，或者 $f=0$ 或者 $f(x)=[f(1)]^x$. 提示：对有理数 x 证明 $f(x)=[f(1)]^x$，然后应用习题八，6. 本题与习题八，7 密切相关，而习题八，7 末尾提到的信息可用来证明：存在不连续函数 f 满足 $f(x+y)$

$=f(x)f(y)$.

*28. 证明：若 f 为定义在正实数上的连续函数，且对于所有正的 x 和 y 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，则对于所有的 $x>0$，$f=0$ 或 $f(x)=f(e)\log x$. 提示：考虑 $g(x)=f(e^x)$.

*29. 证明：若 $f(x)=e^{-1/x^2}$，其中 $x\neq 0$，且 $f(0)=0$，则对于所有的 k 有 $f^{(k)}(0)=0$.

*30. 证明：若 $f(x)=e^{-1/x^2}\sin 1/x$，其中 $x\neq 0$，且 $f(0)=0$，则对于所有的 k 有 $f^{(k)}(0)=0$.

31. (a) 证明：若 α 是方程

(*) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$

的根，则函数 $y(x)=e^{\alpha x}$ 满足微分方程

(**) $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$.

(b) 证明：若 α 为(*)的二重根，则 $y(x)=xe^{\alpha x}$ 也满足(**). 提示：记住若 α 为多项式方程 $f(x)=0$ 的二重根，则 $f'(\alpha)=0$.

*(c) 证明：若 α 为(*)的 r 重根，则当 $0\leqslant k\leqslant r-1$ 时 $y(x)=x^ke^{\alpha x}$ 是解. 若(*)有 n 个实数根（计及根的重数），则(c)给出(**)的 n 个解 $y_1, \cdots, y_n$.

(d) 证明在此情形中，函数 $c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ 也满足(**). 在此情形中，只有这些才是(**)的解，这是一个定理. 第16题和下面两题证明本定理的特殊情形，而一般情形将在习题十九，17中考虑. 在第二十六章中，我们将看到，当(*)没有 n 个实数根时该怎么办.

*32. 假设 f 满足 $f''-f=0$ 和 $f(0)=f'(0)=0$. 证明 $f=0$ 如下.

(a) 证明 $f^2-(f')^2=0$.

(b) 假设对于某区间 (a,b) 内所有的 x，$f(x)\neq 0$. 证明：对于 (a,b) 内所有的 x，或者 $f(x)=ce^x$ 或者 $f(x)=ce^{-x}$，其中 c 为某一常数.

**(c) 如果，比方说，对于 $x_0>0$ 有 $f(x_0)\neq 0$，则将有一数 a 使得 $0\leqslant a<x_0$ 和 $f(a)=0$，而对于 $a<x<x_0$ 有 $f(x)\neq 0$. 为什么？应用这个事实和(b)推出一个矛盾.

*33. (a) 证明：若 f 满足 $f''-f=0$，则 $f(x)=ae^x+be^{-x}$，对于某个 a 和 b.（先求出用 $f(0)$ 和 $f'(0)$ 表示的 a 和 b，然后应用第32题.）

(b) 还要证明 $f=a\sinh+b\cosh$，对于某个（别的）a 和 b.

34. 求所有满足下列等式的函数 f.

(a) $f^{(n)}=f^{(n-1)}$.

(b) $f^{(n)}=f^{(n-2)}$.

*35. 本题和习题十五，28 成对，简单介绍：由微分方程 $f'=f$ 有一个非零的解这个假设出发，来论述指数函数．

(a) 假设有一函数 $f\neq 0$ 满足 $f'=f$．通过考虑函数 $g(x)=f(x_0+x)\cdot f(x_0-x)$（其中 $f(x_0)\neq 0$），证明对于每个 x 有 $f(x)\neq 0$．

(b) 证明：存在一函数 f 满足 $f'=f$ 和 $f(0)=1$．

(c) 对于这个 f，通过考虑函数 $g(x)=f(x+y)/f(x)$，证明 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$．

(d) 证明 f 是一一的以及 $(f^{-1})'(x)=1/x$．

36. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)/g(x)=\infty$，则称函数 f 比 g **增长得快．例如，exp 比任何多项式函数都增长得快．假设 $g_1, g_2, g_3, \cdots$ 为连续函数．证明：存在一个比每个 g_i 都增长得快的连续函数 f．

37. 证明 $\log_{10}2$ 为无理数．

选 题 解 答

1. (i) $e^{e^{e^{e^x}}}\cdot e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x$.

(iii) $(\sin x)^{\sin(\sin x)}[(\log(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$
$\qquad+(\cos x/\sin x)\cdot\sin(\sin x)]$.

(v) $\sin x^{\sin x^{\sin x}}[(\log(\sin x))\cdot\sin x^{\sin x}$
$\qquad\cdot\{(\log(\sin x))\cdot\cos x+(\cos x/\sin x)\cdot\sin x\}$
$\qquad+(\cos x/\sin x)\cdot\sin x^{\sin x}]$.

(vii) $$\left[\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right]^{\log(\sin e^x)}\cdot\left[\log\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right)\cdot\frac{(\cos e^x)e^x}{\sin e^x}+\log(\sin e^x)\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}\cdot\sin^2 x}\right].$$

(ix) $(\log x)^{\log x}\cdot\left[\log(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}+\log x\cdot\dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}\right]$.

3. (i) 0.

(iii) $\frac{1}{6}$.

(v) $\frac{1}{3}$.

5. (a)

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=\left[\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]-\left[\frac{e^{2x}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]$$
$$=1.$$

(c) $\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

$$=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$$
$$=\left[\frac{e^{x+y}}{4}-\frac{e^{-x-y}}{4}-\frac{e^{-x+y}}{4}+\frac{e^{x-y}}{4}\right]$$
$$+\left[\frac{e^{x+y}}{4}-\frac{e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{-x+y}}{4}-\frac{e^{x-y}}{4}\right]$$
$$=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y).$$

(e) 因

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

我们有

$$\sinh'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x.$$

(g) 因

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},$$

我们有

$$\tanh'(x)=\frac{(\cosh x)^2-(\sinh x)^2}{\cosh^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cosh^2 x}\ (根据(a)).$$

6. (a) 若 $y=\operatorname{argcosh} x$, 则 $x\geqslant 0$ 并且

$$x=\cosh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}\ (根据第 5 题(a)).$$

于是

$$\sinh(\arg\cosh x)=\sinh y$$
$$=\sqrt{x^2-1}\ (因为对于\ y\geqslant 0,\ \sinh y\geqslant 0).$$

(c)

$$(\operatorname{argsinh})'(x)=\frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh}(x))}$$
$$=\frac{1}{\cosh(\arg\sinh(x))}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (根据(b)).$$

(e)

$$(\arg\tanh)'(x)=\frac{1}{\tanh'(\arg\tanh(x))}$$
$$=\cosh^2(\arg\tanh(x)).$$

现在,

$$\tanh^2 y+\frac{1}{\cosh^2 y}=1\ (根据第 5 题(b)),$$

于是

$$\tanh^2(\arg\tanh(x))+\frac{1}{\cosh^2(\arg\tanh(x))}$$
$$=1,$$

或

$$\cosh^2(\arg\tanh(x))=\frac{1}{1-x^2}.$$

7. (a) 若 $y=\operatorname{argsinh}x$, 则

$$x=\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

于是

$$e^y-e^{-y}=2x,$$
$$e^{2y}-2xe^y-1=0,$$
$$e^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2},$$

于是

$$e^y=x+\sqrt{1+x^2}\ (因\ e^y>0),$$

或

$$y=\arg\sinh x=\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

同样地,

$$\arg\cosh x=\log(x+\sqrt{x^2-1}),$$

$$\arg\tanh x=\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\log(1-x).$$

(b)

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$=\operatorname{argsinh} b-\operatorname{argsinh} a$ (根据第 6 题(c))

$$=\log(b+\sqrt{1+b^2})-\log(a+\sqrt{1+a^2}).$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\log(b+\sqrt{b^2-1})-\log(a+\sqrt{a^2-1}).$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}[\log(1+b)-\log(1-b)-\log(1+a)+\log(1-a)].$$

8. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\log a}$. 因 $\log a<0$, 我们有 $\lim\limits_{x\to\infty}x\log a=-\infty$, 于是 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\log a}=0$.

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\log x)^n}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^n}{e^y}=0$.

   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\log x}$. 现在根据(d), 得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\log x=0$, 于是 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.

12. (a) $\lim\limits_{y\to 0}\log(1+y)/y=\log'(1)=1$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\log(1+1/x)=\lim\limits_{y\to 0^+}\log(1+y)/y=1$.

   (c) $e=\exp(1)=\exp(\lim\limits_{x\to\infty}x\log(1+1/x))$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\exp(x\log(1+1/x))$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x.$$

(用 * 号标明的等式, 是根据 exp 在 1 处的连续性得出的, 可证明如下. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在着某个 $\delta>0$, 使得当 $|y-1|<\delta$ 时就有 $|e-\exp y|<\varepsilon$. 另外, 存在某个 N 使得当 $x>N$ 时就有 $|x\log(1+1/x)-1|<\delta$. 于是对于 $x>N$ 有 $|e-\exp x\log(1+1/x)|<\varepsilon$.)

(d) $e^a=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x]^a=\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{ax}$

$$=\lim_{ax\to\infty}(1+1/x)^{ax}=\lim_{y\to\infty}(1+a/y)^y.$$

14. 1 元的最初投资过一年后可得

$$\lim_{x\to\infty}(1+a/100x)^x=e^{a/100}\text{ 元.}$$

15. 显然对于 $x>0$ 有 $f'(x)=1/x$. 若 $x<0$,则 $f(x)=\log(-x)$, 于是 $f'(x)=(-1)\cdot 1/(-x)=1/x$.

16. 设 $g(x)=f(x)/e^{cx}$. 则

$$g'(x)=\frac{e^{cx}f'(x)-f(x)ce^{cx}}{e^{2cx}}$$

$$=0,$$

于是存在某个数 k, 使得对于所有的 x 有 $g(x)=k$.

17. (a) 根据第 16 题, 存在某个数 k 使得 $A(t)=ke^{ct}$. 于是 $k=ke^{c\cdot 0}=A_0$. 因此, $A(t)=A_0e^{ct}$.

(b) 若 $A(t+\tau)=A(t)/2$, 则

$$A_0e^{ct+c\tau}=\frac{A_0e^{ct}}{2},$$

于是 $e^{ct}e^{c\tau}=e^{ct}/2$ 或 $e^{c\tau}=\frac{1}{2}$, 于是 $\tau=-(\log 2)/c$. 容易验证这个 τ 的确是对的.

18. 牛顿定律称, 对于某一(正)数 c,

$$T'(t)=c(T-M),$$

上式可以写成

$$(T-M)'=c(T-M).$$

于是由第 16 题知, 存在某个数 k 使得

$$T(t)-M=ke^{ct},$$

以及 $k=ke^{c\cdot 0}=T(0)=T_0$. 因此 $T(t)=M+T_0e^{ct}$.

第十八章　用初等函数表示的积分

根据微积分第二基本定理，每计算一个导数就得到一个积分公式．例如，

若　$F(x)=x(\log x)-x$，则　$F'(x)=\log x$；

于是，

$$\int_a^b \log x dx=F(b)-F(a)=b(\log b)-b-[a(\log a)-a],\quad 0<a,b.$$

如果我们采用记法

$$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

这种公式就可大大简化，而写成

$$\int_a^b \log x dx=(x(\log x)-x)\Big|_a^b.$$

这里$\int_a^b \log x dx$的求值靠了侥幸猜中$\log x$是函数$F(x)=x(\log x)-x$的导数．一般而言，满足$F'=f$的函数F就叫f的**原函数**．当然，连续函数总有原函数，即

$$F(x)=\int_a^x f,$$

但是在本章中我们将试图去寻求能用象 sin，log 等熟悉的函数表示的原函数．能用这种方式表示的函数叫做初等函数．精确地说*，初等函数就是能由有理函数、三角函数及其反函数，以及函数

---

*　我们将要下的这个定义是明确的，但并不完全准确，或者说至少不很标准．通常初等函数被定义为包括"代数"函数，也就是满足方程

$$(g(x))^n+f_{n-1}(x)(g(x))^{n-1}+\cdots+f_0(x)=0$$

的函数g在内，这里f_i是有理函数．但是对于我们的目的来说，这些函数可以略去．

log和exp通过加、乘、除和复合得到的函数.

从一开始就必须指出，初等的原函数通常不可能找到. 例如，就不存在一个初等函数 F 使

$$F'(x)=e^{-x^2}, \quad \text{对于所有 } x.$$

（这不只是说明我们目前对数学知之甚少，没有这样的函数这件事本身是一个（很难的）定理.）而且，更糟的是，你无法知道能否找到初等原函数（你只好希望本章的习题印刷上没错.）因为找寻初等原函数是这样的不确定，所以找到一个就令人特别满意. 如果我们观察到函数

$$F(x)=x\arctan x-\frac{\log(1+x^2)}{2}$$

满足

$$F'(x)=\arctan x$$

（至于我们是怎样进行这个观察的，那完全是另一回事），就有

$$\int_a^b \arctan x\,dx=\left(x\arctan x-\frac{\log(1+x^2)}{2}\right)\Big|_a^b,$$

于是我们可以认为，“实际上”已经求得 $\int_a^b \arctan x\,dx$ 的值了.

本章除包括寻求给定初等函数的初等原函数的方法（简称为“积分”的过程），还有一些简化这个过程的记法、缩写和约定. 为什么限于初等函数，其原因可由下述三方面的考虑来说明：

（1）积分是微积分的标准论题，每个人都应知道它.

（2）偶尔你可能在不允许查标准积分表的条件下，需要实际去求积分的值（例如，你可能学一门（物理）课程，其中就有要你去算的积分）.

（3）最有用的积分“方法”实际上是一些十分重要的定理（它能用于所有函数，而不只限于初等函数）.

自然，最后的一条理由是关键性的. 即使你打算忘记如何积

分(或许学完头一遍时你会忘掉一些细节)，但你决不能忘了基本方法.

这些基本方法就是一些定理，它使我们能用其他函数的原函数来表示一个函数的原函数. 因而一开始积分我们就需要一个若干个函数的原函数表；这个表可直接由对各种熟知的函数微分得到. 下面的表用到一个标准符号，在此需作些解释. 符号

$$\int f \text{ 或 } \int f(x)dx$$

表示"f 的原函数"，或者更精确些，表示"f 的所有原函数的集合". 符号$\int f$ 将常用在定理的叙述中，而$\int f(x)dx$ 在象下面的公式中用得最多:

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4}.$$

这个"等式"的意思是函数 $F(x)=x^4/4$ 满足 $F'(x)=x^3$，因为右端是数，而不是函数，所以按字面这是无法解释的，但用在这种情况时我们将允许这种不一致；我们的目的是要使积分过程尽可能机械一些，而将求助于任何可能的方法. 这个等式有另一件事值得提出. 多数人写

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

着重表示 $f(x)=x^3$ 的原函数正好是形式为 $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$(C 为某个数)的函数. 虽然，不注意这一点可能(见第 11 题)得到矛盾，但实际上不会出现这种困难，而关心这个常数只是增加麻烦.

伴随这个记法有一个重要的约定：等式右边出现的字母必须与等式左边"d"后面出现的字母一致——即

$$\int u^3du = \frac{u^4}{4},$$

$$\int txdx = \frac{tx^2}{2},$$

$$\int txdt = \frac{xt^2}{2}.$$

$\int f(x)dx$ 中的函数，即 f 的原函数，常称为 f 的“不定积分”，而对比之下，$\int_a^b f(x)dx$ 就称为“定积分”．这个提示性记号在实践中很好用，而重要的是不被引入迷途．不怕你厌烦，再次强调以下事实：积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不能定义为“$F(b)-F(a)$（其中 F 是 f 的不定积分）”（如果你没有发现这个说明是重复的，就该重读第十三章）．

我们只需将下列各式右端的函数简单地加以微分，就能验证下面不定积分简表中的公式．

$$\int adx = ax$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$\int \frac{1}{x} dx = \log x$（$\int \frac{1}{x} dx$ 为简便起见常写成 $\int \frac{dx}{x}$，本表中最后两个例子用了同样的缩写．）

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

下面两个同样性质的一般公式，是关于微分的定理的推论：

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int c\cdot f(x)dx = c\cdot \int f(x)dx.$$

这些等式的意思是，$f+g$ 的原函数可由 f 的原函数加上 g 的原函数得到，而 $c\cdot f$ 的原函数可由 f 的原函数乘以 c 得到.

注意这些公式对于定积分的推论：若 f 和 g 连续，则

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx.$$

它们可由以前的公式导出，因为每个定积分可以写成相应原函数在 a 和 b 的值之差. 要求连续性是为了要知道这些原函数存在.（当然，f 和 g 只是可积时这些公式也是对的，但这时证明将更加困难.）

导数的乘法公式产生一个更有趣的定理，它可用多种不同方式写出.

定理 1（分部积分） 设 f' 和 g' 连续，则

$$\int fg' = fg - \int f'g,$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

（注意在第二个等式中 $f(x)g(x)$ 表示函数 $f\cdot g$.）

证明 公式

$$(fg)'=f'g+fg'$$

可写成

$$fg'=(fg)'-f'g.$$

因此

$$\int fg'=\int(fg)'-\int f'g,$$

而 fg 可以选为 $\int(fg)'$ 所表示的函数之一，这就证明了第一个公式.

第二个公式只是第一个的重述，而第三个公式可由前两个中之任一个立即得出.

正如下面的例子所说明的，当被积分函数可当作函数 f 和另一函数的乘积，函数 f 的导数比 f 简单，而另一函数明显地是 g' 的形式，这时分部积分法是很有用的.

$$\int \underset{f\ g'}{x e^{x}} dx=\underset{f\ g}{x e^{x}}-\int \underset{f'\ g}{1 \cdot e^{x}} dx$$

$$=xe^{x}-e^{x}.$$

$$\int \underset{f\ g'}{x \sin x} dx=\underset{f}{x}\underset{g}{(-\cos x)}-\int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{(-\cos x)} dx$$

$$=-x\cos x+\sin x.$$

应用分部积分法时常用到两个特殊的技巧. 第一个是把因子 1 当作函数 g'，而积分中总可以写因子 1.

$$\int \log x dx=\int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\log x} dx=\underset{g}{x}\underset{f}{\log x}-\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{(1/x)} dx$$

$$=x(\log x)-x.$$

第二个技巧是用分部积分法去求出用$\int h$表示的$\int h$，然后解出$\int h$。下述计算是个简单的例子

$$\int \underset{g'}{(1/x)} \cdot \underset{f}{\log x}\, dx = \underset{g}{\log x} \cdot \underset{f}{\log x} - \int \underset{f'}{(1/x)} \cdot \underset{g}{\log x}\, dx,$$

由它推出

$$2\int \frac{1}{x}\log x\, dx = (\log x)^2$$

或

$$\int \frac{1}{x}\log x\, dx = \frac{(\log x)^2}{2}.$$

常常需要更复杂的计算：

$$\begin{aligned}\int \underset{f}{e^x} \underset{g'}{\sin x}\, dx &= \underset{f}{e^x}\underset{g}{(-\cos x)} - \int \underset{f'}{e^x}\underset{g}{(-\cos x)}\, dx \\ &= -e^x\cos x + \int \underset{u}{e^x} \underset{v'}{\cos x}\, dx \\ &= -e^x\cos x + \left[\underset{u}{e^x}\underset{v}{\sin x} - \int \underset{u'}{e^x}\underset{v}{(\sin x)}\, dx\right];\end{aligned}$$

所以，

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

或

$$\int e^x \sin x = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

因为分部积分靠的是确认一个函数具有形式 g'，所以你能够积分的函数越多，成功的机会就越多．在解决主要问题之前先求一个预备积分经常是适当的．例如，如果我们记得

$$\int \log x dx = x(\log x) - x$$

（这个公式本身就是用分部积分导出的），我们就可以用分部来积分

$$\int (\log x)^2 dx = \int \underset{f}{\underset{\downarrow}{(\log x)}} \underset{g'}{\underset{\downarrow}{(\log x)}} dx,$$

我们有

$$\int \underset{f}{\underset{\downarrow}{(\log x)}} \underset{g'}{\underset{\downarrow}{(\log x)}} dx = \underset{f}{\underset{\downarrow}{\log x}} \underset{g}{\underset{\downarrow}{[x(\log x) - x]}}$$

$$- \int \underset{f'}{\underset{\downarrow}{(1/x)}} \underset{g}{\underset{\downarrow}{[x(\log x) - x]}} dx$$

$$= (\log x)[x(\log x) - x] - \int [\log x - 1] dx$$

$$= (\log x)[x(\log x) - x] - \int \log x dx + \int 1 dx$$

$$= (\log x)[x(\log x) - x] - [x(\log x) - x] + x$$

$$= x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x.$$

最重要的积分方法是链式法则的一个推论．运用这个方法比用分部积分时需要更多的技巧，甚至方法的说明也更困难．所以

我们将分几步展开这个方法，首先叙述关于定积分的定理，而把不定积分情形的论述放到后面.

定理 2（替换公式） 设 f 和 g' 连续，则

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f\circ g)\cdot g'$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx.$$

证明 设 F 是 f 的原函数，则等式左边是 $F(g(b))-F(g(a))$. 另一方面，

$$(F\circ g)' = (F'\circ g)\cdot g' = (f\circ g)\cdot g'$$

所以 $F\circ g$ 是 $(f\circ g)\cdot g'$ 的原函数，而右边是

$$(F\circ g)(b)-(F\circ g)(a) = F(g(b))-F(g(a)).\blacksquare$$

应用替换公式的最简单情形是认出已知函数具有 $(f\circ g)g'$ 的形式. 例如，积分

$$\int_a^b \sin^5 x\cos x dx\left(=\int_a^b (\sin x)^5\cos x dx\right)$$

就是根据因子 $\cos x$ 的外形来简化，此因子将作为 $g'(x)(g(x)=\sin x)$；余下的式子 $(\sin x)^5$ 可写为 $(g(x))^5 = f(g(x))(f(u)=u^5)$. 因此

$$\int_a^b \sin^5 x\cos x dx \qquad \begin{bmatrix} g(x)=\sin x \\ f(u)=u^5 \end{bmatrix}$$

$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$= \int_{\sin a}^{\sin b} u^5 du = \frac{\sin^6 b}{6} - \frac{\sin^6 a}{6}.$$

积分 $\int_a^b \tan x dx$ 如果写作

$$\int_a^b \tan x dx = -\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x} dx,$$

也可用类似的方法处理. 在此情况下, 因子 $-\sin x$ 是 $g'(x)$, 这里 $g(x)=\cos x$; 余下的因子 $1/\cos x$ 就可写作 $f(\cos x)$, 这里 $f(u)=1/u$. 因此

$$\int_a^b \tan x dx \qquad \begin{bmatrix} g(x)=\cos x \\ f(u)=\dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$

$$= -\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$= -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u} du = \log(\cos a) - \log(\cos b).$$

最后, 要求

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x} dx,$$

注意 $1/x=g'(x)$, 这里 $g(x)=\log x$, 而 $1/\log x=f(g(x))$, 这里 $f(u)=1/u$. 因此

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x} dx \qquad \begin{bmatrix} g(x)=\log x \\ f(u)=\dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$

$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u} du = \log(\log b) - \log(\log a).$$

幸好, 替换公式的这些用法可以大大缩短. 中间步骤, 很容易取消, 其中包括写

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

只要注意从左到右

$$\begin{cases}\text{用 } u \text{ 替换 } g(x)\\ \text{用 } du \text{ 替换 } g'(x)dx\end{cases}$$

(并改变积分限);

可直接按原来的函数进行替换(说明了定理名称的由来). 例如,

$$\int_a^b \sin^5 x\cos x dx \quad \begin{bmatrix}\text{用 } u \text{ 替换 } \sin x\\ \text{用 } du \text{ 替换 } \cos x dx\end{bmatrix}$$

$$=\int_{\sin a}^{\sin b} u^5 du,$$

类似地

$$\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x}dx\begin{bmatrix}\text{用 } u \text{ 替换 } \cos x\\ \text{用 } du \text{ 替换} -\sin x dx\end{bmatrix}=\int_{\cos a}^{\cos b}\frac{1}{u}du.$$

通常我们把这个方法再加缩减,简单地说:

"令 $u=g(x)$

$du=g'(x)dx$."

因此

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x}dx\begin{bmatrix}\text{令 } u=\log x\\ du=\dfrac{1}{x}dx\end{bmatrix}=\int_{\log a}^{\log b}\frac{1}{u}du.$$

本章我们通常对原函数发生兴趣,而不是对定积分感兴趣,但若能对一切 a 和 b 都能求得 $\int_a^b f(x)dx$, 那末我们一定能求得

$$\int f(x)dx.$$

例如,因为

$$\int_a^b \sin^5 x\cos x dx=\frac{\sin^6 b}{6}-\frac{\sin^6 a}{6},$$

则有

$$\int \sin^5 x\cos x dx=\frac{\sin^6 x}{6}.$$

同样

$$\int \tan x dx = -\log(\cos x),$$

$$\int \frac{1}{x\log x} dx = \log(\log x).$$

从替换公式先求出定积分再得到原函数是很不经济的. 可以把这两步合并,得到下列步骤:

> (1)令
>
> $$u = g(x)$$
> $$du = g'(x)dx$$
>
> (这步进行后,式中只出现字母 u,不出现x).
>
> (2)求出原函数(一个包含 u 的式子).
>
> (3)把 u 用 $g(x)$替换回来.

因此,要求

$$\int \sin^5 x \cos x dx,$$

(1)令

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x dx,$$

所以得到

$$\int u^5 du;$$

(2)求值

$$\int u^5 du = \frac{u^6}{6};$$

(3) 记住要用 $\sin x$ 把 u 替换回来,因此得到

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \frac{\sin^6 x}{6}.$$

同样,若

$$u=\log x,$$

$$du=\frac{1}{x}dx,$$

则 $$\int\frac{1}{x\log x}dx \text{ 变成 } \int\frac{1}{u}du=\log u,$$

因此 $$\int\frac{1}{x\log x}dx=\log(\log x).$$

要求 $$\int\frac{x}{1+x^2}dx,$$

令 $$u=1+x^2,$$

$$du=2xdx;$$

突然出现的因子 2 不会引起什么问题——积分变为

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\log u,$$

所以

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

(这个结果可与分部积分配合应用，得到已经提到的一个公式:

$$\int 1\cdot\arctan x dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2).\ )$$

替换公式*的这些用法说明了最直接且最乏味的类型——

---

* 替换公式经常写作下列形式

$$\int f(u)du=\int f(g(x))g'(x)dx,\quad u=g(x).$$

这个公式不能从字面来理解(毕竟，$\int f(u)du$ 应指 f 的原函数而 $\int f(g(x))g'(x)dx$ 应指 $(f\circ g)\cdot g'$ 的原函数，它们一定不相等)．但是，它可以作为我们已进行的步骤的符号上的概括．如果我们使用莱布尼茨的记号，而且再含混一下，这公式读起来就特别顺当:

$$\int f(u)du=\int f(u)\frac{du}{dx}dx.$$

且适当的因子被确认为$g'(x)$,整个问题就简单得可以用心算做出来. 下面的三个问题只需要本章开头的不定积分简表所提供的公式,以及正确的替换(第三个问题通过代数技巧做了一些伪装).

$$\int \sec^2 x \tan^5 x dx,$$

$$\int (\cos x) e^{\sin x} dx,$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$$

如果你没有顺利地找到正确的替换，可从其答案$(\tan^6 x)/6$，$e^{\sin x}$和 $\arcsin e^x$ 猜得到. 起初你可能感到这些问题做起来太困难而不能做,但是至少当 g 具有很简单的形式 $g(x)=ax+b$ 时,你写出替换不应化费好多时间. 下面的积分应当很清楚. (唯一的麻烦是将常数放在适当的位置，第二个的答案是 $e^{3x}/3$ 还是 $3e^{3x}$? 我总是这样地来注意这些问题. 很清楚$\int e^{3x}dx=e^{3x}\cdot$(某个东西). 如果微分 $F(x)=e^{3x}$,就得到 $F'(x)=3e^{3x}$，所以“某个东西”应是$\frac{1}{3}$，以消去 3.)

$$\int \frac{dx}{x+3} = \log(x+3),$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3},$$

$$\int \cos 4x dx = \frac{\sin 4x}{4},$$

$$\int \sin(2x+1) dx = \frac{-\cos(2x+1)}{2},$$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\arctan 2x}{2}.$$

当因子 $g'(x)$ 不出现时，替换公式的使用比较有趣. 这时有两种主要的替换类型会碰到. 先考虑

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx.$$

式 e^x 的显眼的外形提示出简化替换

$$u=e^x,$$

$$du=e^x dx.$$

尽管式 $e^x dx$ 没出现，但总可以加进去：

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx=\int \frac{1+e^x}{1-e^x} \cdot \frac{1}{e^x} \cdot e^x dx.$$

所以我们得到

$$\int \frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1}{u} \cdot du,$$

此式可通过代数技巧来计算

$$\int \frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1}{u} du=\int\left(\frac{2}{1-u}+\frac{1}{u}\right) du=-2 \log (1-u)+\log u,$$

所以

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx=-2 \log \left(1-e^x\right)+\log e^x=-2 \log \left(1-e^x\right)+x.$$

有一个代替的更可取的方法来处理这个问题，它不需要用 e^x 来乘和除．如果我们写

$$u=e^x, \qquad x=\log u,$$

$$dx=\frac{1}{u} du,$$

则

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx \text{ 立即变成 } \int \frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1}{u} du.$$

如果利用 u 表示 x，用 du 表示 dx 这种技巧以代替相反的做法，则大部分的替换问题会更容易一些．不难看出为什么这种技巧总是可行的(只要用 x 表示 u 的函数在所考虑的问题中对所有的 x 都是一一的)：如果我们用替换

$$u=g(x), \qquad x=g^{-1}(u)$$
$$dx=(g^{-1})'(u)du$$

于积分

$$\int f(g(x))dx,$$

得到

$$(1)\quad \int f(u)(g^{-1})'(u)du.$$

另一方面，如果我们应用直接的替换

$$u=g(x)$$
$$du=g'(x)dx$$

于同一积分，

$$\int f(g(x))dx=\int f(g(x))\cdot\frac{1}{g'(x)}\cdot g'(x)dx,$$

我们得到

$$(2)\quad \int f(u)\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}du.$$

因为$(g^{-1})'(u)=1/g'(g^{-1}(u))$，所以积分(1)和(2)是恒等的.

再举一个具体的例子，考虑

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx.$$

在此情况下我们彻底地用一个字母代换整个式子$\sqrt{e^x+1}$. 因此选取替换

$$u=\sqrt{e^x+1},$$
$$u^2=e^x+1,$$
$$u^2-1=e^x, \qquad x=\log(u^2-1),$$
$$dx=\frac{2u}{u^2-1}du.$$

此积分就变成

$$\int \frac{(u^2-1)^2}{u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}du=2\int(u^2-1)du=\frac{2u^3}{3}-2u.$$

因此

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}-2(e^x+1)^{1/2}.$$

另一个例子说明可能出现的第二种主要的替换类型，它是积分

$$\int\sqrt{1-x^2}dx.$$

在此情况下，不是用一个简单式子代替一个复杂式子，而是用$\sin u$代替 x，因为$\sqrt{1-\sin^2 u}=\cos u$．这实际上表示我们用了替换$u=\arcsin x$，但现在是用 u 表示 x 的式子，它有助于我们求出替换 dx 的表达式．因此

令　$x=\sin u$，　$[u=\arcsin x]$

$dx=\cos u du$;

此积分于是变为

$$\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du=\int\cos^2 u du.$$

求这个积分需靠公式

$$\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$$

(见下面三角函数的讨论)，因此

$$\int\cos^2 u du=\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4},$$

而

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{\sin(2\arcsin x)}{4}$$

$$=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)$$

$$=\frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

替换和分部积分仅是我们必须学习的基本方法；借此可以求出许多函数的原函数．但正如我们举的一些例子所示，还须依靠一些附带的技巧才能成功．其最重要的列举在下面．运用这些技巧应能积分习题 1—7 中的所有函数(其他一些有趣的技巧在其余的一些习题中解释)．

1．三角函数

因为

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

且

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

我们得到

$$\cos 2x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1,$$

$$\cos 2x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x,$$

或

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

这些公式可用于积分

$$\int \sin^n x dx,$$

$$\int \cos^n x dx,$$

如果这里的 n 是偶数的话．以

$$\frac{1-\cos 2x}{2}\text{或}\frac{1+\cos 2x}{2}$$

代替 $\sin^2 x$ 或 $\cos^2 x$ 可得到包含 cos 较低次幂的项的和．例如，

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx,$$

且

$$\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx.$$

如果 n 是奇数, $n=2k+1$, 则

$$\int \sin^n x dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)^k dx;$$

等号后面的式子乘出后, 包含 $\sin x \cos^l x$ 形式的项, 所有这些项都容易积分. $\cos^n x$ 的积分以类似的方法处理. 积分

$$\int \sin^n x \cos^m x dx,$$

若 n 或 m 是奇数可以同法处理. 如 n 和 m 都是偶数, 可用 $\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$ 的公式.

最后的一个重要三角积分是

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx = \log(\sec x + \tan x).$$

尽管随便依靠哪种已有的方法(第 10 题)都可"推导"出这个结果, 但是把右端微分以验证这个公式是最简单的, 并记住这一点.

2. 递推公式

分部积分得到(第 17 题)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx,$$

及许多类似的公式. 反复运用头两个公式可给出一个求 $\sin^n x$ 或

$\cos^n x$ 的原函数的不同方法．第三个公式对于积分很大一类函数是很重要的，这使我们的讨论趋于完善．

3．**有理函数**

讨论有理函数 p/q，这里

$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$
$$q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,$$

我们可假定 $a_n=b_m=1$．此外，我们可假定 $n<m$，否则我们就可以用除法把 p/q 表示为一个多项式函数加上一个这种形式的有理函数(例如：

$$\frac{u^2}{u-1}=u+1+\frac{1}{u-1}).$$

任意有理函数的积分依靠两个事实；第一个从"代数基本定理"(见第二十五章定理 2 和习题二十五，3)得出，但第二个将不在本书证明．

定理　每个多项式函数

$$q(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

能写成一个乘积

$$q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots$$
$$\cdot(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}$$

(这里 $r_1+\cdots+r_k+2(s_1+\cdots+s_l)=m$)．

(在此式中，相等的因式已归并在一起，所以，所有的 $x-\alpha_i$ 和 $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ 可设为不同．另外，我们假定每个二次因式不能再分解因式．这表示

$$\beta_i^2-4\gamma_i<0,$$

否则我们就能分解

$$x^2+\beta_i x+\gamma_i=\left[x-\frac{-\beta_i+\sqrt{\beta_i^2-4\gamma_i}}{2}\right]\cdot\left[x-\frac{-\beta_i-\sqrt{\beta_i^2-4\gamma_i}}{2}\right]$$

为线性因子)．

定理 设$n<m$且

$p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$,

$q(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$

$$=(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l},$$

则$p(x)/q(x)$可写为

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{a_{k,1}}{(x+\alpha_k)}+\cdots+\frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right]$$

$$+\left[\frac{b_{1,1}x+c_{1,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)}+\cdots+\frac{b_{1,s_1}x+c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{b_{l,1}+c_{l,1}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)}+\cdots+\frac{b_{l,s_l}x+c_{l,s_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}}\right].$$

此式称为$p(x)/q(x)$的"部分分式分解",它太复杂,看下面的一个例子比较简单一些,此例说明了这种分解式及其求法. 按此定理,可写出

$$\frac{2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+10}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}+\frac{ex+f}{x^2+x+1}+\frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}.$$

为了求出a, b, c, d, e, f, g和h各数,要把右边写成公分母$(x^2+x+1)^2(x+2x+2)(x-1)^2$上的一个多项式,分子为

$$a(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2+b(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2$$
$$+(cx+d)(x-1)^2(x^2+x+1)^2+(ex+f)(x-1)^2(x^2+2x+2)$$
$$\cdot(x^2+x+1)+(gx+h)(x-1)^2(x^2+2x+2).$$

真正把此式乘出来(!)就得到一个8次多项式,其各项系数是$a,\cdots,h$的组合.这些系数应与$2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+10$的各系数相等($x^8$的系数是0),由此得到8个包含八个未知数$a,\cdots,h$的方程式. 经过不厌其烦的计算能解出

$$a=1, b=2, c=1, d=3,$$
$$e=0, f=0, g=0, h=1.$$

因此

$$\int\frac{2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+4}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}dx$$
$$=\int\frac{1}{(x-1)}dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx+\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx.$$

(在较简单的情况下，这种必需的计算是实际可行的. 我是从部分分式分解着手，把它变为整个分式才得到这个特例.)

我们已能够求上式中的每个积分；这些计算将说明有理函数求积分时出现的各种困难.

头两个积分很简单：

$$\int\frac{1}{x-1}dx=\log(x-1).$$

$$\int\frac{2}{(x-1)^2}dx=\frac{-2}{x-1}.$$

第三个积分要靠"配平方"：

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right].$$

(若我们得到$-\frac{3}{4}$而不是$\frac{3}{4}$，那就不能取平方根，但在此情况下，原二次因式已经能够分解为线性因式之积.)现在可写作

$$\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right]^2}dx.$$

替换

$$u=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}},$$

$$du=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}dx,$$

把积分变为

$$\frac{4}{3}\int\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(u^2+1)^2}du,$$

此积分用上面得出的第三个递推公式可以计算.

最后，求积分

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx.$$

我们写

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{2}{(x+1)^2+1}dx.$$

右边的第一个积分有意写作那样，以便用替换

$$u=x^2+2x+2,$$

$$du=(2x+2)dx$$

来求积分．右边的第二个积分恰是另外两个积分之差，它就是 $2\arctan(x+1)$．如果原来的积分是

$$\int\frac{x+3}{(x^2+2x+2)^n}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^n}dx+\int\frac{2}{[(x+1)^2+1]^n}dx,$$

右边的第一个积分仍旧可用同样的替换去算，第二个积分用递推公式去计算.

此例或许使你认为有理函数的积分只是在理论上意义重大，而实际难以进行，特别是因为，在开始之前就需要把 $q(x)$ 分解因式．这仅仅是部分正确．我们已经看到有时会出现简单的有理函

数，如在积分

$$\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx$$

之中；另一个重要的例子是积分

$$\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+1).$$

另外，如果一个问题已归结为有理函数的积分，那末一定存在初等原函数，即使分母的因式分解有困难或不可能，无法把原函数明显地写出来时也是这样.

习　题

1. 本题所包括的积分主要要求代数运算，因而只是检验你运用代数技巧的能力，而不是看你对积分过程理解得如何. 然而所有这些技巧都可能是真正积分中一个重要的预备步骤. 另外，对于哪些积分是容易的，你要有所感觉，以至于你能看出积分过程的终结就在眼前. 答案部分(如你想参考它)只提示你应当使用什么样的代数技巧.

   (i) $\int\frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}dx.$

   (ii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}.$

   (iii) $\int\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}dx.$

   (iv) $\int\frac{a^x}{b^x}dx.$

   (v) $\int\tan^2 x\,dx.$ (三角积分总是很难办的，因为有那么多的三角恒等式，使本来是很容易的问题看起来很难.)

   (vi) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}.$

   (vii) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(viii) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

(ix) $\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}dx$.

(x) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.

2. 下列积分含有简单的替换，其中大多数心算就能作出来。

(i) $\int e^x \sin e^x dx$.

(ii) $\int x e^{-x^2} dx$.

(iii) $\int \frac{\log x}{x} dx$. （在正文内曾用分部法作出.）

(iv) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+1}$.

(v) $\int e^{e^x} e^x dx$.

(vi) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

(vii) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

(viii) $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$.

(ix) $\int \log(\cos x) \tan x dx$.

(x) $\int \frac{\log(\log x)}{x \log x} dx$.

3. 分部积分：

(i) $\int x^2 e^x dx$.

(ii) $\int x^3 e^{x^2} dx$.

(iii) $\int e^{ax} \sin bx dx$.

(iv) $\int x^2 \sin x dx$.

(v) $\int (\log x)^3 dx$.

(vi) $\int \frac{\log(\log x)}{x}dx$

(vii) $\int \sec^3 x dx.$ （这是经常会碰到的难办而又重要的积分．如无法计算，可参阅答案．）

(viii) $\int \cos(\log x)dx.$

(ix) $\int \sqrt{x}\log x dx.$

(x) $\int x(\log x)^2 dx.$

4. 下列积分全可用替换 $x=\sin u$, $x=\cos u$ 等作出．作有些题目时，必须记住

$$\int \sec x dx = \log(\sec x + \tan x)$$

和

$$\int \csc x dx = -\log(\csc x + \cot x).$$

后者用微分即可验证．另外，在这里，各种三角函数的导数都应运用自如．

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. （你已经知道这个积分了，但使用替换 $x=\sin u$ 作一下，看看它是怎样作出来的．）

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. （因 $\tan^2 u+1=\sec^2 u$，须用 $x=\tan u$ 替换．）

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

(iv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. （答案是本书提得很少的某个反函数．）

(v) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

(vi) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(vii) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx.$

(viii) $\int \sqrt{1-x^2}dx.$

（(vii)、(viii) 须要回忆 sin 和 cos 的幂的积分方法．）

(ix) $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$.

(x) $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$.

5. 下列积分包含各种类型的替换，必须灵活运用. 不过有一般规律可循：替换出现多次或很突出的式子；若出现两个麻烦的式子，设法利用某个新式子表示这两式. 不要忘记直接用 u 表示 x，求出 dx 的适当的替换式常常是有益的.

(i) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

(ii) $\int\frac{dx}{1+e^x}$.

(iii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

(iv) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. （替换 $u=e^x$ 导致一个还需要另一替换的积分；这完全是正确的，但两个替换可以一次完成.）

(v) $\int\frac{dx}{2+\tan x}$.

(vi) $\int\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. （一个替换可以顶两个替换用的又一例.）

(vii) $\int\frac{4^x+1}{2^x+1}dx$.

(viii) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

(ix) $\int\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}dx$. （在此情况下最好连续用两个替换；第一次替换可有两种选择，哪个都行.）

*(x) $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

6. 前题中只是偶然出现一些有理函数的积分，本题却是系统选择的.

(i) $\int\frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$.

(ii) $\int\frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$.

(iii) $\int\frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}dx.$

(iv) $\int\frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx.$

(v) $\int\frac{x+4}{x^2+1}dx.$

(vi) $\int\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx.$

(vii) $\int\frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$

(viii) $\int\frac{dx}{x^4+1}.$

(ix) $\int\frac{2x}{(x^2+x+1)^2}dx.$

(x) $\int\frac{3x}{(x^2+x+1)^3}dx.$

*7. 杂题. (不受任何限制.)下列积分包含前面各题所有方法。

(i) $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx.$

(ii) $\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}dx.$

(iii) $\int\log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(iv) $\int x\log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(v) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx.$

(vi) $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx.$

(vii) $\int\frac{x}{1+\sin x}dx.$

(viii) $\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx.$

(ix) $\int\sqrt{\tan x}\,dx.$

(x) $\int\frac{dx}{x^6+1}.$ (要把 x^6+1 分解因子，先分解 y^3+1，用习题一，1.)

8. 如已作过习题十七,7 则第 4 题的(ii)和(iii)看起来就很熟悉了. 一般而言, 替换 $x=\cosh u$ 对包含$\sqrt{x^2-1}$的积分常是很有用的, 同时 $x=\sinh u$ 可用于包含$\sqrt{x^2+1}$的积分. 把这些替换式用于第 4 题的其他积分上. (此方法其实并不受欢迎,用三角替换较易处理.)

*9. 世上最微妙的替换无异是

$$t=\tan\frac{x}{2},\quad x=2\arctan t,$$

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

正如我们在习题十五,16 中得出的,这个替换导出两式

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

于是此替换把只包含由加, 乘和除法联结起来的sin 和cos的任何积分变为一个有理函数的积分. 求

(i) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$. (和题 1(viii)的答案比较.)

(ii) $\int\frac{dx}{1-\sin^2 x}$. (此处最好令 $t=\tan x$. 为什么?)

(iii) $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$. (还有另一方法可作此题,用习题十五,7.)

(iv) $\int\sin^2 x dx$. (此练习使你深信这种替换只是"没办法中的办法".)

(v) $\int\frac{dx}{3+5\sin x}$. ("没办法中的办法".)

*10. 用下述两法推导$\int\sec x dx$ 的公式:

(a) 通过部分分式分解显然可得下式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x}&=\frac{\cos x}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right].\end{aligned}$$

须要注意$\int\cos x/(1-\sin x)\,dx=-\log(1-\sin x)$; 负号是很重要的. 记住$\frac{1}{2}\log\alpha=\log\sqrt{\alpha}$. 此后,继续作代数运算,那就要靠技巧.

(b) 通过使用替换 $t=\tan x/2$. 再次需要少量的运算把答案做成所要求的形式；式 $\tan x$ 可利用习题十五，8 来着手进行．或者两个答案都用 t 来表示．对于 $\int \sec x dx$ 还有一个式子，它没有 $\log(\sec x+\tan x)$ 那样麻烦；利用习题十五，8，我们得到

$$\int \sec x dx=\log\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)=\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

最后的这个式子实际上是先发现的，它不是由于数学家的聪敏，而是历史上的奇遇：1599 年莱特(Wright)计算过航海用表，它相当 sec 的定积分表．当第一个正切对数表产生后，这两个表的对应关系立即被注意到了(但直到微积分发现后才得到解释)．

11. 正文中所给出的 $\int e^x \sin x dx$ 的推导似乎证明了 $f(x)=e^x\sin x$ 的唯一的原函数是 $F(x)=e^x(\sin x-\cos x)/2$，然而 $F(x)=e^x(\sin x-\cos x)/2+C$ 对于任意数 C 也是一个原函数．C 是从哪里来的？(等式

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

是什么意思？)

12. (a) 使用在解决 log 和 arctan 的积分问题中用过的同样的技巧来求 $\int \arcsin x dx$.

*(b) 推广这个技巧：用 $\int f(x)dx$ 求 $\int f^{-1}(x)dx$．与习题十二，15 和十四，10 做比较．

13. (a) 用两种不同的方法求 $\int \sin^4 x dx$：先用递推公式，然后用 $\sin^2 x$ 的公式．

(b) 把两个解答结合起来得出一个令人印象深刻的三角恒等式．

14. 用 $\int (\log x)^{-1}dx$ 表示 $\int \log(\log x)dx$．(两者都不能用初等函数表示．)

15. 用 $\int e^{-x^2}dx$ 表示 $\int x^2 e^{-x^2}dx$.

16. 证明函数 $f(x)=e^x/(e^{2x}+e^x+1)$ 有一个初等原函数．(不要企图去求出它！)

17. 证明正文中的递推公式. 第三个递推公式写作

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}$$

并把这最后的积分继续算下去. (也可以应用替换 $x=\tan u$.)

18. 求出下列两个积分的递推公式:

(a) $\int x^n e^x\,dx$.

(b) $\int(\log x)^n dx$.

*19. 证明

$$\int_1^{\cosh x}\sqrt{t^2-1}\,dt=\frac{\cosh x\sinh x}{2}-\frac{x}{2}.$$

(这个计算的意义见习题十七, 4.)

20. 证明

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx.$$

(几何解释可使其显然, 但对于在替换时积分限的处理也是一个极好的练习.)

21. 证明半径为 r 的圆的面积为 πr^2. (自然你必须记住 π 定义为单位圆的面积.)

22. 用归纳法和分部积分法推广习题十四, 6:

$$\int_0^x\frac{f(u)(x-u)^n}{n!}du=\int_0^x\left(\int_0^{u_n}\left(\cdots\left(\int_0^{u_1}f(t)dt\right)du_1\right)\cdots\right)du_n.$$

23. 设 f' 在 $[a,b]$ 上是连续的, 用分部积分法证明黎曼-勒贝格引理: 对于 f 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt=0.$$

此结果正好是习题十五, 25 的特殊情况, 但可用来证明普遍情况(黎曼-勒贝格引理在习题十五, 25 中曾由 f 是阶梯函数的特殊情况导出, 这里, 用与此几乎相同的方法).

24. 证明下列对于广义积分的分部积分的表示式

$$\int_a^\infty u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^\infty-\int_a^\infty u(x)v'(x)dx.$$

右边第一项的记号自然是指

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x)-u(a)v(a).$$

*25. 在分析中最重要的函数之一是Γ函数，

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

(a) 证明若 $x>0$ 则广义积分 $\Gamma(x)$ 是确定的.

(b) 用分部积分(更确切些，前题中广义积分的形式)证明

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

(c) 证明 $\Gamma(1)=1$，由此推论对于所有自然数 n，$\Gamma(n)=(n-1)!$.

因此Γ函数提供了一个"插入"诸值 $n!$(n 为自然数)的连续函数的简单例子. 当然有无限多个连续函数 f 满足 $f(n)=(n-1)!$；甚至有无限多个连续函数 f 对于所有 $x>0$ 满足 $f(x+1)=xf(x)$. 但是，Γ函数有重要的附加性质，即 $\log\circ\Gamma$是凸的，这是表示这个函数极端光滑的一个条件. 由哈若德玻尔(Harald Bohr)和琼尼斯·莫来鲁普(Johannes Mollerup)推出的一个美妙定理指出：Γ是具有 $\log\circ f$ 凸的、$f(1)=1$ 和 $f(x+1)=xf(x)$ 的唯一函数 f. 见供参考的建议读物.

*26. (a) 用$\int\sin^n x dx$ 的递推公式来证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx.$$

(b) 接着证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n},$$

由此得到

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx}.$$

(c) 证明这式中两个积分之商在 1 与 $1+1/2n$ 之间，由不等式

$$0<\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x\leqslant\sin^{2n-1}x,\quad 对\ 0<x<\pi/2$$

开始进行。

此结果证明了这个乘积

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

可任意接近 $\pi/2$，它通常写作无穷乘积，即熟知的瓦利斯 (Wallis) 乘积：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

(d) 并证明乘积

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$$

可任意接近 $\sqrt{\pi}$。(此事实用于下一题和习题二十六，18.)

**27. 这是个惊人的事实，即：普通积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不能计算的情况下广义积分 $\int_0^\infty f(x)dx$ 却经常能计算。对于 $\int_a^b e^{-x^2}dx$，没有初等公式，但我们却能准确地求出 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ 的值！有许多求这个积分值的方法，但大多数需要高等技巧；下列方法包含了相当的工作量，但是没有你不知道的事实。

(a) 证明

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(这可用递推公式或适当替换，结合前题即可作出。)

(b) 用导数证明

$$1-x^2\leqslant e^{-x^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant1.$$

$$e^{-x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2},\quad 0\leqslant x.$$

(c) 对这些不等式的 n 次幂分别从 0 到 1 和从 0 到 ∞ 求积分。然后用替换 $y=\sqrt{n}x$ 证明

$$\sqrt{n}\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

$$\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}e^{-y^2}dy\leqslant\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(d) 现在用习题 26(c)证明

$$\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**28. (a) 用分部积分证明

$$\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\cos a}{a}-\frac{\cos b}{b}+\int_a^b\frac{\cos x}{x^2}dx,$$

并推论$\int_0^{\infty}(\sin x)/x dx$ 存在. (用左边来研究 $a\to 0^+$ 时的极限, 用右边求 $b\to\infty$ 的极限.)

(b) 用习题十五 31 来证明, 对任何自然数 n 有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt=\pi.$$

(c) 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\pi}\sin\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)t\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right]dt=0.$$

提示: 根据习题十五, 2(vi), 括号中的式子是有界的; 然后应用黎曼-勒贝格引理.

(d) 用替换$x=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)t$ 和 (b) 来证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

*29. (a) 用替换 $u=t^x$ 来证明

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^{\infty}e^{-u^{\frac{1}{x}}}dx.$$

(b) 求$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

选 题 解 答

1. (i) $(\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[8]{x})/\sqrt{x}=x^{1/10}+x^{-3/8}$.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}$.

(iii) $(e^x+e^{2x}+e^{3x})/e^{4x}=e^{-3x}+e^{-2x}+e^{-x}$.

(iv) $a^x/b^x=(a/b)^x=e^{x\log(a/b)}$.

(v) $\tan^2x=\sec^2x-1$.

(vi) $$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{\frac{1}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

(vii) $$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

(viii) $$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2x}=\sec^2x-\sec x\tan x.$$

(ix) $$\frac{8x^2+6x+4}{x+1}=8x-2+\frac{6}{x+1}.$$

(x) $$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

2. (i) $-\cos e^x$. (令 $u=e^x$.)

(iii) $\dfrac{(\log x)^2}{2}$. (令 $u=\log x$.)

(v) e^{e^x}. (令 $u=e^x$.)

(vii) $2e^{\sqrt{x}}$. (令 $u=\sqrt{x}$.)

(ix) $-\dfrac{(\log(\cos x))^2}{2}$. (令 $u=\log(\cos x)$.)

3. (i) $$\int x^2e^xdx=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2e^x-\left[2xe^x-2\int e^xdx\right]$$
$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x.$$

(iii) 我们有

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}\cos bx}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}(-\sin bx)dx\right],$$

所以

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx.$$

(v) 用正文中结果

$$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-2x(\log x)+2x,$$

我们有

$$\begin{aligned}\int(\log x)^3dx&=[x(\log x)^2-2x(\log x)+2x]\log x\\&\qquad-\int\frac{1}{x}[x(\log x)^2-2x(\log x)+2x]dx\\&=x(\log x)^3-2x(\log x)^2+2x\log x\\&\qquad-\int(\log x)^2dx+2[x\log x-x]-2x\\&=x(\log x)^3-2x(\log x)^2+2x\log x\\&\qquad-[x(\log x)^2-2x\log x+2x]\\&\qquad+2[x\log x-x]-2x\\&=x(\log x)^3-3x(\log x)^2+6x\log x-6x.\end{aligned}$$

(vii) $$\begin{aligned}\int\sec^3xdx&=\int(\sec^2x)(\sec x)dx\\&=\tan x\sec x-\int(\tan x)(\sec x\tan x)dx\\&=\tan x\sec x-\int\sec x(\sec^2x-1)dx\\&=\tan x\sec x-\int\sec^3xdx+\int\sec xdx,\end{aligned}$$

所以

$$\int\sec^3xdx=\frac{1}{2}[\tan x\sec x+\log(\sec x+\tan x)].$$

(ix) $$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\log xdx&=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\log x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx\\&=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\log x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx\end{aligned}$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\log x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}.$$

4. (i) 令 $x=\sin u$, $dx=\cos u du$. 原积分变为

$$\int\frac{\cos u du}{\sqrt{1-\sin^2 u}}=\int 1du=u=\arcsin x.$$

(iii) 令 $x=\sec u$, $dx=\sec u\tan u du$. 原积分变为

$$\int\frac{\sec u\tan u du}{\sqrt{\sec^2 u-1}}=\int\sec u du=\log(\sec u+\tan u)$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

(v) 令 $x=\sin u$, $dx=\cos u du$. 原积分变为

$$\int\frac{\cos u du}{\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}}=\int\csc u du=-\log(\csc u+\cot u)$$

$$=-\log\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

(vii) 令 $x=\sin u$, $dx=\cos u du$. 原积分变为

$$\int(\sin^3 u\cos u)\cos u du=\int\sin^3 u\cos^2 u du$$

$$=\int(\sin u)(1-\cos^2 u)\cos^2 u du$$

$$=\int(\sin u)(\cos^2 u-\cos^4 u)du$$

$$=-\frac{\cos^3 u}{3}+\frac{\cos^5 u}{5}$$

$$=-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}.$$

(ix) 令 $x=\tan u$, $dx=\sec^2 u du$, 原积分变为

$$\int\sec u\sec^2 u du=\int\sec^3 u du$$

$$=\frac{1}{2}[\tan u\sec u+\log(\sec u+\tan u)]$$

(按习题 3(vii))

$$=\frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})].$$

5. (i) 令 $u=\sqrt{x+1}$, $x=u^2-1$, $dx=2udu$. 原积分变为

$$\int\frac{2udu}{1+u}=\int\left(2+\frac{-2}{1+u}\right)du$$

$$=2u-2\log(1+u)=2\sqrt{x+1}-2\log(1+\sqrt{x+1}).$$

(iii) 令 $u=x^{1/6}$, $x=u^6$, $dx=6u^5du$. 原积分变为

$$\int\frac{6u^5du}{u^3+u^2}=6\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=2u^3-3u^2+6u-6\log(u+1)$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log(\sqrt[6]{x}+1).$$

(v) 令 $u=\tan x$, $x=\arctan u$, $dx=\dfrac{du}{(1+u^2)}$. 原积分变为

$$\int\frac{du}{(1+u^2)(2+u)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2+u}-\frac{u-2}{1+u^2}\right)du$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{du}{2+u}-\frac{1}{10}\int\frac{2udu}{1+u^2}+\frac{2}{5}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{5}\log(2+u)-\frac{1}{10}\log(1+u^2)+\frac{2}{5}\arctan u$$

$$=\frac{1}{5}\log(2+\tan x)-\frac{1}{10}\log(1+\tan^2 x)+\frac{2}{5}x.$$

(vii) 令 $u=2^x$, $x=\log u/\log 2$, $dx=du/(u\log 2)$. 原积分变为

$$\frac{1}{\log 2}\int\frac{u^2+1}{(u+1)u}du=\frac{1}{\log 2}\int\left(1+\frac{1-u}{u(u+1)}\right)du$$

$$=\frac{1}{\log 2}\int\left(1+\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{\log 2}[u+\log u-2\log(u+1)]$$

$$=\frac{1}{\log 2}[2^x+x\log 2-2\log(2^x+1)].$$

(ix) 令 $u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $dx=2udu$. 原积分变为

$$\int\frac{\sqrt{1-u^2}\,2udu}{1-u}.$$

现又令 $u=\sin y$, $du=\cos y dy$. 上面积分变为

$$\int\frac{2\cos y\sin y\cos y}{1-\sin y}dy=2\int\frac{(1-\sin^2 y)\sin y}{1-\sin y}dy$$

$$=2\int(1+\sin y)\sin y dy.$$

$$=2\int \sin y dy+\int (1-\cos 2y)\,dy$$

$$=-2\cos y+y-\frac{\sin 2y}{2}$$

$$=-2\cos y+y-\sin y\cos y$$

$$=-2\sqrt{1-u^2}+\arcsin u-u\sqrt{1-u^2}$$

$$=-2\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x}.$$

替换 $u=\sqrt{1-x}$, $x=1-u^2$, $dx=-2u\,du$ 导致

$$\int\frac{-2u^2\,du}{1-\sqrt{1-u^2}},$$

继则由替换 $u=\sin y$ 导致

$$\int\frac{-2\sin^2 y\cos y dy}{1-\cos y}=-2\sin y-y-\sin y\cos y$$

$$=-2u-\arcsin u-u\sqrt{1-u^2}$$

$$=-2\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{1-x},$$

$$-\sqrt{1-x}\sqrt{x}$$

因为

$$\arcsin\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{1-x},$$

因此这两个解答是一致的(通过对比它们的导数及 $x=0$ 时之值即可验证).

6. 在下列解答中 I 表示原来的积分

(i)

$$I=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3}{(x+1)^2}dx$$

$$=2\log(x-1)-\frac{3}{x+1}.$$

(iii)

$$I=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{4}{(x+1)^3}dx$$

$$=-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x+1)^2}.$$

(v)

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{4}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+4\arctan x.$$

(vii)

$$I=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2x}{x^2+x+1}dx$$
$$=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

现在

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$
$$=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}dx$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right),$$

所以

$$I=\log(x+1)+\log(x^2+x+1)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

(ix)

$$I=\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx-\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$
$$=\int\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx-\frac{16}{9}\int\frac{1}{\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right)^2}dx.$$

因为替换

$$u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\qquad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}du$$

把第二个积分变成

$$-\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

用递推公式, 上式可写为

$$-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}\right]$$
$$=-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{\log(u^2+1)}{4}+\frac{1}{2}\arctan u\right],$$

所以

$$I=-\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\log\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right)$$
$$-\frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

11. 等式$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx$是指满足$F'(x)=e^x\sin x$的任意函数$F$可写作$F(x)=e^x\sin x-e^x\cos x-G(x)$，此处$G$是另一个满足$G'(x)=e^x\sin x$的函数．自然，对某数$C$，$G=F+C$，而$F=G$不一定成立．

12. (a)

$$\int \arcsin x dx=\int 1\cdot\arcsin x dx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$$

13. (a)

$$\int\sin^4 x dx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\int\sin^2 x dx$$
$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}\int 1dx\right]$$
$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3\sin x\cos x}{8}+\frac{3}{8}x.$$

$$\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos^2 2x}{4}\right)dx$$
$$=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx$$
$$=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right]$$
$$=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}.$$

(b) 这两个解答是相同的，因为$x=0$时它们的值也相同．

17. (a)

$$\int\sin^n x dx=\int(\sin x)(\sin^{n-1}x)dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(\cos x)(\sin^{n-2}x)(\cos x)dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(\sin^{n-2}x-\sin^{n}x)dx,$$

所以

$$\int\sin^{n}xdx=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx.$$

(b)

$$\int\cos^{n}xdx=\int(\cos x)(\cos^{n-1}x)dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin x(\cos^{n-2}x)\sin xdx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(\cos^{n-2}x-\cos^{n}x)dx,$$

所以

$$\int\cos^{n}xdx=\frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx.$$

(c)

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^n}$$

$$=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n}dx$$

$$=\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}-\left[\frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}\right.$$

$$\left.-\int\frac{dx}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}}\right]$$

所以

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}-\frac{(2n-3)}{2(n-1)}\int\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx.$$

我们也可用替换 $x=\tan u$, $dx=\sec^2udu$, 它可把原积分变为

$$\int\frac{\sec^2udu}{\sec^{2n}u}=\int\cos^{2n-2}udu$$

$$=\frac{1}{2n-2}\cos^{2n-3}u\sin u+\frac{2n-3}{2n-2}\int\cos^{2n-4}udu$$

$$=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^{2n-3}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

一九八二年 三月 三日

第四部分　无穷序列和无穷级数

代数分析中最值得注意的级数之一是：

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^n+\cdots$$

当m是正整数时该级数是有穷的，如所周知，它的和可以表示为$(1+x)^m$。当m不是非负整数时，该级数变成无穷，并且它将随着数m和x取这个或那个值而收敛或发散。在这种情形下，人们写出同一等式

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$$

……这是假定，每当级数收敛时总会出现这个数值等式，可是这一点还从来没有被证明过。

耐尔斯·亨瑞克·阿贝耳

第十九章　用多项式函数的近似

在某种意义上讲"初等函数"一点也不初等．如果 p 是一个多项式函数，

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

那么对于任何数 x，$p(x)$都能够容易地计算出来．对于象 sin，log 或 exp 这样的函数，情况就完全不是这样．目前为了近似地求出 $\log x=\int_1^x 1/t\,dt$，我们必须计算某个上和或下和，还必须弄确实把这样一个和作为 $\log x$时所包含的误差不太大．计算$e^x=\log^{-1}(x)$会更困难：我们必须对于 a 的许多值算出 $\log a$，直到找出一个数 a，使 $\log a$ 近似地等于 x 为止——那么 a 就近似地等于 e^x．

在这一章中，我们将得出一些重要的理论结果，对于许多函数 f 而言，这些结果将把 $f(x)$的计算简化为多项式函数的计算．这种方法依赖于求出密切近似于 f 的多项式函数．为了推测一个恰当的多项式，首先对多项式函数本身进行比较彻底的考察，是有帮助的．

假设

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

注意到系数 a_i 能用 p 及其各阶导数在 0 处的值来表示是有趣的，并且对于我们的目的是很重要的．首先，注意到

$$p(0)=a_0.$$

微分 $p(x)$的原式，得

$$p'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}.$$

所以

$$p'(0)=p^{(1)}(0)=a_1.$$

再次微分，我们得

$$p''(x)=2a_2+3\cdot 2\cdot a_3x+\cdots+n(n-1)\cdot a_nx^{n-2}.$$

所以

$$p''(0)=p^{(2)}(0)=2a_2.$$

一般地，我们有

$$p^{(k)}(0)=k!a_k \text{ 或 } a_k=\frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

如果我们约定 $0!=1$，并回想起记号 $p^{(0)}=p$，那么这个公式对于 $k=0$ 也成立。

如果我们从一个被写为"$(x-a)$的多项式"的函数 p

$$p(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$$

开始，那么同样的讨论将证明

$$a_k=\frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

现在假定 f 是这样的一个函数(不一定是多项式)，使得

$$f^{(1)}(a),\cdots,f^{(n)}(a)$$

都存在．设

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ 0\leqslant k\leqslant n,$$

并规定

$$P_{n,a}(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n.$$

多项式 $P_{n,a}$ 称为 **f 在 a 处的 n 阶泰勒多项式**．(严格地讲，我们应当用更复杂的符号，如 $P_{n,a,f}$，以便指出它与 f 的依赖关系；这个更严谨的记号有时是有用的．)泰勒多项式被定义为使得

$$P_{n,a}^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\ 对于\ 0\leqslant k\leqslant n;$$

事实上，它显然是具有这种性质的次数 $\leqslant n$ 的唯一的多项式．

虽然 $P_{n,a,f}$ 的系数似乎以一种相当复杂的方式依赖于 f，但是

一些最重要的初等函数却有极简单的泰勒多项式．首先考虑函数 sin．我们有

$$\sin(0)=0,$$
$$\sin'(0)=\cos 0=1,$$
$$\sin''(0)=-\sin 0=0,$$
$$\sin'''(0)=-\cos 0=-1,$$
$$\sin^{(4)}(0)=\sin 0=0.$$

从此继续下去，导数以 4 为周期重复出现．数

$$a_k=\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}$$

是

$$0,1,0,-\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},0,-\frac{1}{7!},0,\frac{1}{9!},\cdots$$

所以 sin 在 0 处的 $2n+1$ 阶泰勒多项式 $P_{2n+1,0}$ 是

$$P_{2n+1,0}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

（当然，$P_{2n+1,0}=P_{2n+2,0}$）．

cos 在 0 处的 $2n$ 阶泰勒多项式 $P_{2n,0}$ 是（计算留给你们）

$$P_{2n,0}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

exp 的泰勒多项式特别容易计算．因为对于所有的 k，

$$\exp^{(k)}(0)=\exp(0)=1,$$

所以它在 0 处的 n 阶泰勒多项式是

$$P_{n,0}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

log 的泰勒多项式必须在某个 $a\neq 0$ 处计算，因为 log 在 0 处甚至连定义都没有．标准的选择是 $a=1$．于是

$$\log'(x)=\frac{1}{x},\quad \log'(1)=1;$$

$$\log''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad \log''(1)=-1;$$

$$\log'''(x)=\frac{2}{x^3},\ \log'''(1)=2;$$

一般地

$$\log^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k},$$

$$\log^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

所以 log 在 1 处的 n 阶泰勒多项式是

$$P_{n,1}(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

研究函数 $f(x)=\log(1+x)$ 往往是更方便的. 在这种情况下，我们可以取 $a=0$. 我们有

$$f^{(k)}(x)=\log^{(k)}(1+x),$$

于是

$$f^{(k)}(0)=\log^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

因此, f 在 0 处的 n 阶泰勒多项式是

$$P_{n,0}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

还有一个其泰勒多项式也很重要的初等函数——arctan. 其导数计算如下

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad \arctan'(0)=1;$$

$$\arctan''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\qquad \arctan''(0)=0;$$

$$\arctan'''(x)=\frac{(1+x^2)^2\cdot(-2)+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}.$$

$$\arctan'''(0)=-2.$$

这种费力的计算显然是不行的. 然而, 在我们更仔细地考察过泰勒多项式的性质之后, arc tan 的泰勒多项式将会容易求出——虽然泰勒多项式 $P_{n,a,f}$ 只是被定义得使它与 f 在 a 处具有相同的前 n 阶导数, 但 f 和 $P_{n,a,f}$ 之间的关系实际上要深得多.

关于 f 和 f 的泰勒多项式之间的一种更密切关系的一丝形迹, 可通过考察一阶泰勒多项式

$$P_{1,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

揭示出来. 注意到

$$\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a).$$

现在按 $f'(a)$的定义, 我们有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=0.$$

换言之, 当 x 趋近于 a 时, 差 $f(x)-P_{1,a}(x)$不仅变小, 而且实际上甚至与 $x-a$ 相比也是变小的. 图 1 绘出 $f(x)=e^x$ 和 f 在 0 处的一阶泰勒多项式

$$P_{1,0}(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$$

的图形. 图上还绘出 f 在 0 处的二阶泰勒多项式

$$P_{2,0}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=1+x+\frac{x^2}{2}$$

的图形. 当 x 趋近 0 时, 差 $f(x)-P_{2,0}(x)$似乎比差 $f(x)-P_{1,0}(x)$变小得更快. 照这样叙述, 这个断言是很不严谨的, 我们现在准备给它一个确定的意思. 我们刚才已经注意到, 一般说来

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=0.$$

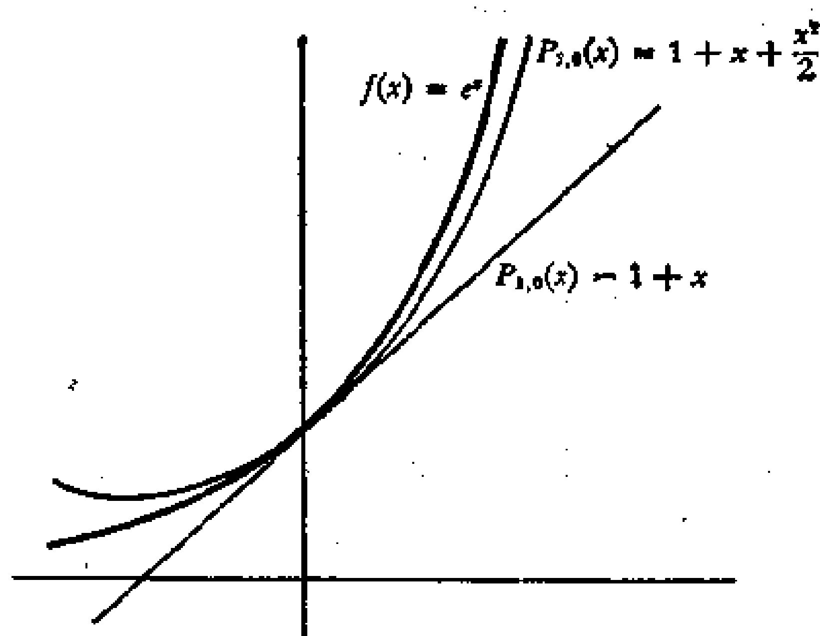


图 1

对于 $f(x)=e^x$ 和 $a=0$，这意味着

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{1,0}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=0.$$

另一方面，不费力地两次应用罗必塔法则就能证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此，当 x 趋近于 0 时，虽然 $f(x)-P_{1,0}(x)$ 与 x 相比在变小，但它与 x^2 相比却不变小．对于 $P_{2,0}(x)$，情况就完全不同；额外的一项 $x^2/2$ 正好提供恰当的补偿：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0.$$

这个结果对于一般情形仍然是对的——如果 $f'(a)$ 和 $f''(a)$ 存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{2,a}(x)}{(x-a)^2}=0;$$

事实上，对于 $P_{n,a}$，类似的断言也是正确的。

定理 1 假定 f 是一个

$$f'(a), \cdots, f^{(n)}(a)$$

都存在的函数。设

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

并定义

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

证明 明确地写出 $P_{n,a}(x)$，我们得到

$$\frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

引入新函数

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

和

$$g(x) = (x-a)^n$$

是有帮助的。现在我们必须证明

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

注意到

$$Q^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k \leqslant n-1,$$
$$g^{(k)}(x) = n!(x-a)^{n-k}/(n-k)!.$$

于是

$$\lim_{x \to a} [f(x) - Q(x)] = f(a) - Q(a) = 0,$$

$$\lim_{x\to a}[f'(x)-Q'(x)]=f'(a)-Q'(a)=0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to a}[f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)]$$

$$=f^{(n-2)}(a)-Q^{(n-2)}(a)=0,$$

而且

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}g'(x)=\cdots=\lim_{x\to a}g^{(n-2)}(x)=0.$$

因此我们可以应用罗必塔法则 $n-1$ 次，得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

因为 Q 是一个 $n-1$ 次多项式，所以它的 $n-1$ 阶导数是一个常数；事实上，$Q^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(a)$. 因此

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)},$$

而按 $f^{(n)}(a)$ 的定义，末尾的这个极限是 $f^{(n)}(a)/n!$. ▮

定理 1 的一个简单推论使我们能够把第十一章所讲的关于局部最大和最小的判别法完善起来．如果 a 是 f 的一个临界点，则根据十一章定理 5，函数 f 当 $f''(a)>0$ 时在 a 处有一个局部最小值，而当 $f''(a)<0$ 时在 a 处有一个局部最大值．如果 $f''(a)=0$，则得不出任何结论，但可以想到，$f'''(a)$ 的符号也许会给出更进一步的信息；而当 $f'''(a)=0$ 时，$f^{(4)}(a)$ 的符号也许是重要的．更一般地，我们可以问，当

$$(*)\quad f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$f^{(n)}(a)\neq 0$$

时会出现什么状况．假使这样的话，其状况可通过考察满足(*)的函数

$$f(x)=(x-a)^n,$$

$$g(x)=-(x-a)^n$$

推测出来．注意到(图 2)，如果 n 是奇数，则 a 对于 f 或 g 既不是

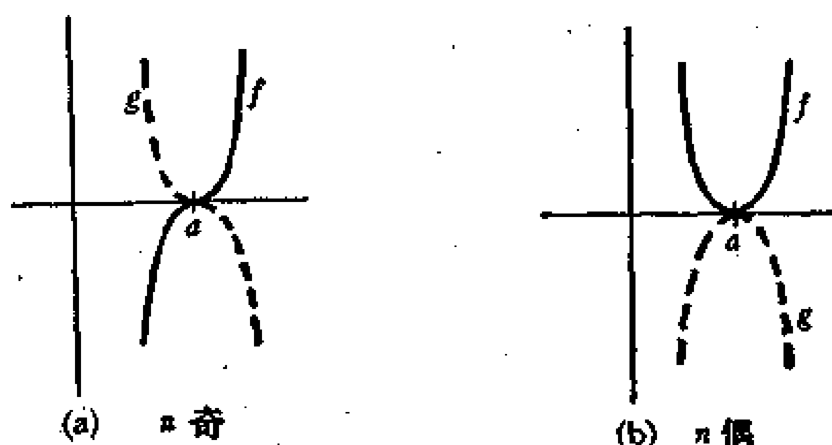


图 2

一个局部最大点也不是一个局部最小点．另一方面，如果 n 是偶数，则具有正的 n 阶导数的 f 在 a 处有一个局部最小值，而具有负的 n 阶导数的 g 在 a 处有一个局部最大值．在所有满足(*)的函数中，这些大概是最简单而有用的；然而它们仍然正确地表示出一般的情况．事实上，下面的证明的全部要点是，在由定理 1 说清楚了的那种意义上说，满足(*)的任何函数非常象这些函数中的一个．

定理 2 假定

$$f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$f^{(n)}(a)\neq 0.$$

(1) 如果 n 是偶数且 $f^{(n)}(a)>0$，则 f 在 a 处有一个局部最小值．

(2) 如果 n 是偶数且 $f^{(n)}(a)<0$，则 f 在 a 处有一个局部最大值．

(3) 如果 n 是奇数，则 f 在 a 处既无局部最大值也无局部最小值．

证明 不失一般性，我们可以假定 $f(a)=0$，因为当以 $f-$

$f(a)$代替f时，定理的假设和结论都不受影响．这样，因为f在a处的前$n-1$阶导数为0，所以f的泰勒多项式$P_{n,a}$是

$$P_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

于是，定理1指出

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{(x-a)^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right].$$

因此，当x充分接近a时，则

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}\text{和}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\text{有相同的符号.}$$

现在假定n是偶数．在此情形中，对于所有的$x\neq a$有

$$(x-a)^n>0.$$

因为对于充分接近a的x，$f(x)/(x-a)^n$和$f^{(n)}(a)/n!$有相同的符号，所以对于充分接近a的x，$f(x)$本身和$f^{(n)}(a)/n!$有相同的符号．如果$f^{(n)}(a)>0$，这就意味着对于接近a的x有

$$f(x)>0=f(a).$$

因此，f在a处有一局部最小．对于$f^{(n)}(a)<0$的情形，可用类似的证明．

现在假定n是奇数．和前面相同的论证证明，若x充分接近a，则

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}\text{总具有同一的符号.}$$

但是对于$x>a$有$(x-a)^n>0$，而对于$x<a$有$(x-a)^n<0$．所以$f(x)$对于$x>a$和$x<a$有着**不同**的符号．这就证明f在a处既没有局部最大，也没有局部最小．▌

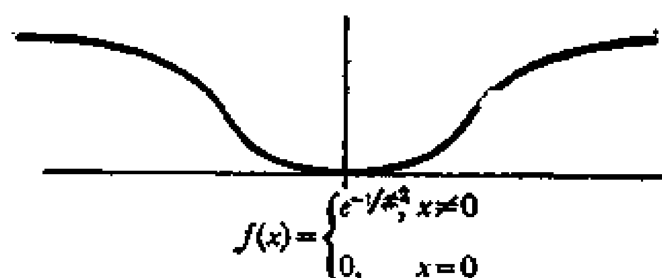
虽然定理2将解决几乎所有在实践中出现的函数的局部最大

和最小的问题，但在理论上确有它的局限性，因为 $f^{(k)}(a)$ 对于所有的 k 可以都等于 0．对于在 0 处有最小值的函数(图 3(a))

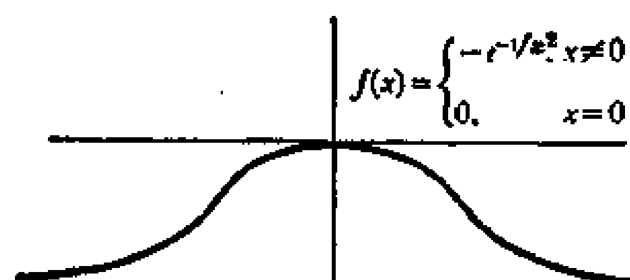
$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

和对于在 0 处有最大值的这个函数的负函数(图 3(b))，都会发生这种情况．另外(图 3(c))，如果

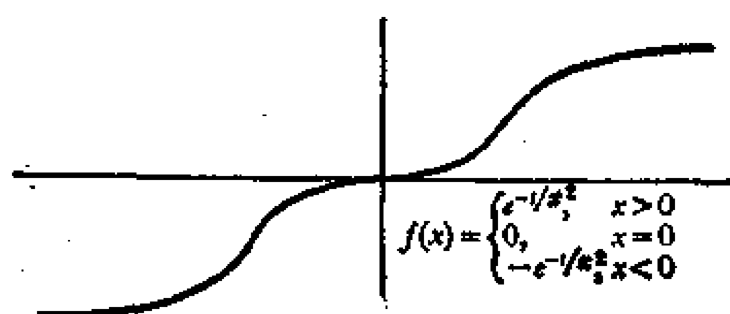
$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x>0\\ 0, & x=0\\ -e^{-1/x^2}, & x<0,\end{cases}$$



(a)



(b)



(c)

图 3

则对于所有的 k 都有 $f^{(k)}(0)=0$，但 f 在 0 处既没有局部最小也没有局部最大.

定理 1 的结论经常用一个重要的概念"相等阶"来表示. 如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n}=0,$$

则称这两个函数 f 和 g **在 a 处相等到 n 阶**. 用这个定义的语言，定理 1 断定泰勒多项式 $P_{n,a,f}$ 与 f 在 a 处相等到 n 阶. 泰勒多项式也许正是为了使这个事实能够成立而设计的，因为最多只有一个次数 $\leqslant n$ 的多项式具有这种性质. 这个断言是下述基本定理的一个推论.

定理 3 设 P 和 Q 是两个用 $x-a$ 表示的，次数 $\leqslant n$ 的多项式，并假定 P 和 Q 在 a 处相等到 n 阶. 则 $P=Q$.

证明 设 $R=P-Q$. 因为 R 是一个次数 $\leqslant n$ 的多项式，所以只需证明，如果

$$R(x)=b_0+\cdots+b_n(x-a)^n$$

满足

$$\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}=0,$$

则 $R=0$. 现在关于 R 的假设无疑含有

$$\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^i}=0,\quad 对于\ 0\leqslant i\leqslant n$$

的意思. 对于 $i=0$，这个条件就是 $\lim\limits_{x\to a}R(x)=0$；另一方面，

$$\lim_{x\to a}R(x)=\lim_{x\to a}[b_0+b_1(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^n]=b_0.$$

于是 $b_0=0$，并且

$$R(x)=b_1(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^n.$$

所以

$$\frac{R(x)}{x-a}=b_1+b_2(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^{n-1}$$

以及

$$\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{x-a}=b_1.$$

于是 $b_1=0$, 并且

$$R(x)=b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n.$$

如此继续下去，我们得

$$b_0=\cdots=b_n=0. ▮$$

推论 设 f 在 a 处是 n 次可微的，并假定 P 是 $x-a$ 的一个次数 $\leqslant n$ 的多项式，它在 a 处与 f 相等到 n 阶. 则 $P=P_{n,a}$.

证明 因为 P 和 $P_{n,a}$ 两者都在 a 处与 f 相等到 n 阶，所以不难看出 P 和 $P_{n,a}$ 在 a 处相等到 n 阶. 因此，根据定理有 $P=P_{n,a}$. ▮

乍看起来，这个推论似乎不必有那样复杂的假设；多项式 P 的存在，似乎自动地意味着：为使 $P_{n,a}$ 存在，f 须是充分可微的. 但事实上并非如此. 例如(图 4)，设

$$f(x)=\begin{cases}x^{n+1}, & x\text{ 为无理数}\\ 0, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$$

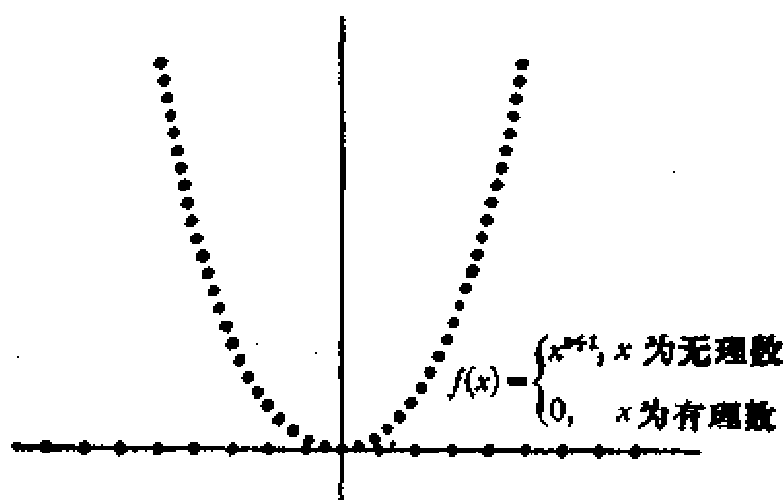


图 4

如果 $P(x)=0$, 则 P 无疑是一个在 0 处与 f 相等到 n 阶的次数 $\leqslant n$

的多项式。另一方面，$f'(a)$对于任何 $a\neq 0$ 都不存在，因此 $f''(0)$ 是没有定义的.

然而，当 f 在 a 处的确有 n 个导数时，这个推论却能提供一种求 f 的泰勒多项式的有用的方法. 特别是，回忆一下我们求arctan的泰勒多项式的初次尝试曾以失败而告终. 等式

$$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

暗示一种有希望的寻求逼近于 arctan 的多项式的方法——用 $1+t^2$ 除 1，得到一个附加一个余项的多项式：

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

这个容易通过用 $1+t^2$ 乘其两边加以验证的公式证明

$$\arctan x=\int_0^x 1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^n t^{2n}dt$$

$$+(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$+(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

根据我们的推论，倘若

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt}{x^{2n+1}}=0,$$

则这里所出现的多项式将是 arctan 在 0 处的 $2n+1$ 阶泰勒多项式. 因为

$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|\leqslant\left|\int_0^x t^{2n+2}dt\right|=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

所以这个条件显然成立．这样，我们就求出了 arctan 在 0 处的 $2n+1$ 阶泰勒多项式

$$P_{2n+1,0}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

顺便指出，既然我们已经找到了 arctan 的泰勒多项式，就可以倒过来进行，并对所有的 k 求出 $\arctan^{(k)}(0)$：因为

$$P_{2n+1,0}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

又因为这个多项式按定义为

$$\arctan^{(0)}(0)+\arctan^{(1)}(0)x+\frac{\arctan^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\arctan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

所以我们只要令这两个多项式中的 x^k 的系数相等即可求出 $\arctan^{(k)}(0)$：

$$\frac{\arctan^{(k)}(0)}{k!}=0, \text{当 } k \text{ 是偶数时},$$

$$\frac{\arctan^{(2l+1)}(0)}{(2l+1)!}=\frac{(-1)^l}{2l+1}$$

或
$$\arctan^{(2l+1)}(0)=(-1)^l\cdot(2l)!.$$

如果我们回到原来的等式

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt,$$

并回忆估计：

$$\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

那么一个更有趣的事实就会出现．当 $|x|\leqslant1$ 时，这个式子最多等

于 $1/(2n+3)$，并且我们只要选取足够大的 n 就可以使它要多小就有多小．换句话说，对于 $|x|\leqslant 1$，我们可应用 arctan 的泰勒多项式要多精确就多精确地算出 $\arctan x$．关于泰勒多项式的一些最重要的定理把这个孤立的结果推广到其他函数，泰勒多项式就马上会起全新的作用．至今所证明过的定理总是对于固定的 n，考察泰勒多项式 $P_{n,a}$ 在 x 趋近 a 时的性态．今后我们将对于固定的 x 和不同的 n 比较各泰勒多项式 $P_{n,a}$．在期待就要到来的定理时，我们引进一个新的记号．

如果 f 是一个 $P_{n,a}(x)$ 存在的函数，我们用下式确定余项 $R_{n,a}(x)$

$$f(x)=P_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,a}(x).$$

我们希望有一个关于 $R_{n,a}(x)$ 的容易估计大小的式子．正如关于 arctan 的情况一样，有这样一个包含积分的式子．推测这个式子的一种方法是从 $n=0$ 的情况开始：

$$f(x)=f(a)+R_{0,a}(x).$$

微积分基本定理使我们能写出

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$

所以

$$R_{0,a}(x)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

一个关于 $R_{1,a}(x)$ 的类似的式子，可以以一种有点巧妙的方式应用分部积分法由上述公式推导出来：令

$$u(t)=f'(t) \text{和} v(t)=t-x$$

（注意到在关于 $v(t)$ 的式子中，x 代表某个固定的数，所以 $v'(t)=1$）；则

$$\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x f'(t)\cdot 1dt$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$u(t)v'(t)$$

$$=u(t)v(t)\Big|_a^x-\int_a^x f''(t)(t-x)dt.$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$u'(t) \quad v(t)$$

因为 $v(x)=0$, 我们得到

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+\int_a^x f'(t)dt\\&=f(a)-u(a)v(a)+\int_a^x f''(t)(x-t)dt\\&=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)dt.\end{aligned}$$

所以

$$R_{1,a}(x)=\int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

要说出之所以选择 $v(t)=t-x$ 而不选取 $v(t)=t$ 的动机是很难的. 这只是碰巧能够解决问题的选择, 通过多次类似的但是无用的演算, 就可能发现这种选法. 然而, 现在容易推测出关于 $R_{2,a}(x)$的公式. 如果

$$u(t)=f''(t) \text{ 和 } v(t)=\frac{-(x-t)^2}{2},$$

则 $v'(t)=(x-t)$, 于是

$$\begin{aligned}\int_a^x f''(t)(x-t)dt&=u(t)v(t)\Big|_a^x-\int_a^x f'''(t)\cdot\frac{-(x-t)^2}{2}dt\\&=\frac{f''(a)(x-a)^2}{2}+\int_a^x\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2dt.\end{aligned}$$

这证明

$$R_{2,a}(x)=\int_a^x\frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2dt.$$

你现在应当不会有什么困难用归纳法严格地证明：如果$f^{(n+1)}$在$[a, x]$上连续，则

$$R_{n,a}(x)=\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

这个公式称为余项的积分形式，由这个公式能够(第 13 题)推导出关于 $R_{n,a}(x)$的另外两种重要的表达式：余项的柯西形式

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a), \text{对于}(a, x)\text{内的某个}t,$$

和余项的拉格朗日形式

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{对于}(a, x)\text{内的某个} t.$$

在下一个定理(泰勒定理)的证明中，我们将以一种完全不同的方式推导出余项的所有三种形式。这种证法的一个优点（除了它的巧妙之外)在于：可以没有 $f^{(n+1)}$是连续的这个额外的前提而证出余项的柯西形式和拉格朗日形式. 以这种方式，泰勒定理作为中值定理的一个直接推广而出现，对于$n=0$，它就简化为中值定理，而后者又是证明前者所用的一个起决定作用的工具.

这些说明也许可以暗示一种证明泰勒定理的方案. 既然$R_{n,a}(a)=0$，我们就可试着将中值定理应用于表示式

$$\frac{R_{n,a}(x)}{x-a}=\frac{R_{n,a}(x)-R_{n,a}(a)}{x-a}.$$

然而，经慎重考虑后，这种想法又不象是很有希望的，因为对于$f^{(n+1)}(t)$究竟将怎样被包含在解答中，是一点也不清楚的. 的确，如果我们选择这条最直截了当的途径，并对定义 $R_{n,a}$ 的等式的两边进行微分，我们得

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+R_{n,a}'(x),$$

而这是没用的．中值定理的适当的应用与上述用分部积分法所作的证明，有许多共同之处．这个证明涉及这样一个函数的导数，在这个函数中，x 表示一个固定的数．在下面的证明中，正是这样看待 x 的．

定理 4（泰勒定理） 假定 $f',\cdots,f^{(n+1)}$ 在 $[a,x]$ 上有定义，并设 $R_{n,a}(x)$ 被定义为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n,a}(x).$$

则

(1) $R_{n,a}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$,

对于 (a,x) 内的某个 t.

(2) $R_{n,a}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,

对于 (a,x) 内的某个 t.

另外，如果 $f^{(n+1)}$ 在 $[a,x]$ 上是可积的，则

(3) $R_{n,a}(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$

（如果 $x<a$，则在假设中应说明 f 在 $[x,a]$ 上是 $n+1$ 次可微的；这时(1)和(2)中的数 t 将在 (x,a) 内，而若 $f^{(n+1)}$ 在 $[x,a]$ 上可积，则(3)将仍保持原状．）

证明 对于 $[a,x]$ 内的每个数 t，我们有

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+R_{n,t}(x).$$

让我们以 $S(t)$ 表示数 $R_{n,t}(x)$，则函数 S 在 $[a,x]$ 上有定义，并且我们有

$$(*)\ f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+S(t),$$

对于 $[a,x]$ 内的一切 t.

我们现在将微分这个等式的两边，这个等式断言在t处的值是$f(x)$的函数，等于在 t 处的值是

$$f(t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+S(t)$$

的函数.（照一般的说法，我们是把(*)的两边都看作"t的函数".）只要确保字母 x 不致引起混淆，就可以注意到，如果

$$g(t)=f(x), \text{对于所有的} t,$$

则

$$g'(t)=0, \text{对于所有的} t;$$

以及若

$$g(t)=\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

则

$$\begin{aligned} g'(t)&=\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1)+\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &=-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}+\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k. \end{aligned}$$

将这些公式应用于(*)的各项，我们得

$$\begin{aligned} 0=f'(t)&+\left[-f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] \\ &+\left[\frac{-f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right]+\cdots \\ &+\left[\frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] \\ &+S'(t). \end{aligned}$$

在这个美妙的公式中，看得见的各项差不多都互相抵销，从而我们得到

$$S'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

现在我们可以在$[a, x]$上将中值定理应用于函数 S：在(a, x)内有某个 t 使

$$\frac{S(x)-S(a)}{x-a}=S'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

回想到

$$S(t)=R_{n,t}(x),$$

这特别意味着

$$S(x)=R_{n,x}(x)=0,$$

$$S(a)=R_{n,a}(x).$$

于是

$$\frac{0-R_{n,a}(x)}{x-a}=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

或

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a);$$

这是余项的柯西形式.

为了推导出(余项的)拉格朗日形式，我们把柯西中值定理应用于函数S和$g(t)=(x-t)^{n+1}$：在(a, x)内有某个 t 使得

$$\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{S'(t)}{g'(t)}=\frac{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}{-(n+1)(x-t)^n},$$

于是

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

或

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

这是(余项的)拉格朗日形式.

最后，如果 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, x]$ 上是可积的，则

$$S(x)-S(a)=\int_a^x S'(t)dt=-\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

或

$$R_{n,a}(x)=\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \blacksquare$$

虽然余项的拉格朗日和柯西形式不只是具有理论上的奇妙(例如，见习题二十二，16)，但是余项的积分形式通常是非常合适的，如果对于 $a=0$ 将这种形式应用于函数 sin，cos 和 exp，则由泰勒定理可得下列公式：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$+\int_0^x \frac{\sin^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}dt,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$+\int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!}(x-t)^{2n}dt,$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt.$$

明确地计算出这些积分中的任何一个，都是很蠢的——答案当然将精确地等于左边和右边所有其余各项的差！然而，估计这些积分却是既容易而又值得去做的.

头两个积分特别容易. 因为对于所有的 t，

$$|\sin^{(2n+2)}(t)|\leqslant 1,$$

所以我们有

$$\left|\int_0^x \frac{\sin^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{(2n+1)!}\left|\int_0^x (x-t)^{2n+1}dt\right|.$$

因为

$$\int_0^x (x-t)^{2n+1}dt = \left.\frac{-(x-t)^{2n+2}}{2n+2}\right|_{t=0}^{t=x}$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$

所以我们断定

$$\left|\int_0^x \frac{\sin^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}dt\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

类似地，我们可以证明

$$\left|\int_0^x \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n)!}(x-t)^{2n}dt\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

这些估计特别有趣，因为(正如在第十六章中所证明过的那样)对于任意的 $e>0$，我们都可以通过选取足够大的 n(n必须多大，将依x而定)使得

$$\frac{x^n}{n!} < e.$$

这使我们只要通过计算适当的泰勒多项式 $P_{n,0}(x)$，就能将$\sin x$计算到所要求的任意的精确度．例如，我们要计算 $\sin 2$ 使其误差小于 10^{-4}．因为

$$\sin 2 = P_{2n+1,0}(2) + R,\quad 其中 |R| \leqslant \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

所以只要

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4},$$

我们就可以用 $P_{2n+1,0}(2)$ 作为我们的答案．满足上列不等式的数 n 可以用直接寻找的办法求出——准备一个$n!$ 和2^n的数值表显然是有帮助的(见第 3 题的附表)．在此情况下，$n=5$就符合要求，于是

$$\sin 2 = P_{11,0}(2) + R$$

$$= 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R,$$

其中 $|R| < 10^{-4}$.

近似地计算 sin1 甚至更为容易，因为

$$\sin 1 = P_{2n+1,0}(1) + R, \text{其中} |R| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

为了得到一个小于 ε 的误差，我们只需找出一个这样的 n 使得

$$\frac{1}{(2n+2)!} < \varepsilon,$$

而这只要看一下阶乘表就行了.（另外，$P_{2n+1,0}(1)$的各项将是更容易处理的.）

对于很小的 x，该估计将更加容易．例如，

$$\sin\frac{1}{10} = P_{2n+1,0}\left(\frac{1}{10}\right) + R, \text{ 其中} |R| < \frac{1}{10^{2n+2}(2n+2)!}.$$

要使 $|R| < 10^{-10}$，我们显然可取 $n=4$（我们甚至取 $n=3$ 也能达到目的）．这些方法实际上被用来计算sin和 cos 的表．一架高速计算机几乎可以立刻算出关于许多不同的 x 的 $P_{2n+1,0}(x)$的值.

估计关于 e^x 的余项只是稍微难些．为简单起见，假定 $x \geqslant 0$（关于 $x \leqslant 0$ 时的估计将在第 9 题中得出）．e^t 在区间$[0, x]$上的最大值是 e^x，这是因为 exp 是递增的，所以

$$\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt \leqslant \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因为我们已经知道 $e < 4$，所以有

$$\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!},$$

借助于选取充分大的 n，就可以使该式的值要多小就有多小．n 应该多大，将依 x 的值而定（而因子 4^x 会使事情更困难一些）．对于小的 x，余项的估计又会容易一些．设 $0 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R, \text{其中 } 0<R<\frac{4}{(n+1)!}.$$

(不等式 $0<R$ 可直接由 R 的积分形式得出.)特别是，如果 $n=4$，则

$$0<R<\frac{4}{5!}<\frac{1}{10},$$

所以

$$\begin{aligned} e=e^1&=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+R \qquad \left(\text{其中 } 0<R<\frac{1}{10}\right)\\ &=\frac{65}{24}+R\\ &=2+\frac{17}{24}+R, \end{aligned}$$

这个等式说明

$$2<e<3.$$

(这容许我们稍许改进我们对于 R 的估计:

$$0<R<\frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!}.)$$

取 $n=7$，你就能计算出 e 的前三位小数是

$$e=2.718\cdots$$

(你应该核对一下，$n=7$ 的确给出这种精确度，不过，坚持要你真的进行这种计算，将会是苛刻的).

函数 arctan 也是重要的，但是，你可以回忆一下，关于 $\arctan^{(k)}(x)$ 的表达式令人失望地复杂，所以，此时余项的积分形式是无用的. 另一方面，我们关于 arctan 的泰勒多项式的推导却自动地提供了一个关于余项的公式:

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

正如我们已经估计过的那样，

$$\left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leqslant \left|\int_0^x t^{2n+2}dt\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

暂时我们将只考虑$|x|\leqslant 1$的数x. 在这种情况下，选取充分大的n，显然可使该余项要多小就有多小. 特别是，

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R,$$

$$\text{其中} |R| < \frac{1}{2n+3}.$$

用这个估计容易求出一个 n，这个n能使余项小于任何预先指定的数；另一方面，n往往要取得很大，使计算长得令人生畏. 例如，为了得到一个$<10^{-4}$的余项，我们就必须取$n>(10^4-3)/2$. 这实在不好意思，因为 $\arctan 1=\pi/4$，所以我们由 arctan 的泰勒多项式应能计算 π. 幸好，有些巧妙的办法能使我们克服这些困难. 既然

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

那么只有对于小一些的x，才能用较小的n. 计算π的技巧是用较小x的$\arctan x$来表示$\arctan 1$；第 5 题说明怎样才能以方便的方法做到这一点.

对于函数$f(x)=\log(x+1)$ 在$a=1$ 处的泰勒多项式最好用和 arctan 的泰勒多项式同样的方式去处理. 虽然f的余项的积分形式不难写出，但余项的估计还是困难的. 另一方面，如果我们从等式

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

开始，我们将得到一个简单的公式；这暗指对于所有的$x>-1$有

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt.$$

如果 $x\geqslant 0$, 则

$$\int_0^x\frac{t^n}{t+1}dt\leqslant\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

而当 $-1<x<0$ 时，有一个稍微复杂些的估计（第 10 题）．假定 $-1<x\leqslant 1$，将 n 取得充分大，就能使这个函数的余项要多小就有多小．

当 $|x|>1$ 时，arctan 和 $f(x)=\log(x+1)$ 的余项的性态就完全是另外一回事．在这种情况下，这些估计

$$|R_{2n+1,0}(x)|<\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}, \text{对于arctan},$$

$$|R_{n,0}(x)|<\frac{x^{n+1}}{n+1}, (x>0)\text{对于} f,$$

是无用的，因为当 $|x|>1$ 时界限 x^m/m 随着 m 的变大而变大．这种困境是不可避免的，而这实在不是我们的估计本身的缺陷．容易从另一方面得出这些估计，证明余项确实还是大的．为了得到对于 arctan 的这样的一种估计，注意到，如果 t 在$[0,x]$内(或当 $x<0$ 时 t 在$[x,0]$内)，则

$$1+t^2\leqslant 1+x^2\leqslant 2x^2, \text{如果} |x|\geqslant 1,$$

所以

$$\left|\int_0^x\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right|\geqslant\frac{1}{2x^2}\left|\int_0^x t^{2n+2}dt\right|=\frac{|x|^{2n+1}}{4n+6}.$$

同样地，如果 $x>0$，则对于$[0,x]$内的 t，我们有

$$1+t\leqslant 1+x\leqslant 2x, \text{如果} x\geqslant 1,$$

所以

$$\int_0^x\frac{t^n}{t+1}dt\geqslant\frac{1}{2x}\int_0^x t^n dt=\frac{x^n}{2n+2}.$$

这些估计说明，如果 $|x|>1$，则余项将随着 n 的变大而变大．换句

话说，对于$|x|>1$来说，arctan 和f的泰勒多项式在计算 arctan$x$ 和 $\log(x+1)$ 时一点用处都没有. 这不足为虑，因为一旦知道这些函数对于$|x|<1$的所有x的值，它们对于任意x的值就能求出.

上述情形，在函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

中，将以引人注目的方式出现. 我们已经看到过，对于每个自然数k都有$f^{(k)}(0)=0$. 这意味着f的泰勒多项式$P_{n,0}$是

$$P_{n,0}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0.$$

换句话说，余项$R_{n,0}(x)$总是等于$f(x)$，且除了对于$x=0$以外，泰勒多项式对于计算$f(x)$是无用的. 我们终将能够对这个函数的性态提出某种说明，这是一个使泰勒定理因其局限而困窘的实例.

在估计余项时曾经常用到“计算”一词，致使泰勒定理的意义可能被误解. 泰勒定理确实是一个近于理想的助算工具（尽管它在前一例子中显得无能为力），但它还有同样重要的理论上的结果. 这些结果中的大部分将在以后章节中讨论，但有两个证明将说明泰勒定理可以应用的某些途径. 头一个例证，对于那些曾经啃完第十六章π是无理数的证明的人来说，将是特别难以忘怀的.

定理 5 e是无理数.

证明 我们知道，对于任意的n，都有

$$e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n, \text{其中 } 0<R_n<\frac{3}{(n+1)!}.$$

假定e是有理数，比如说$e=a/b$，其中a和b是正整数. 选取$n>b$并且还要$n>3$. 则

$$\frac{a}{b}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n,$$

从而

$$\frac{n!a}{b}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+n!R_n.$$

除了 $n!R_n$ 外，这个等式中的其余各项都是整数(因 $n>b$，所以左边是一个整数)．因此，$n!R_n$ 也必定是一个整数．但

$$0<R_n<\frac{3}{(n+1)!},$$

于是

$$0<n!R_n<\frac{3}{n+1}<\frac{3}{4}<1,$$

而这对于一个整数是不可能的．▌

第二个例证只是对第十五章中所证明过的事实作一个直接的证明：如果

$$f''+f=0,$$
$$f(0)=0,$$
$$f'(0)=0,$$

则 $f=0$．为了证明这一点，首先注意到 $f^{(k)}$ 对于每个 k 都存在；事实上

$$f^{(3)}=(f'')'=-f',$$
$$f^{(4)}=(f^{(3)})'=(-f')'=-f''=f,$$
$$f^{(5)}=(f^{(4)})'=f',$$

等等．

这不仅证明所有的 $f^{(k)}$ 都存在，而且还证明至多只有四种不同的 $f^{(k)}$：$f, f', -f, -f'$．因为 $f(0)=f'(0)=0$，所以所有的 $f^{(k)}(0)$ 都等于0．现在，泰勒定理说明，对于任意的n，都有

$$f(x)=\int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

每个函数 $f^{(n+1)}$ 都是连续的(因为 $f^{(n+2)}$ 存在)，所以对于任何特定

的 x 都存在着一个数 M，使得

$$|f^{(n+1)}(t)|\leqslant M, \text{对于} 0\leqslant t\leqslant x \text{和一切} n$$

（我们之所以能加上“和一切 n”这个短语，是因为只有四种不同的 $f^{(k)}$）．于是

$$|f(x)|\leqslant M\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt\right|=\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

既然这对每个 n 都成立，并且把 n 取得充分大，能使 $x^n/n!$ 要多小就有多小，这就证明了对于任意的 $\varepsilon>0$ 都有 $|f(x)|<\varepsilon$；因此，$f(x)=0$．

在以后章节中，泰勒定理的其他应用是和我们在本章中多次涉及的计算上的考虑密切相关的．通过把 n 选得充分大，能使余项 $R_{n,a}(x)$ 要多小就有多小，那么就能用多项式 $P_{n,a}(x)$ 将 $f(x)$ 计算到任意要求的精确度．我们所要求的精确度越高，所要加上的项数就越多．如果我们愿意加到无穷多个项（至少在理论上！），那么我们应该能够完全不顾余项．应该有如下的“无穷和”

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots,$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots, \text{如果} |x|\leqslant 1,$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots, \text{如果} -1<x\leqslant 1.$$

我们几乎圆满地准备好了这一步骤，只剩下一个障碍——我们从未定义过无穷和．第二十一和二十二章包含这些必须的定义．

习　　题

1. 求下列函数(在指定点的、指定阶数)的泰勒多项式。
   - (i)　$f(x)=e^{e^x}$; 3 阶, 在 0 处.
   - (ii)　$f(x)=e^{\sin x}$; 3 阶, 在 0 处.
   - (iii)　sin; $2n$ 阶, 在 $\frac{\pi}{2}$ 处.
   - (iv)　cos; $2n$ 阶, 在 π 处.
   - (v)　exp; n 阶, 在 1 处.
   - (vi)　log; n 阶, 在 2 处.
   - (vii)　$f(x)=x^5+x^3+x$; 4 阶, 在 0 处.
   - (viii)　$f(x)=x^5+x^3+x$; 4 阶, 在 1 处.
   - (ix)　$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $2n+1$ 阶, 在 0 处.
   - (x)　$f(x)=\frac{1}{1+x}$; n 阶, 在 0 处.
2. 将下列 x 的多项式写成 $x-3$ 的多项式.(只需计算在 3 处的与原多项式次数相同的泰勒多项式. 为什么?)
   - (i)　x^2-4x-9.
   - (ii)　$x^4-12x^3+44x^2+2x+1$.
   - (iii)　x^5.
   - (iv)　ax^2+bx+c.
3. 写出与下列各数相等的和 (应用记号 Σ), 使其精确度在指定范围内. 为了最大限度地减少不必要的计算, 可查本题后面 2^n 和 $n!$ 的表.
   - (i)　$\sin 1$; 误差 $<10^{-17}$.
   - (ii)　$\sin 2$; 误差 $<10^{-12}$.
   - (iii)　$\sin\frac{1}{2}$; 误差 $<10^{-20}$.
   - (iv)　e; 误差 $<10^{-4}$.
   - (v)　e^2; 误差 $<10^{-5}$.

n	2^n	$n!$
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5,040
8	256	40,320
9	512	362,880
10	1,024	3,628,800
11	2,048	39,916,800
12	4,096	479,001,600
13	8,192	6,227,020,800
14	16,384	87,178,291,200
15	32,768	1,307,674,368,000
16	65,536	20,922,789,888,000
17	131,072	355,687,428,096,000
18	262,144	6,402,373,705,728,000
19	524,288	121,645,100,408,832,000
20	1,048,576	2,432,902,008,176,640,000

*4. 除了所要求的误差很小，以致不能应用上表之外，这一题和前一题是类似的. 你必须稍加思索，而在某些情况下，或许还要参考第十六章中关于把 n 取得很大时能使 $x^n/n!$ 很小的证明——这个证明实际上提供了一种求合适的 n 的方法. 在前一题中，能够找到相当短的和；实际上，能够找到最小的 n，使得由泰勒定理所给出的余项估计小于所要求的误差. 但在这一题中，找到任何明确的和，是精神上的胜利（只要你能证实这个和行得通）.

(i) $\sin 1$；误差 $<10^{-(10^{10})}$.

(ii) e；误差 $<10^{-1,000}$.

(iii) $\sin 10$；误差 $<10^{-20}$.

(iv) e^{10}；误差 $<10^{-30}$.

(v) $\arctan\frac{1}{10}$；误差 $<10^{-(10^{10})}$.

5. (a) 应用习题十五,8 证明

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

(b) 证明 $\pi=3.14159\cdots$. (每个年轻人应当亲自验证 π 的几位小数,但本练习的目的不是要你进行大量的计算. 如果应用(a)中的第二个式子, π 的前五位小数只要少量工作就能算出.)

6. 对于每个数 a, 和每个非负整数 n, 我们定义"二项式系数"为

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

如果 a 不是整数, 则 $\binom{a}{n}$ 永不为 0, 且当 $n>a$ 时其符号将交替变更.

证明: 关于 $f(x)=(1+x)^a$ 在 0 处的 n 阶泰勒多项式为

$$P_{n,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k,$$

且其余项的柯西形式和拉格朗日形式如下:

柯西形式:

$$\begin{aligned}R_{n,0}(x)&=\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}x(x-t)^n(1+t)^{a-n-1}\\&=\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{n!}x(1+t)^{a-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n\\&=(n+1)\binom{a}{n+1}x(1+t)^{a-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n,\end{aligned}$$

t 在$[0,x]$或$[x,0]$内.

拉格朗日形式:

$$\begin{aligned}R_{n,0}(x)&=\frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+t)^{a-n-1}\\&=\binom{a}{n+1}x^{n+1}(1+t)^{a-n-1},\end{aligned}$$

t 在$[0,x]$或$[x,0]$内.

对于这些余项的估计较难处理, 将留待习题二十二,16 中去解决.

7. 假设 a_i 和 b_i 分别是 f 和 g 在 a 处的泰勒多项式的系数. 换句话说,

$a_i=f^{(i)}(a)/i!$和$b_i=g^{(i)}(a)/i!$. 求下列函数在a处的泰勒多项式的以诸a_i及b_i表示的系数c_i.

(i) $f+g$.

(ii) fg.

(iii) f'.

(iv) $h(x)=\int_a^x f(t)dt$.

(v) $k(x)=\int_0^x f(t)dt$.

*8. (a) 证明$f(x)=\sin(x^2)$在0处的$4n+2$阶泰勒多项式为

$$x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

提示:若P为sin在0处的$2n+1$阶泰勒多项式,则$\sin x=P(x)+R(x)$,其中$\lim_{x\to 0}R(x)/x^{2n+1}=0$.对于$\lim_{x\to 0}R(x^2)/x^{4n+2}$,这意味着什么?

(b) 对所有的k求$f^{(k)}(0)$.

(c) 一般地,如果$f(x)=g(x^n)$,求出以g在0处的导数表示的$f^{(k)}(0)$.

9. 证明:若$x\leqslant 0$,则

$$\left|\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

10. 证明:如果$-1<x\leqslant 0$,则

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

*11. (a) 证明:如果对于$|x-a|<\delta$有$|g'(x)|\leqslant M|x-a|^n$,则对于$|x-a|<\delta$有$|g(x)-g(a)|\leqslant M|x-a|^{n+1}/(n+1)$.

(b) 应用(a)证明:如果$\lim_{x\to a}(g'(x)/(x-a)^n)=0$,则

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}}=0.$$

(c) 证明:如果$g(x)=f(x)-P_{n,a,f}(x)$,则

$$g'(x)=f'(x)-P_{n-1,a,f'}(x).$$

(d) 不用罗必塔法则,给出定理1的归纳证明.

12. 用余项的任一形式,作为泰勒定理的一个推论导出定理1.(困难在于

必须假定比定理 1 假设中所要求的多一阶的导数.)

13. 应用习题十三,27 和十三, 28, 由余项的积分形式推导余项的柯西形式和拉格朗日形式. 将有象第 12 题中那样的困难.

14. (a) 证明: 如果 $f''(a)$存在,则

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

提示: 应用具有 $x=a+h$ 和 $x=a-h$ 的二阶泰勒多项式.

(b) 设当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=x^2$, 而当 $x\leqslant 0$ 时 $f(x)=-x^2$. 证明: 即使 $f''(0)$不存在,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

也存在.

15. 应用泰勒多项式 $P_{1,a,f}$ 及其余项,证明第十一章附录的定理 2 的弱形式: 如果 $f''>0$, 则除了在切点之外, f 的图形总是在 f 的切线的上方.

*16. 习题十七, 32 曾提出一个有点复杂的证明: 如果 $f''-f=0$ 和 $f(0)=f'(0)=0$, 则 $f=0$. 应用泰勒定理给出另一证明. (本题实际上是对第 17 题中的一般情形进行会战前的预备,其用意是要使你确信,即使对于特殊情形能用技巧更简练地解决问题,但泰勒定理仍然是解决这类问题的良好工具.)

**17. 研究满足下面微分方程的函数 f,

$$f^{(n)}=\sum_{j=0}^{n-1}a_jf^{(j)},$$

其中 a_0, …, a_{n-1} 为某些确定的数. 几种特殊情形已在课文或别的习题中详细讨论过;特别是,我们已经求出了满足 $f'=f$ 或 $f''+f'=0$或 $f''-f=0$ 的所有函数. 习题十七, 31 中的技巧使得我们能够求出这种方程的许多解,但却没说出这些解是否是仅有的解. 这需要一个由本题所提供的唯一性结果. 在本题末尾你将看到对通解所作的某些(必然是粗略的)议论.

(a) 导出下面关于 $f^{(n+1)}$的公式(让我们约定"a_{-1}"等于 0):

$$f^{(n+1)}=\sum_{j=0}^{n-1}(a_{j-1}+a_{n-1}a_j)f^{(j)}$$

(b) 导出一个关于 $f^{(n+2)}$ 的公式.

在(b)中的公式是不打算使用的;把它写在这里,只是为了使你确信不可能求出 $f^{(n+k)}$ 的一般公式. 另一方面, 如(c)所示, 要得出关于 $f^{(n+k)}(x)$ 的大小的估计不是很难的.

(c) 令 $N=\max(1, |a_0|, \dots, |a_{n-1}|)$. 则 $|a_{j-1}+a_{n-1}a_j|\leqslant 2N^2$; 这意味着

$$f^{(n+1)}=\sum_{j=0}^{n-1} b_j^1 f^{(j)}, \quad 其中 |b_j^1|\leqslant 2N^2.$$

证明

$$f^{(n+2)}=\sum_{j=0}^{n-1} b_j^2 f^{(j)}, \quad 其中 |b_j^2|\leqslant 4N^3,$$

并且,更一般地,

$$f^{(n+k)}=\sum_{j=0}^{n-1} b_j^k f^{(j)}, \quad 其中 |b_j^k|\leqslant 2^k N^{k+1}.$$

(d) 由(c)断定,对于任何特定的数 x, 都存在一个数 M 使得

$$|f^{(n+k)}(x)|\leqslant M\cdot 2^k N^{k+1}, 对于所有的 k.$$

(e) 现在假设 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. 证明

$$|f(x)|\leqslant \frac{M\cdot 2^{k+1}N^{k+2}|x|^{n+k+1}}{(n+k+1)!}$$
$$\leqslant \frac{M\cdot |2Nx|^{n+k+1}}{(n+k+1)!},$$

并断定 $f=0$.

(f) 证明: 如果 f_1 和 f_2 是微分方程

$$f^{(n)}=\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)}$$

的解,并且对于 $0\leqslant j\leqslant n-1$ 有 $f_1{}^{(j)}(0)=f_2{}^{(j)}(0)$, 则 $f_1=f_2$.

换句话说,这个微分方程的解由"初值条件"(关于 $0\leqslant j\leqslant n-1$ 的诸值 $f^{(j)}(0)$)确定. 这意味着, 一旦我们能够为获得任意给定的

初值条件而找到足够的解，我们就能求出所有的解。如果方程

$$x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_0=0$$

有 n 个不同的根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，则具有形式

$$f(x)=c_1e^{\alpha_1 x}+\cdots+c_ne^{\alpha_n x}$$

的任何函数是一个解，并且

$$\begin{aligned} f(0) &=c_1+\cdots+c_n, \\ f'(0) &=\alpha_1c_1+\cdots+\alpha_nc_n, \\ &\vdots \\ f^{n-1}(0) &=\alpha_1^{n-1}c_1+\cdots+\alpha_n^{n-1}c_n. \end{aligned}$$

事实上，每个解都具有这种形式，因为我们适当地选取各个 c，就能得到左边的任意的数组，但我们不打算证明这个最后的断言。(这纯是代数上的事实，你不难对 $n=2$ 或 $n=3$ 验证一下。)如果有些根是重根，甚至在第二十六章中所研究的更一般的情形下，这些议论也是正确的。

*18. (a) 设当 $x\neq0$ 时 $f(x)=x^4\sin 1/x^2$，而 $f(0)=0$。证明在 0 处 $f=0$ 直到 2 阶，即使 $f''(0)$不存在。

与课文中的例子相比较，这个例子稍微复杂些，但给人的印象也更深刻一些，因为对于 $a\neq0$，$f'(a)$和 $f''(a)$都存在。于是，对于每个数 a，有另一个数 $m(a)$使得

$$(*)\qquad f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{m(a)}{2}(x-a)^2+R_a(x),$$

$$\text{其中}\ \lim_{x\to a}\frac{R_a(x)}{(x-a)^2}=0;$$

即当 $a\neq0$ 时 $m(a)=f''(a)$，而 $m(0)=0$。注意，用这种方式定义的函数m不连续。

(b) 设 f 为可微函数。假设有一个函数m使$(*)$对所有的数 a 都成立，并且 m 是连续的。证明：$f''(a)$对于所有的 a 都存在，并且等于 $m(a)$。提示[①]：对 $x=a+h$，$a=a$ 写出$(*)$，并对 $x=a$，$a=a+h$ 写出$(*)$。

① 译注：提示有误，详见《〈微积分〉补充题解》。

***(c) 假设有一个连续函数m使得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$$+\frac{m(a)}{3!}(x-a)^3+R_a(x),$$

$$其中\lim_{x\to a}\frac{R_a(x)}{(x-a)^3}=0.$$

由此可推出 $f'''(a)=m(a)$吗?

选题解答

1. (i) $P_{3,0}(x)=e+ex+ex^2+(5e/3!)x^3$.

(iii) $$P_{2n,\pi/2}(x)=1-\frac{(x-\pi/2)^2}{2!}+\frac{(x-\pi/2)^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}.$$

(v) $$P_{n,1}(x)=e+e(x-1)+\frac{e(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{e(x-1)^n}{n!}.$$

(vii) $P_{4,0}(x)=x+x^3$.

(ix) $P_{2n+1,0}(x)=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}$.

2. 如果f是一个n次多项式函数,则$f^{(n+1)}=0$. 从而由泰勒定理推出$R_{n,a}(x)=0$,所以$f(x)=P_{n,a}(x)$.

(i) $-12+2(x-3)+(x-3)^2$.

(iii) $243+405(x-3)+270(x-3)^2+90(x-3)^3+15(x-3)^4+(x-3)^5$.

3. (i) $$\sum_{i=0}^{9}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(因为当 2n+2\geqslant 19 或 n\geqslant 9 时 \frac{1}{(2n+2)!}<10^{-17}\right).$$

(iii) $$\sum_{i=0}^{8}\frac{(-1)^i}{2^{2i+1}(2i+1)!}\left(因为当 2n+2\geqslant 18 或 n\geqslant 8 时 \frac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!}<10^{-20}\right).$$

(v) $\sum_{i=0}^{11}\frac{2^i}{i!}\left(\text{因为当 } n+1\geqslant 12 \text{ 或 } n\geqslant 11 \text{ 时} \frac{3^2\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}<10^{-6}\right)$.

7. (i) $c_i=a_i+b_i$.

(iii) $c_i=(i+1)a_i$.

(v) $c_0=\int_0^x f(t)dt$；

$c_i=a_{i-1}/i$，$i>0$ 时。

*第二十章　e是超越的

e的无理性已经很容易地证明过，使得我们在这选读的一章中可以尝试完成一项较困难的工作，证明数e不仅是无理的，而实际上还要坏得多. 只要将无理数定义的措辞稍微改变一下，就能暗示出一个数怎样会比无理数更坏. 如果数x对于任何整数a和$b(b\neq 0)$都不可能写成$x=a/b$，则该数x是无理数. 这等于说，除了对于$a=0, b=0$之外，对于整数a和b，x不满足任何方程

$$bx-a=0.$$

用这种见解来观察，$\sqrt{2}$的无理性似乎不存在那么严重的缺陷；更确切地说，$\sqrt{2}$似乎是勉强成为无理数——虽然$\sqrt{2}$不是方程

$$a_1x+a_0=0$$

的解，但它是高一次方程

$$x^2-2=0$$

的解. 习题二，17说明如何产生满足高次方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

的许多无理数x，其中a_i是整数并且$a_0\neq 0$（这个条件排除了全部$a_i=0$的可能性）. 满足这种“代数”方程的数叫做代数数，我们已经迂到的一切数几乎都是用代数方程的解来定义的（π和e在我们有限的数学经验中是超乎寻常的例外）. 所有的根，如

$$\sqrt{2},\ \sqrt[10]{3},\ \sqrt[4]{7},$$

显然都是代数数，甚至复杂的组合，如

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{5}+\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}}+\sqrt[5]{6}$$

也是代数的（尽管我们不打算证明它）. 不能通过解代数方程的方法得到的数叫做超越的；这一章的主要成果是阐明e是这种异样

的数.

证明 e 是超越的完全是我们力所能及的事，甚至在第十九章以前，从理论上说也是可能的. 可是，对于这个证明的内涵来说，我们有理由将自己看成是学习更深一层数学的初学者；虽然许多有关无理性的证明只依靠数的初等性质，但是证明一个数是超越的则往往包含某些真正有大效力的数学. 甚至与 e 的超越性有关系的日期也是相当近的—— e 是超越数的第一个证明是埃尔米特于1873年做出的。我们将要给出的证明是由希尔伯特简化了的。

在开始证明之前，最好先订出一个方案，它依赖于一种甚至在证明 e 是无理数时已经用到的概念. 下式

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n$$

的两个特点对于 e 是无理数的证明曾经是重要的：一方面，数

$$1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

可以写成 $q\leqslant n!$ 的分数 p/q(于是 $n!(p/q)$ 是整数)；另一方面，$0<R_n<3/(n+1)!$ (于是 $n!R_n$ 不是整数). 这两个事实说明 e 可以特别好地用有理数来近似. 当然，每个数 x 都可以任意精确地用有理数来近似——设 $\varepsilon>0$，就有一个有理数 r 使得 $|x-r|<\varepsilon$；但是，困难在于，也许必须让 r 有一个很大的分母，或许要象 $1/\varepsilon$ 一样大. 对于 e，我们确信其情况不是这样：有一个分数 p/q，与 e 的误差在 $3/(n+1)!$ 之内，其分母 q 不超过 $n!$. 你要是仔细地看一下 e 是无理数的证明，就会发现应用的只是关于 e 的这个事实. 就下面这一点来说，数 e 决不是独一无二的：一般地说，一个数越是能更好地用有理数来近似，它就越坏(关于这个论断的某个证据在第3题中提出). e 是超越数的证明依赖于这种概念的推广：不单是 e，而且它的任意有限次幂 e，e^2，…，e^n，都可以同时特

别好地用有理数来近似．在我们的证明中，我们将由假定 e 是代数数开始，这样，对于某些整数 $a_0, \cdots, a_n$，我们有

$$(*)\quad a_n e^n + \cdots + a_1 e + a_0 = 0,\ a_0 \neq 0.$$

为了得出一个矛盾，我们将找出一些整数M，$M_1, \cdots, M_n$ 和一些"小的"数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$，使得

$$e^1 = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M},$$

$$e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M},$$

$$\vdots$$

$$e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M}.$$

这些 ε 应该多小，只有把这些表达式代入假设的等式(*)时才会显示出来．用M遍乘各项后，我们得到

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n] = 0.$$

第一个方括号内的项是一个整数，并且我们将这样选择这些M，使这一项必定是一个非零整数．我们还将设法找出很小的 ε 使得

$$|\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n| < \frac{1}{2};$$

这将导致所要求的矛盾——一个非零整数与一个绝对值小于$\frac{1}{2}$的数的和不可能等于零！

作为一个基本方案，这实在是非常合理和十分直截了当的．证明中值得注意的地方将是定义M和 ε 的方法．要看懂这个证明你将需要知道 Γ 函数！(这个函数曾在习题十八，25 中介绍过．)

定理 1 e 是超越的．

证明 假设有整数 $a_0, \cdots, a_n$，其中 $a_0 \neq 0$，使得

$$(*)\quad a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

将数$M, M_1, \cdots, M_n$ 和 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 定义如下：

$$M=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}dx,$$

$$M_k=e^k\int_k^{\infty}\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}dx,$$

$$\varepsilon_k=e^k\int_0^{k}\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}dx.$$

未指定的数 p 代表一个素数*，我们将在以后选取．尽管这三式的外表看起来很讨厌，但稍加变化后，它们将显得合理得多．我们先将注意力集中在M上．如果把方括号内的式子

$$[(x-1)\cdots(x-n)]$$

居然乘出来，我们就得到一个整数系数的多项式

$$x^n+\cdots\pm n!.$$

当增高到 p 次幂时，这个式子就变为更加复杂的多项式

$$x^{np}+\cdots\pm(n!)^p.$$

于是M可以写成如下形式

$$M=\sum_{\alpha=0}^{np}\frac{1}{(p-1)!}C_\alpha\int_0^{\infty}x^{p-1+\alpha}e^{-x}dx,$$

其中 C_α 是一些整数，并且 $C_0=\pm(n!)^p$．但

$$\int_0^{\infty}x^k e^{-x}dx=k!,$$

因此

$$M=\sum_{\alpha=0}^{np}C_\alpha\frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}.$$

---

* 术语"素数"曾在习题二，16中定义过．在本证明中将要用到一个关于素数的事实，尽管这个事实在本书中没有证明：如果 p 是一个不能整除整数 a 也不能整除整数 b 的素数，则 p 亦不能整除 ab．在建议读物中提到关于这个定理（在证明整数的素数因子分解是唯一的时候，该定理起决定性的作用）的参考书．我们还将用到习题二，16(d)的结果，即存在无穷多个素数——要求读者确定，恰好在什么地方需要这个结果．

现在，对于 $\alpha=0$，我们得到项

$$\pm(n!)^p\frac{(p-1)!}{(p-1)!}=\pm(n!)^p.$$

我们现在只考虑素数 $p>n$，那么这一项就是一个不能被 p 整除的整数. 另一方面，若 $\alpha>0$，则

$$C_\alpha\frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}=C_\alpha(p+\alpha-1)(p+\alpha-2)\cdots p,$$

能被 p 整除. 所以 M 本身是不能被 p 整除的整数.

现在研究 M_k. 我们有

$$M_k=e^k\int_k^\infty\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^pe^{-x}}{(p-1)!}dx$$

$$=\int_k^\infty\frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^pe^{-(x-k)}}{(p-1)!}dx.$$

上式可通过替换

$$u=x-k,$$

$$du=dx,$$

变成一个很象 M 的式子. 其积分限变为 0 和 ∞，并且

$$M_k=\int_0^\infty\frac{(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdots u\cdots(u+k-n)]^pe^{-u}}{(p-1)!}du.$$

该式与表示 M 的式子有一个重要的差别. 方括号内的项在第 k 个因子处含有因子 u. 因此其 p 次幂含有因子 u^p. 这意味着整个式子

$$(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdots(u+k-n)]^p$$

是整数系数的多项式，其中各项的次数至少是 p. 因此

$$M_k=\sum_{\alpha=1}^{np}\frac{1}{(p-1)!}D_\alpha\int_0^\infty u^{p-1+\alpha}e^{-u}du=\sum_{\alpha=1}^{np}D_\alpha\frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

其中 D_α 是某些整数. 注意到求和从 $\alpha=1$ 开始；在此情形中，和中的每一项都是可以被 p 整除的. 因此，每个 M_k 都是能被 p 整除的整数.

显然有

$$e^k=\frac{M_k+e_k}{M}, \qquad k=1, \cdots, n.$$

代入(*) 并用M去乘，我们便得

$$[a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n]+[a_1e_1+\cdots+a_ne_n]=0.$$

除要求 $p>n$ 外，让我们再约定 $p>|a_0|$. 这意味着M和 a_0 都不能被 p 整除，所以 a_0M也不能被 p 整除. 因为每个M_k 都能被 p 整除，故

$$a_0M+a_1M_1+\cdots+a_nM_n$$

不能被 p 整除. 特别是它是一个非零整数.

为了得出与假设的等式 (*) 矛盾的结果，从而证明 e 是超越的，只要证明当 p 取得足够大时能使

$$|a_1e_1+\cdots+a_ne_n|$$

要多小就有多小；显然只要证明每个$|e_k|$ 能要多小就有多小就够了. 这只要做些简单的计算. 对于剩下来的讨论，要记住 n 是某个固定的数(假定的多项式方程(*)的次数). 首先，如果$1\leqslant k\leqslant n$, 则

$$|e_k|\leqslant e^k\int_0^k\frac{|x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p|e^{-x}}{(p-1)!}dx$$

$$\leqslant e^n\int_0^n\frac{n^{p-1}|[(x-1)\cdots(x-n)]^p|e^{-x}}{(p-1)!}dx.$$

现在设对于 $[0, n]$ 内的 x, A是$|(x-1)\cdots(x-n)|$的最大值. 则

$$|e_k|\leqslant \frac{e^n n^{p-1}A^p}{(p-1)!}\int_0^n e^{-x}dx$$

$$\leqslant \frac{e^n n^{p-1}A^p}{(p-1)!}\int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$=\frac{e^n n^{p-1}A^p}{(p-1)!}$$

$$\leqslant \frac{e^n n^p A^p}{(p-1)!}=\frac{e^n(nA)^p}{(p-1)!}.$$

但 n 和 A 都是固定的；因此 p 取得充分大，就能使 $(nA)^p/(p-1)!$ 要多小就有多小. ∎

这个证明，象关于 π 是无理数的证明一样，多少值得冷静地回想一下. 乍看起来，这个论证似乎是很"高级的"——我们毕竟用了积分，而且又是由 0 到∞的积分. 实际上，象许多数学家已经注意到的那样，积分可以从论证中全部去掉；该证明所需要的积分都是具有下面形式的积分

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad (\text{对于整数} k)$$

而这些积分每当它们出现时都可用 $k!$ 来代替. 这样，例如 M 一开始就可以定义为

$$M = \sum_{\alpha=0}^{np} C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

其中 C_α 是多项式

$$[(x-1)\cdots(x-n)]^p$$

的系数. 如果这种想法从头到尾贯彻下来，那么只要用

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

这个事实，人们就能得到一个关于 e 是超越数的"完全初等的"证明. 不幸，这个"初等的"证明比原先的那个证明难理解——只是为了去掉几个积分符号，势必会隐没整个证明的构思！这种情况决不仅限于这个特殊的定理——"初等的"论证往往比"高级的"论证难. 我们对于 π 是无理数的证明就是一个例证. 对于这个证明，你大概只记得它包含了不少复杂的函数，别的却什么也没记住. 实际上存在一个较高级的但更概念性的证明，证明 π 是超越数这一具有重大历史意义和本质意义的事实. 希腊数学的经典问题之一是，只用圆规和直尺作一正方形，使其面积等于一个半径为

1 的圆的面积. 这需要作一条长为$\sqrt{\pi}$的线段, 如能作出长为π的线段, 就能作出前者. 希腊人完全不能确定能否作出这样的线段，甚至在 1882 年以前, 近代数学的全部办法都不能解决这个问题. 在那一年林德曼证明了π是超越的; 因为能用直尺和圆规作出的任何线段的长度，都能用+, ·, -, ÷, 和$\sqrt{\ }$写出来，因而是代数数，这就证明长度为π的线段作不出来.

证明π是超越的要用到大量的数学知识，这些内容很高级，超出本书范围. 但是，该证明并不比证明e是超越的更难. 其实，关于π的证明和关于e的证明实际上是相同的. 这句话一定会使你感到惊奇. 关于e是超越数的证明似乎完全要依赖于e的特殊性质，几乎不能想象究竟它怎样变化后能适用于π; e和π到底有什么关系? 且等着看!

习　题

1. (a) 证明: 如果$\alpha>0$是代数数，则$\sqrt{\alpha}$是代数数.
   (b) 证明: 如果α是代数数，而r是有理数，则$\alpha+r$和αr是代数数.
   实际上(b)可以被大大地加强: 代数数的和，积及商是代数数. 对我们来说在这里证明这个事实太难了，但对于某些特殊情形可以考查一下:
2. 用实际上寻找$\sqrt{2}+\sqrt{3}$与$\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$所满足的代数方程 (你将需要 4 次方程)的方法，来证明它们是代数数.

*3. (a) 设α是一个不是有理数的代数数. 假定α满足多项式方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0,$$

并且没有较低次的多项式函数具有这个性质. 证明对于任何有理数p/q都有$f(p/q)\neq 0$. 提示: 应用习题三, 7(b).

   (b) 现在证明对于所有$q>0$的有理数p/q都有$|f(p/q)|\geqslant 1/q^n$. 提示: 把$f(p/q)$写成公分母为q^n的分数.
   (c) 设$M=\sup\{|f'(x)|:|x-\alpha|<1\}$. 用中值定理证明: 如果$p/q$

是一个使$|\alpha-p/q|<1$的有理数，则$|\alpha-p/q|>1/Mq^n$.（由此推出当$c=\max(1,1/M)$时，对于所有的有理数p/q我们有$|\alpha-p/q|>c/q^n$.）

*4. 设

$$\alpha=0.110001000000000000000001000\cdots,$$

共中对于每个n，第n个1在第$n!$位出现．应用第3题证明α是超越的．（对于每个n，证明α不是n次方程的根．）

虽然第4题只提到一个特殊的超越数，但应明确我们可以容易地构造出无穷多个对于任何c和n都不满足$|\alpha-p/q|>c/q^n$的别的数α．这样的数首先由刘维尔(1809—1882)研究过，而第3题中的不等式常称为刘维尔不等式．用这个方法构造出的超越数没有一个会是特别有趣的，但是长时间以来，刘维尔的超越数是人们所知道的仅有的超越数．这种情况由于康托尔(1845—1918)的工作才被彻底地改变了过来，他在没有展示出一个单独的超越数的情况下证明了：大多数的数是超越的．下边两个习题介绍的思路，使我们弄懂这个陈述的意思．我们必须用到的基本定义如下：一个集A当它的各元素能够排列成一个序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$$

时，叫做**可数的**．可数集的明显的(事实上，多少有点理想化的)例子是自然数的集合$\mathbf{N}$；显然偶自然数的集合也是可数的：

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots.$$

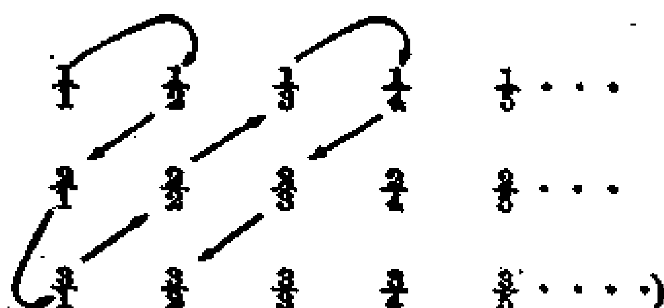
稍微有点使人惊奇的是，听到所有整数(正的，负的，和0)的集合$\mathbf{Z}$也是可数的，但一看后就明白了：

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots.$$

下列两个习题概略地叙述可数集的基本特征，实际上是说明以下两个事实的一系列的例子：(1)比人们可以想象的多得多的集合是可数的，(2)但是某些集合又是不可数的．

*5. (a) 证明：如果A和B是可数的，则$A\cup B=\{x: x在A内或x在B内\}$也是可数的．提示：应用曾对$\mathbf{Z}$使用过的同一技巧．

(b) 证明正有理数的集合是可数的．（这确实是非常令人吃惊的；利用下面的观察法证明：



(c) 证明所有整数偶(m, n)的集合是可数的.（这实际上和(b)是一样的.）

(d) 如果$A_1, A_2, A_3, \cdots$每个都是可数的,证明

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

也是可数的.（再次应用(b)中用过的同一技巧.）

(e) 证明所有整数的3-数组(l, m, n)的集合是可数的.（一个3-数组(l, m, n)可以用一个数偶(l, m)和一个数n来描述.）

(f) 证明所有n数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的集合是可数的.（如果你已做出(e),你就能用归纳法做出这一题.）

(g) 证明n次多项式函数的所有根的集合是可数的.（(f)证明所有n次多项式函数的集合能排成一个序列,而这些函数中的每一函数至多有n个根.）

(h) 现在用(d)和(g)来证明所有代数数的集合是可数的.

*6. 既然这么多的集合原来都是可数的,那么注意到在0与1之间的所有实数的集合是不可数的,是重要的.换句话说,没法把所有这些实数列成一个序列

$$\alpha_1 = 0.a_1^1a_2^1a_3^1a_4^1\cdots$$
$$\alpha_2 = 0.a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2\cdots$$
$$\alpha_3 = 0.a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

（右边应用十进小数记数法）.为了证明这一点,假定可以列成这样的一个序列,并考查十进小数

$$0.\bar{a}_1^1\bar{a}_2^2\bar{a}_3^3\bar{a}_4^4\cdots,$$

其中若$a_n^n \neq 5$则$\bar{a}_n^n = 5$,而若$a_n^n = 5$则$\bar{a}_n^n = 6$.证明这个数绝不可能在这序列内,从而得出一个矛盾.

第 5 题和第 6 题可以总结如下．代数数的集合是可数的．如果超越数的集合也是可数的，那么根据第 5 题(a)，所有实数的集合必定是可数的，从而在 0 与 1 之间的实数集合一定是可数的．但这是假的．因此，代数数的集合是可数的，而超越数的集合是不可数的（"超越数比代数数多"）．剩下的两个习题进一步说明区分可数集和不可数集是多么重要．

*7．设 f 是一个在[0，1]上的非减函数．回忆（习题八，8）$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$都存在．

(a) 对于任意 $\varepsilon>0$，证明在[0, 1]内只存在有限多个数 a 能使

$$\lim_{x\to a^+}f(x)-\lim_{x\to a^-}f(x)>\varepsilon.$$

提示：事实上，这些数至多有$[f(1)-f(0)]/\varepsilon$ 个．

(b) 证明 f 不连续的那些点的集合是可数的．提示：如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)>0$，则对于某个自然数 n，它是$>1/n$ 的．

本题说明非减函数在大多数的点上自动连续．对于可微性，情况较难分析并且也是较有趣的．非减函数可以在不可数的点集上不可微，但仍然可以说非减函数在大多数的点上是可微的（在"大多数"一词的不同意义上说）．建议读物中的参考书 [33] 应用习题八，20 中的朝阳引理，给出了一个漂亮的证明．做过第十一章附录第 9 题的人，至少可以给该习题中所叙述的诸概念提供一个在可微性方面的应用：如果 f 是凸的，则除了在其右导数 f'_+ 不连续的那些点之外，f 是可微的；但因函数 f'_+ 是递增的，所以除了在一个可数的点集之外，凸函数是自动可微的．

*8．(a) 习题十一，50 证明过：如果每一点都是连续函数 f 的局部最大点，则 f 是常值函数．现在假定去掉连续这个前提．证明 f 只在一个可数集上取值．提示：对于每个 x，选取有理数 a_x 和 b_x 使得 $a_x<x<b_x$，并且 x 是 f 在(a_x, b_x)上的最大点．那么每个值 $f(x)$都是 f 在某个区间(a_x, b_x)上的最大值．有多少个这样的区间？

(b) 现在作为(a)的一个推论导出习题十一，50．

(c) 假设每一点或者是 f 的局部最大或者是局部最小点．证明 f 只在一个可数集上取值．（这是(a)的一种小变形．）

(d) 现在假设 f 是连续的，并且每一点或者是 f 的局部最大点或者是局部最小点。证明 f 是常值函数。(尽管这个陈述只是习题十一，50的小变形，但就我所知道的唯一证明用到(c)，因而依赖与第十一章很不同的概念。)

第二十一章　无穷序列

无穷序列的概念是一个很自然的概念，以致使人觉得完全可以不必加以定义．人们经常简单地写“无穷序列

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots,"$$

这三个点表示数 a_i 可向右“永远”继续下去．但是不难正式提出无穷序列的严格定义；无穷序列的要点是，对于每个自然数 n，都有一个实数 a_n．这类对应恰是函数所意味着的东西．

定义

> 实数的**无穷序列**是其定义域为N的函数．

由这个定义的观点来看，序列应当用一个单独的象 a 这样的字母来表示，而其特殊的值应当用

$$a(1),\ a(2),\ a(3), \cdots$$

来表示，但实际上几乎总是用下标记法

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

来代替，而序列本身通常用象 $\{a_n\}$ 这样的记号来表示．这样，$\{n\}$，$\{(-1)^n\}$ 和 $\{1/n\}$ 表示由

$$\alpha_n = n,$$

$$\beta_n = (-1)^n,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n}$$

定义的序列 α, β 和 γ．

象任何函数一样，序列可以用图形来表示（图 1），但因这种函

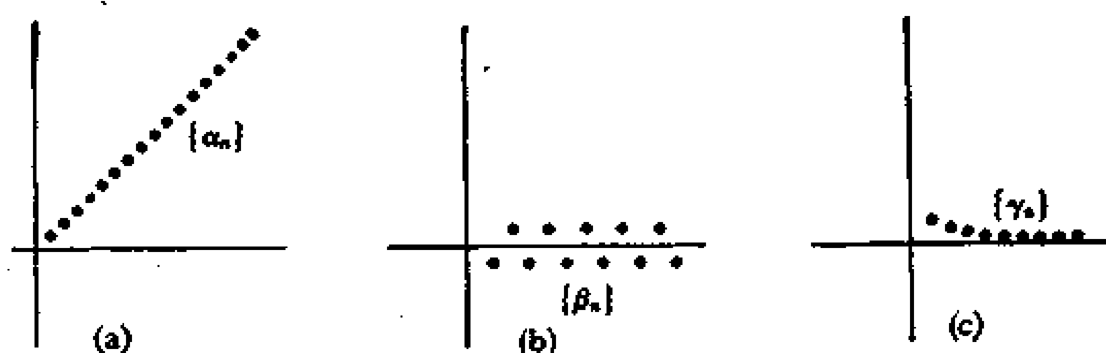


图 1

数中的大多数不好绘，所以通常宁可不绘它．序列的较方便的表示法是，简单地将点 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 标在一条直线上(图 2)．这种图

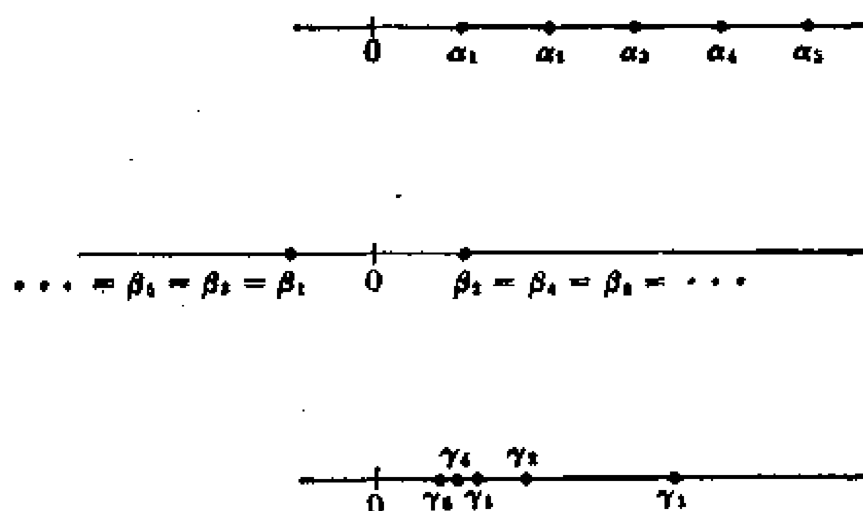


图 2

形显示序列的"去向"．序列$\{\alpha_n\}$"走向无穷"，序列$\{\beta_n\}$ "在-1和 1 之间来回跳动"，而序列$\{\gamma_n\}$则"收敛到 0"．在引号内的三个短语中，最后的一个是与序列有关的决定性的概念，将要严格地加以定义(该定义在图 3 中给以说明)．



图 3

定义

> 如果对于任意 $\varepsilon>0$，都有一个自然数 N，使得对于所有的自然数 n，
>
> $$当\ n>N\ 时，有\ |a_n-l|<\varepsilon,$$
>
> 则称序列$\{a_n\}$**收敛到** l（用符号 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ 表示）。

除了在本定义中所介绍的术语之外，我们有时也称序列$\{a_n\}$**趋于** l 或**具有极限** l. 如果序列$\{a_n\}$对于某个 l 收敛到 l，就称它**收敛**；如果它不收敛，就称它**发散**.

要证明序列$\{\gamma_n\}$收敛到 0，只要注意到下面的就够了. 如果 $\varepsilon>0$，则有一个自然数N使得 $1/N<\varepsilon$. 于是，当 $n>N$ 时我们有

$$\gamma_n=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon,\ 所以\ |\gamma_n-0|<\varepsilon.$$

稍经考虑后，也许就会觉得极限

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$$

是合理的（它正说明，对于很大的 n 来说，$\sqrt{n+1}$ 与$\sqrt{n}$几乎是一样的），但数学上的证明也许就没这么明显. 为了估计$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，我们可用代数上的技巧：

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}&=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

在区间$[n,n+1]$上对函数 $f(x)=\sqrt{x}$应用中值定理，也能估计 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. 我们得到

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}=f'(x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ 对于在}(n, n+1)\text{内的某个 } x$$

$$<\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

这两个估计中的任何一个都可以用来证明上面的极限；详细的证明留作为一个简单但有价值的练习给你们来做.

极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}=\frac{3}{4}$$

好象也应该是合理的，因为当 n 很大时包含 n^3 的项是最重要的. 如果你记得第七章定理 9 的证明，你将能猜出把这种想法变为证明的技巧——把上下都用 n^3除可得

$$\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}=\frac{3+\dfrac{7}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{63}{n^3}}.$$

利用这个式子，不难证明上述的极限，特别是如果我们应用下列事实的话：

如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n;$$

另外，如果$\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq0$，则对于所有大于某个$N$的 n 有 $b_n\neq0$，并且

$$\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=\lim_{n\to\infty}a_n/\lim_{n\to\infty}b_n.$$

(如果我们想要绝对严格，那么这第三个陈述会更加复杂一些. 以现在之情形而论，我们是在考虑序列$\{c_n\}=\{a_n/b_n\}$ 的极限，其中数 c_n 对于某些 $n<N$ 甚至可以是没有定义的. 这实际上无关紧要——对于这样的 n 我们可以用任何方式来定义 c_n——因为当我

们在有限个点上改变一个序列时，该序列的极限不变.）

虽然这些事实很有用，但我们不想费心将它们作为定理来叙述——你应该不难亲自证明这些结果，因为 $\lim_{n\to\infty} a_n=l$ 的定义和以前的极限定义，特别是 $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$，很相似.

$\lim_{n\to\infty} a_n=l$ 和 $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ 两个定义之间的相似，实际上比单纯的类似要密切得多；可以用第二个来定义第一个. 如果 f 是这样的一个函数，其图形（图 4）是由联结序列 $\{a_n\}$ 的图形中的各点的线段所组成，于是

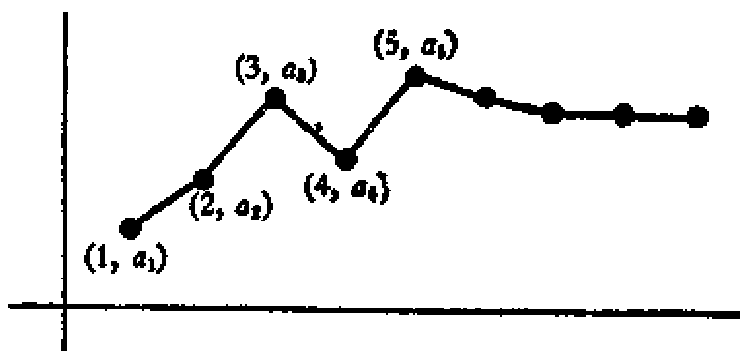


图 4

$$f(x)=(a_{n+1}-a_n)(x-n)+a_n,\ n\leqslant x\leqslant n+1,$$

这样，当且仅当 $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ 时

$$\lim_{n\to\infty} a_n=l.$$

这个观察结果经常要用到. 例如，假设 $0<a<1$. 则

$$\lim_{n\to\infty} a^n=0.$$

为了证明这一点，我们注意到

$$\lim_{x\to\infty} a^x=\lim_{x\to\infty} e^{x\log a}$$
$$=0,$$

因为 $\log a<0$，所以对于很大的 x 而言 $x\log a$ 是绝对值很大的负数. 注意，我们实际上有

$$\lim_{n\to\infty} a^n=0, \quad \text{如果} |a|<1;$$

因为当 $a<0$ 时我们可以写

$$\lim_{n\to\infty} a^n=\lim_{n\to\infty} (-1)^n|a|^n=0.$$

对数函数的性质还表明，如果 $a>1$，则 a^n 随着 n 的变大而任意地变大．这个断言往往写成

$$\lim_{n\to\infty} a^n=\infty, \quad a>1,$$

并且有时甚至说 $\{a^n\}$ 趋于 ∞．我们也写象

$$\lim_{n\to\infty}(-a^n)=-\infty$$

这样的等式，并且说 $\{-a^n\}$ 趋于 $-\infty$．但是应该注意，如果 $a<-1$，则即使在这种推广了的意义上说，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ 也不存在．

且不管它和熟悉的概念的关系，更重要的是，用作为直线上的点的序列图形来描述收敛性(图 3)．在函数的极限和序列的极限之间还存在另一种与这种图形有关的关系．虽然这个关系不大明显，但较之以前所提的那个关系有趣得多——不用函数的极限来定义序列的极限，而可以反过来进行．

定理 1 设 f 是一个定义在一个包含 c (但 c 本身也许要除外)的开区间上的函数，并且

$$\lim_{x\to c} f(x)=l.$$

假设 $\{a_n\}$ 是一个满足

(1) 每个 a_n 都在 f 的定义域内，

(2) 每个 $a_n\neq c$，

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c$

的序列．则序列 $\{f(a_n)\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=l.$$

反之，如果上式对于每一个满足上述条件的序列$\{a_n\}$都能成立，则$\lim_{x\to c} f(x)=l$.

证明 先假设$\lim_{x\to c} f(x)=l$. 则对于任意$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，使得当$0<|x-c|<\delta$时有

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

如果序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty} a_n=c$. 则(图3)存在一个自然数N使得

$$\text{当 } n>N \text{ 时就有 } |a_n-c|<\delta.$$

根据我们所选的δ，这就意味着

$$|f(a_n)-l|<\varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=l.$$

反过来，假设对于每个满足$\lim_{n\to\infty} a_n=c$的序列$\{a_n\}$都有$\lim_{x\to\infty} f(a_n)=l$. 如果$\lim_{x\to c} f(x)=l$不成立，就会有某个$\varepsilon>0$，使得对于每个$\delta>0$都有一个$x$满足

$$0<|x-c|<\delta \text{ 但 } |f(x)-l|>\varepsilon.$$

特别是，对于每个n都会有一个数x_n使得

$$0<|x_n-c|<\frac{1}{n} \text{ 但 } |f(x_n)-l|>\varepsilon.$$

现在序列$\{x_n\}$显然收敛到c，但因对于所有的n都有$|f(x_n)-l|>\varepsilon$，所以序列$\{f(x_n)\}$不收敛到l. 这与原假设相矛盾，因此$\lim_{x\to c} f(x)=l$必定成立. ▌

定理1提供许多收敛序列的例子. 例如，由

$$a_n=\sin\left(13+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$b_n=\cos\left(\sin\left(1+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right)\right)$$

定义的序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 显然分别收敛到 $\sin(13)$ 和 $\cos(\sin(1))$。然而重要的是，对于那些不明显地属于这种类型的序列，要有某些能保证其收敛的准则。有一个很容易证明的重要准则，但它却是所有其他结果的基础。这个准则是用那些为函数而定义的因而也适用于序列的概念来叙述的：如果对于所有的 n 有 $a_{n+1}>a_n$，则序列 $\{a_n\}$ 是**递增的**，如果对于所有的 n 有 $a_{n+1}\geqslant a_n$，则是**非减的**，如果存在一个数 M 使得对于所有的 n 有 $a_n\leqslant M$，则是**上有界的**；对于递减的、非增的和下有界的序列，有类似的定义。

定理 2 如果 $\{a_n\}$ 是非减的和上有界的，则 $\{a_n\}$ 收敛（如果 $\{a_n\}$ 是非增的和下有界的，则类似的陈述也成立）。

证明 根据假设，由所有的数 a_n 组成的集合 A 是上有界的，所以 A 有最小上界 α。我们断定 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$（图 5）。实际上，因为 α 是 A 的最小上界，所以如果 $\varepsilon>0$，则有某个 a_N 满足 $\alpha-a_N<\varepsilon$。于是若 $n>N$，我们有

$$a_n\geqslant a_N，所以\quad \alpha-a_n\leqslant\alpha-a_N<\varepsilon.$$

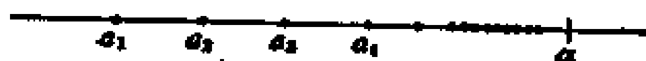


图 5

这证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$. ▮

在定理 2 中，$\{a_n\}$ 是上有界的假设显然是必不可少的：如果 $\{a_n\}$ 不是上有界的，则（不论 $\{a_n\}$ 是否非减的）$\{a_n\}$ 显然发散。在开始考虑的时候，判定一个已知的非减序列 $\{a_n\}$ 是否上有界，从而判定 $\{a_n\}$ 是否收敛，好象不会有多少困难。在下一章中，这样的序列将很自然地出现，并且正如我们将要看到的那样，要判定它们是否收敛，不象是一件无足轻重的事。你此刻可以试着判断下面（显然是递增）的序列

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \cdots$$

是否是上有界的.

虽然定理 2 只论述一类非常特殊的序列，但它比它开始出现时有用得多，因为从任意一个序列 $\{a_n\}$ 中，总能取出另外一个或者非增或者非减的序列. 确切地说，让我们定义序列 $\{a_n\}$ 的**子序列**为形如

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ \cdots$$

的一个序列，其中 n_j 是满足

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

的自然数. 那么每一个序列都包含一个或者非减或者非增的子序列. 试图证明这个论断可能会使人迷惑莫解，虽然如果你想出恰当的办法的话，这个证明就会非常短；它值得作为一个引理记下来.

引理 任何序列 $\{a_n\}$ 都包含一个或者非减或者非增的子序列.

证明 如果对于所有的 $m>n$ 有 $a_m<a_n$，则称此自然数 n 关序列 $\{a_n\}$ 的一个"峰点"(图 6).

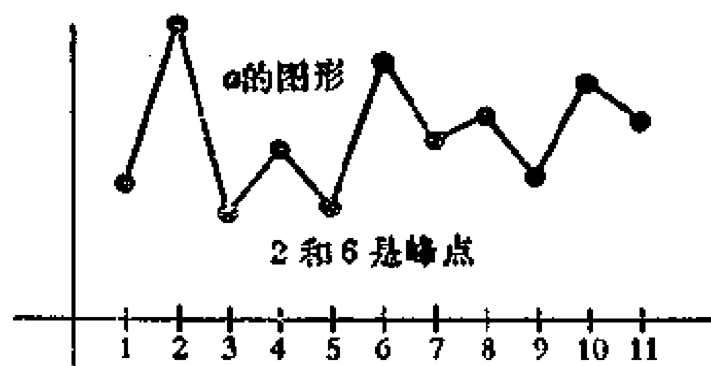


图 6

情形 1. 该序列有无穷多个峰点. 在此情形中，如果 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 是峰点，则 $a_{n_1}>a_{n_2}>a_{n_3}>\cdots$，因此 $\{a_{n_k}\}$ 就是所要求的(非

增的)子序列.

情形 2. 该序列只有有限个峰点. 在此情形中，设 n_1 比所有峰点都大. 因为 n_1 不是峰点，故有某个 $n_2>n_1$ 使得 $a_{n_2}\geqslant a_{n_1}$. 因为 n_2 不是峰点(它大于 n_1，因而大于所有的峰点)，故有某个 $n_3>n_2$ 使得 $a_{n_3}\geqslant a_{n_2}$. 照此方式继续做下去，我们得到所要求的(非减的)子序列. ∎

如果我们假设我们的原序列 $\{a_n\}$ 是有界的，我们可以由此得到一个额外的推论.

推论(波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理) 每个有界序列都有一个收敛的子序列.

如果没有某些附加假设，我们就只能达到：容易构造出一些具有许多甚至无穷多个收敛到不同数的子序列的序列(见第 2 题). 要加一个合理的假设，使能得到任何序列收敛性的必要和充分的条件. 尽管这个条件对我们的工作不起决定性的作用，但它的确能简化许多证明. 另外，这个条件在更高深的研究中起着重要的作用，光凭这个理由，就值得现在来叙述它.

如果一个序列收敛，从而其单个的项最终全都接近于同一个数，那么任何两个这样的单个项之差将会非常小. 确切地讲，如果对于某个 l 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 N，使得对于 $n>N$ 有 $|a_n-l|<\varepsilon/2$；现在如果同时有 $n>N$ 和 $m>N$，则

$$|a_n-a_m|\leqslant|a_n-l|+|l-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这个最后的消除了极限 l 的不等式 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，可用来表述一个条件(柯西条件)，它对于序列的收敛性来说显然是必要的.

定义

设$\{a_n\}$是一个序列．如果对于任意$\varepsilon>0$，都有一个自然数N，使得对于所有满足$m,n>N$的m和n，有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon,$$

(这个条件通常写成$\lim\limits_{m,n\to\infty}|a_m-a_n|=0$.)则称$\{a_n\}$为柯西序列．

柯西条件的妙处在于，它也是保证序列收敛的充分条件．在我们完成所有的预备性工作之后，只要再做少量的工作就能证明这一点．

定理 3 当且仅当序列$\{a_n\}$是柯西序列时，该序列收敛．

证明 我们已经证明过，如果$\{a_n\}$收敛，则它是柯西序列．其逆论断的证明只包含一个微妙的要点：证明每个柯西序列是有界的．如果我们在柯西序列的定义中取$\varepsilon=1$，我们将发现有某个N使得对于$m,n>N$有

$$|a_m-a_n|<1.$$

特别是，这意味着对于所有的$m>N$有

$$|a_m-a_{N+1}|<1.$$

于是$\{a_m:m>N\}$是有界的；因为只存在有限多个其他的a_i，所以整个序列是有界的．

这样，引理的推论意味着$\{a_n\}$的某个子序列收敛．

只剩下一点，留给你们来证明：如果柯西序列的一个子序列收敛，则柯西序列本身收敛．▌

习　题

1．验证下列各极限．

(i)　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n^3+4}=0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1})=0.$ 提示：你至少应能证明

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[8]{n^2})=0.$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$ 提示：对于 $k<n$，特别是对于 $k<n/2$，有

$n!=n(n-1)\cdots k!.$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a>0.$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n}=1.$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b).$

(ix) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha(n)}{n}=0$，其中 $\alpha(n)$ 是能整除 n 的素数的数目。提示：从每个素数 $\geqslant 2$ 这个事实，可以很简单地估计出 $\alpha(n)$ 应该多小。

*(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}.$

2. (a) 如果序列 $\{a_n\}$ 收敛并且每个 a_n 都是整数，那么对于该序列能作出什么结论？

(b) 找出序列 1, −1, 1, −1, 1, −1…的所有收敛的子序列。(有无穷多个，尽管这样的子序列只能有两个极限。)

(c) 找出序列 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, …的所有收敛的子序列。(这样的子序列可以有无穷多个极限。)

(d) 研究序列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \cdots.$$

对于哪些数 α 有收敛到 α 的子序列？

3. (a) 证明：如果柯西序列的一个子序列收敛，则原柯西序列收敛。

(b) 证明一个收敛序列的任何子序列收敛。

4. (a) 证明：如果 $0<a<2$，则 $a<\sqrt{2a}<2$。

(b) 证明序列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots$$

收敛.

(c) 求其极限. 提示：注意，根据定理 1，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2a_n}=\sqrt{2l}.$$

5. 写出函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k})$ 的等同函数. (它在本书中已多次提到过.)

6. 许多外表上给人深刻印象的极限，可以容易地被(特别是被编造它们的人)求出，因为它们实际上是一些伪装的下和或上和. 用这个议论作为提示，计算下列各题. (注意：其中混进了可用初级的办法来计算的一题.)

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$.

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right)$.

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

7. 虽然象 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$ 这样的一些极限可用与对数函数和指数函数的性质有关的一些事实来计算，但这个途径有点令人不满，因为整数次根和幂无需应用指数函数即可被定义. 这里简单地介绍关于这类极限的某些标准的"初等"论证；所用的基本工具是由二项式定理导出的一些不等式，特别是

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh,\quad 对于\ h>0;$$

而对于(e)，要用

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2\geqslant\frac{n(n-1)}{2}h^2,\ 对于\ h>0.$$

(a) 通过令 $a=1+h$，其中 $h>0$，证明当 $a>1$ 时 $\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$.

(b) 证明当 $0<a<1$ 时 $\lim_{n\to\infty}a^n=0$.

(c) 通过令 $\sqrt[n]{a}=1+h$ 并估计 h，证明当 $a>1$ 时 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(d) 证明当 $0<a<1$ 时 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(e) 证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

8. (a) 证明收敛序列总是有界的.

(b) 假设 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，并且每个 $a_n>0$. 证明所有数 a_n 的集合实际上有一个最大的元.

9. (a) 证明

$$\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}.$$

(b) 如果

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n,$$

证明序列 $\{a_n\}$ 是递减的，并且每个 $a_n\geqslant 0$. 于是存在一个数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

这个数，称为欧拉数，已经证明是相当难处理的，甚至连 γ 是不是有理数都不知道.

10. (a) 假设 f 在 $[1,\infty)$ 上是递增的. 证明

$$f(1)+\cdots+f(n-1)<\int_1^n f(x)dx<f(2)+\cdots+f(n).$$

(b) 现在选取 $f=\log$ 并证明

$$\frac{n^n}{e^{n-1}}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}<\frac{n^{n+1}}{e^{n-1}},$$

由此推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

这个结果表明，当 n 很大时 $\sqrt[n]{n!}$ 和 n/e 这两个量之比接近于 1，在这种意义上说，$\sqrt[n]{n!}$ 近似地等于 n/e. 但我们不能由此得出

结论说，在这种意义上说 $n!$ 接近于 $(n/e)^n$；实际上，这不成立．一个关于 $n!$ 的估计是非常值得想望的，即使单是为了具体的计算也是值得的，因为甚至利用对数表也不可能容易地算出 $n!$．在习题二十六，18 中将能找到一个第一流（而且很难）的定理，它将提供有关这个估计的正确信息．

*11. 本题研究对于哪些 $x>0$，符号

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

才有意义．换句话说，如果我们定义 $a_1(x)=x$，$a_{n+1}(x)=x^{a_n(x)}$，那么什么时候 $b(x)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n(x)$ 存在？

(a) 证明：如果 $b(x)$ 存在，则 $x^{b(x)}=b(x)$．
（情形与第 4 题相似．）

(b) 根据(a)，如果 $b(x)$ 存在，则 x 可以对于某个 y 写成 $y^{1/y}$ 的形式．由此推断出 $0<x\leqslant e^{1/e}$．提示：象在习题十七，24 中那样，考虑 $f(y)=(\log y)/y$ 的图形．

(c) 反之，假设 $0<x\leqslant e^{1/e}$．证明每个 $a_n(x)\leqslant e$；由于 $\{a_n(x)\}$ 显然是递增的，这就证明了 $b(x)$ 存在（并且还有 $b(x)\leqslant e$）．

(d) 求 $b(\sqrt{2})$ 和 $b(e^{1/e})$．

(e) 证明 b 在 $(0, e^{1/e})$ 上是可微的，并求一个用 $b(x)$ 表示的关于 $b'(x)$ 的公式．提示：这一小题与习题十七，24(f) 相似．

(f) 微分 $x^{b(x)}=b(x)$ 这个方程，由此导出 $b'(x)$ 的公式．（当然，这个方法不证明 b 是可微的．）

*12. 证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+\cdots+a_n)}{n}=l.$$

提示：本题与习题十三，34 很相似（其实前者是后者的特殊情形）．

*13. 假定对于每个 n 有 $a_n\neq0$ 并设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=l$．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$．提示：这需要和在第 12 题中所用的同样的论证，以及当 $a>0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 这个事实．

14. (a) 假设 $\{a_n\}$ 是全在 $[0, 1]$ 内的点的收敛序列．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 也在 $[0, 1]$

内.

(b) 求一个全在(0, 1)内的点的收敛序列，使得 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不在(0, 1)内.

15. 假设 f 是连续的并且序列

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \cdots$$

收敛到 l. 证明 l 是 f 的一个"不动点"，即 $f(l)=l$. 提示：两种特殊情形已经出现过.

16. (a) 设 f 在 [0, 1] 上是连续的，并且对于在 [0, 1] 内的所有 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 习题七，11 证明 f 有一个不动点(用第 15 题的术语). 如果 f 是递增的，则可作出一个更强的陈述：对于[0, 1]内的任何x，序列

$$x, f(x), f(f(x)), \cdots$$

有极限(根据第 15 题，它必然是一个不动点). 试通过对于$f(x)>x$ 和$f(x)<x$ 检查该序列的性质，或观察图7来证明上述的论断. 这种图解在李特乌德的数学家杂录中用来说明作图的价值："对于专业人员来说，唯一需要的证明就是[这张图]."

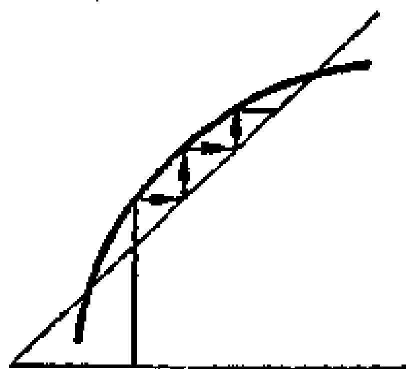


图 7

*(b) 假设 f 和 g 是在[0, 1]上的两个连续函数，且对于[0, 1]内的所有 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 和$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，它们满足$f\circ g=g\circ f$. 另外，假设 f 是递增的. 证明 f 和 g 有一个共同的不动点；换句话说，存在一个数 l 使得 $f(l)=l=g(l)$. 提示：从选取 g 的一个不动点开始.

***(c) 如果没有 f 是递增的假设，(b)的结论能成立吗？

第 15 题中所用的技巧，比第15题本身所能提供的内容更有价值，并且某些最重要的"不动点定理"依赖于观察具有 x, $f(x)$, $f(f(x))$, …这种形式的序列. 第 18 题将论述这样一个定理的特殊但有代表性的情形(下一题是为第 18 题做准备的).

17. (a) 应用习题二，4 证明：若 $c\neq 1$，则

$$c^m+c^{m+1}+\cdots+c^n=\frac{c^m-c^{n+1}}{1-c}.$$

(b) 假设 $|c|<1$. 证明

$$\lim_{m,n\to\infty}(c^m+\cdots+c^n)=0.$$

(c) 假设$\{x_n\}$是一个满足$|x_n-x_{n+1}|\leqslant c^n$的序列，其中$c<1$. 证明$\{x_n\}$是柯西序列.

*18. 假设f是一个在$[a,\ b]$上的函数，对于在$[a,\ b]$内所有的x和y，可使

$$(*)\quad |f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|,$$

其中$c<1$.（这样的函数叫做收缩.）

(a) 证明f是连续的.

(b) 证明f最多有一个不动点.

(c) 通过对$[a,b]$内的任何x研究序列

$$x, f(x), f(f(x)), \cdots,$$

证明f的确有一个不动点.（这个结果，在更一般的情形下，被称为"收缩引理".）

19. 设$\{x_n\}$是一个有界序列，并设

$$y_n=\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}.$$

(a) 证明序列$\{y_n\}$收敛. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$用$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n$表示，并称为序列$\{x_n\}$的**上极限**或**上限**.

(b) 求下列各题的$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$:

(i) $x_n=\dfrac{1}{n}$.

(ii) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

(iii) $x_n=(-1)^n\left[1+\dfrac{1}{n}\right]$.

(iv) $x_n=\sqrt[n]{n}$.

(c) 定义$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n$）并证明

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

(d) 证明：当且仅当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并且在此情形中

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

(e) 回忆习题八，18 中关于有界集 A 的 $\overline{\lim}\, A$ 的定义．证明：如果这些数 x_n 互不相同，则 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim}\, A$，其中 $A=\{x_n : n \text{ 在 } \mathbf{N} \text{ 内}\}$．

*20．(a) 假设 $\{b_n\}$ 是非增的，且对于每个 n 有 $b_n \geqslant 0$，并假设对于所有的 n 有

$$m \leqslant a_1 + \cdots + a_n \leqslant M.$$

证明

$$b_1 m \leqslant a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leqslant b_1 M.$$

这个结果称为阿贝耳引理．虽然它也许不象是非常有趣的，但它却是在以后习题中出现的几个非常有趣的结果的基础；另外，该证明依赖于用一个稍微巧妙的方法写出 $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$．

(b) 推导

$$b_k m \leqslant a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leqslant b_k M$$

(这是(a)的一个不重要的推论，只是因为以后要用，所以才把它插在这里)．

*21．波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理通常用与本书中所用的完全不同的方法来陈述和证明——古典的陈述用了极限点的概念．如果对于任意 $\varepsilon>0$，在集合 A 内有一点 a 使得 $|x-a|<\varepsilon$ 但 $x\neq a$，则称点 x 为集合 A 的**极限点**．

(a) 求下列各集合的所有极限点．

(i) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ 在 } \mathbf{N} \text{ 内}\right\}$．

(ii) $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m} : n \text{ 和 } m \text{ 在 } \mathbf{N} \text{ 内}\right\}$．

(iii) $\left\{(-1)^n\left[1+\dfrac{1}{n}\right] : n \text{ 在 } \mathbf{N} \text{ 内}\right\}$．

(iv) $\mathbf{Z}$．

(v) $\mathbf{Q}$．

(b) 证明：当且仅当对于任意 $\varepsilon>0$，都有 A 的无穷多个点 a 满足 $|x-a|<\varepsilon$ 时，点 x 是 A 的一个极限点．

(c) 证明 $\overline{\lim}\, A$ 是 A 的最大极限点，而 $\underline{\lim}\, A$ 是 A 的最小极限点．

通常形式的波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理说明，如果 A 是一个包

含在闭区间$[a, b]$内的无穷数集，则$[a, b]$的某个点是A的一个极限点。用两种方法证明这个论断：

(d) 用课文中已经证明过的方式。提示：因为A是无穷的，所以在A内有不同的数$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$

(e) 用区间套定理。提示：如果将$[a, b]$分为两个区间，则至少有一个必定包含A的无穷多个点。

*22. 用波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理证明：如果f在$[a, b]$上是连续的，则f在$[a, b]$上是上有界的。提示：如果f不是上有界的，则在$[a, b]$内有点x_n满足$f(x_n)>n$。

**23. (a) 设$\{a_n\}$是序列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \cdots$$

假设$0 \leqslant a < b \leqslant 1$。令$N(n; a, b)$是使得$a_j$在$[a, b]$内的那些整数$j \leqslant n$的数目。$\left(这样，N\left(2; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)=2，而N\left(4; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)=3.\right)$

证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n; a, b)}{n} = b - a.$$

(b) 设$\{a_n\}$是在$[0, 1]$内的一些数的序列。如果对于所有适合条件$0 \leqslant a < b \leqslant 1$的$a$和$b$有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(n; a, b)}{n} = b - a,$$

则称$\{a_n\}$在$[0, 1]$内是**均匀分布**的。证明：如果s是一个在$[0, 1]$上定义的阶梯函数，并且$\{a_n\}$在$[0, 1]$内是均匀分布的，则

$$\int_0^1 s = \lim_{n \to \infty} \frac{s(a_1) + \cdots + s(a_n)}{n}.$$

(c) 证明：如果$\{a_n\}$在$[0, 1]$内是均匀分布的，并且f在$[0, 1]$上是可积的，则

$$\int_0^1 f = \lim_{n \to \infty} \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}.$$

**24. (a) 设f是一个在$[0, 1]$上定义的函数，使得对于$[0, 1]$内的所有a，$\lim_{y \to a} f(y)$都存在。对于任何$\varepsilon>0$，证明在$[0, 1]$内只存在有限多个a满足$\left|\lim_{y \to a} f(y) - f(a)\right| > \varepsilon$。提示：通过证明$\lim_{y \to x} f(y)$不可

能存在，来证明这样的点的集合不可能有一个极限点 x.

(b) 证明在其上 f 不连续的那些点的集合(按习题二十，5 中的术语)是可数的. 这终于回答了习题六，16 的问题：如果 f 只有可去不连续点，则 f 除了在一个可数的点集上外是连续的，特别是，f 不可能处处不连续.

选题解答

1. (i) 当 $n+1>1/\varepsilon$ 时，$1-n/(n+1)=1/(n+1)<\varepsilon$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2})$

$$+\lim_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n+1})=0+0=0.$$

(这两个极限中的每一个都可以用与课文中证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$ 的同一方法来证明.)

(v) 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(\log a)/n=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}e^{(\log a)/n}=e^0\ (\text{根据定理 1})=1.$$

(vii) $\sqrt[n]{n^2}\leqslant\sqrt[n]{n^2+n}\leqslant\sqrt[n]{2n^2}$, 所以

$$(\sqrt[n]{n})^2\leqslant\sqrt[n]{n^2+n}\leqslant\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2,$$

而根据(v)和(vi)有

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2=1.$$

(ix) 显然有 $0\leqslant a(n)\leqslant\log_2 n$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\log_2 n)/n=0$.

4. (a) 如果 $0<a<2$, 则 $a^2<2a<4$, 于是 $a<\sqrt{2a}<2$.

(b) (a)说明

$$\sqrt{2}<\sqrt{2\sqrt{2}}<\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}<\cdots<2,$$

于是由定理 2 知该序列收敛.

(c) 如果这个序列用 $\{a_n\}$ 表示，则序列 $\{\sqrt{2a_n}\}$ 和 $\{a_{n+1}\}$ 是一样的. 于是由提示知 $l=\sqrt{2l}$ 或 $l=2$.

5. 如果 x 是有理数，则当 n 充分大时 $n!\pi x$ 是 π 的倍数，因此对于所有这样的 n 有 $(\cos n!\pi x)^{2k}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k})=1$. 如果 x 是无理数，则对于任何的 n 来说，$n!\pi x$ 不是 π 的倍数，因此 $|\cos n!\pi x|$

<1，从而 $\lim\limits_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}=0$，于是 $f(x)=0$.

6. (i) $\int_0^1 e^x dx=e-1$.（应用分成 n 个相等部分的[0, 1]的划分.）

(iii) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\log 2$.

(v) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2}$.

第二十二章 无穷级数

前一章介绍无穷序列的目的是为了在这一章中研究它们的“和”

$$a_1+a_2+a_3+\cdots.$$

这不是一件那么简单的事，因为无穷多个数的和至今根本还没定义过．所能定义的是“部分和”

$$s_n=a_1+\cdots+a_n,$$

而无穷和大概必须用这些部分和来定义．幸好，用公式表示这个定义的技巧在前一章中已经讲过．如果计算无穷和 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ 有任何希望的话，则当 n 取得越来越大时，部分和 s_n 就应能表示其越来越接近的近似值．后面的这个论断差不多相当于一个不完整的极限的定义：“无穷和” $a_1+a_2+a_3+\cdots$ 应当是 $\lim_{n\to\infty} s_n$. 这样处理必然会使许多序列的“和”没有定义，因为序列 $\{s_n\}$ 很容易没有极限．例如，具有 $a_n=(-1)^{n+1}$ 的序列

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$$

产生新的序列

$$s_1=a_1=1,$$

$$s_2=a_1+a_2=0,$$

$$s_3=a_1+a_2+a_3=1,$$

$$s_4=a_1+a_2+a_3+a_4=0,$$

$$\cdots,$$

对于这个序列来说，$\lim_{n\to\infty} s_n$ 就不存在．尽管有这里所提的定义的某种巧妙的推广（见第 8 题和习题二十三，11），但是看来有些

序列没有和，这是不可避免的．为了这个缘故，一个可接受的序列的和的定义应当包含区分其和可定义的序列与其和不能定义的序列的术语，作为一个必不可少的组成部分．

定义

> 如果序列$\{s_n\}$收敛，其中
>
> $$s_n=a_1+\cdots+a_n,$$
>
> 则称序列$\{a_n\}$是**可求和的**．在这种情况下，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$用
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\text{或不大正式地，用 } a_1+a_2+a_3+\cdots)$$
>
> 表示，并被称为序列$\{a_n\}$的**和**．

本定义中所介绍的术语通常被不大确切的说法所代替；的确，本章的标题就是由这样的日常用语得来的．无穷和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$通常称为**无穷级数**，"级数"一词强调它与无穷序列$\{a_n\}$的联系．$\{a_n\}$是（或不是）可求和的这句话，习惯上用级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是（或不是）收敛的这句话来代替．这个术语有点奇怪，因为记号$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$大不了表示一个数（所以它不可能"收敛"），并且除非$\{a_n\}$是可求和的，它就不表示任何东西．然而，这种不正式的讲法是方便的，标准的，并且未必会产生逻辑方面的弊病．

对无穷级数的某些初等算术运算是这个定义的直接结果．证明：如果$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是可求和的，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

这是一个简单的练习．到现在为止这些等式还不是很有趣的，因为我们还没有可和序列的例子（除了各项都等于 0 的那些平凡的例子之外）．在我们真正列出一个可和序列之前，将介绍一些可和性的一般条件．

存在一个可以立即说出的可和性的必要和充分条件．序列 $\{a_n\}$ 是可求和的当且仅当序列 $\{s_n\}$ 收敛，根据定理二十一，3，这刚好是，当且仅当 $\lim\limits_{m,n\to\infty}(s_m-s_n)=0$．这个条件可以用原序列重述如下．

柯西准则 设 $\{a_n\}$ 是一序列，则当且仅当

$$\lim_{m,n\to\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_m)=0$$

时，序列 $\{a_n\}$ 是可求和的．

尽管柯西准则具有理论上的重要性，但它对于判定任何个别序列的可和性不是很有用的．然而，柯西准则的一个简单的推论却提供了可和性的必要条件，这个条件很重要，我们不得不明确地把它提出来．

消没条件① 如果 $\{a_n\}$ 是可求和的，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

这个条件可由柯西准则中取 $m=n+1$ 得来；它也可以直接证明如下：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=l$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=l-l=0.\end{aligned}$$

不凑巧，这个条件并不是充分的．例如，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}1/n=0$，但

---

① 译注：原文为 *the vanishing condition*，一般书上称为级数收敛的必要条件．

序列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$却不是可求和的；其实这些数 $1/n$ 的下列组合法

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\substack{\geqslant\frac{1}{2}\\ \left(2\text{项，每项}\geqslant\frac{1}{4}\right)}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\substack{\geqslant\frac{1}{2}\\ \left(4\text{项，每项}\geqslant\frac{1}{8}\right)}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{\substack{\geqslant\frac{1}{2}\\ \left(8\text{项，每项}\geqslant\frac{1}{16}\right)}}+\cdots$$

证明这序列$\{s_n\}$不是有界的．此例所用的证法——也许是一种从未见过的技巧，暗示我们要有某些解决这些问题的较标准的方法．虽然可以马上写出这些方法(其中之一是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$ 不收敛的另一种可取的证法)，但需要首先得到几个收敛级数的例子．

所有无穷级数中最重要的是“几何级数”

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=1+r+r^2+r^3+\cdots.$$

只有$|r|<1$ 的情形是有意思的，因为当$|r|\geqslant 1$ 时其单项不趋于0．这些级数可以对付，因为其部分和

$$s_n=1+r+\cdots+r^n$$

可以用单个项来计算．由下列两个等式

$$s_n=1+r+r^2+\cdots+r^n$$

$$rs_n=r+r^2+\cdots+r^n+r^{n+1},$$

可得

$$s_n(1-r)=1-r^{n+1}$$

或

$$s_n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

(用 $1-r$ 除两边是可以的，因为我们不考虑 $r=1$ 的情形)．现在，

因为$|r|<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$. 由此得

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1}{1-r},\ |r|<1.$$

特别是,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=1,$$

即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1,$$

这个无穷和总可以用图 1 中的图形来记忆.

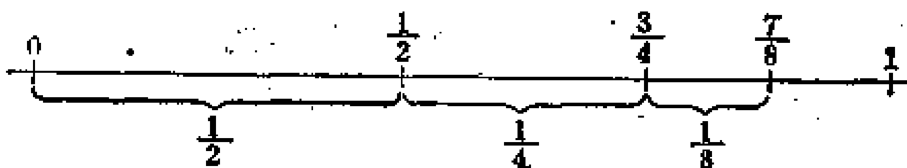


图 1

几何级数虽然很特殊，但却是一些标准的例子，关于可和性的一些重要的判别法将由它推导出来.

我们暂时将只研究每个$a_n\geqslant 0$的序列$\{a_n\}$；这样的序列称为**非负的**. 如果$\{a_n\}$是非负序列，那么序列$\{s_n\}$显然是非减的. 这个说明结合第二章定理 12，便得一个好记的可和性判别法:

有界性准则 一个非负序列$\{a_n\}$当且仅当其部分和s_n的集合有界时是可求和的.

就它本身来说，这个准则不是很有用的——确定所有s_n的集合是否有界，正是我们所做不到的事. 另一方面，如果已有某些收敛级数可用来做比较，这个准则就能用来得出一个极简单但却很重要的结果(它几乎是所有其他判别法的基础).

定理 1 (比较判别法) 假定对于所有的n有

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

则当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛。

证明 设

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$
$$t_n = b_1 + \cdots + b_n,$$

则对于所有的 n 有

$$0 \leqslant s_n \leqslant t_n.$$

现在因为$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，所以$\{t_n\}$是有界的. 因而$\{s_n\}$是有界的，于是根据有界性准则，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

比较判别法经常可以用来分析那些看起来好象很复杂但其复杂性大部分又是无关紧要的级数. 例如，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}$$

是收敛的，因为

$$0 \leqslant \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2} < \frac{3}{2^n},$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

是收敛的(几何)级数. 类似地，我们可以预料级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \sin^2 n^3}$$

收敛，因为该级数的第 n 项几乎是 $1/2^n$. 这个最后的论断实际上

意味着

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-1+\sin^2 n^3}\right)\Big/\frac{1}{2^n}=1,$$

这个表达式教我们应如何去验证我们的推测．如果我们选取任意的数 $c>1$，则对于足够大的 n 必定有

$$0\leqslant\frac{1}{2^n-1+\sin^2 n^3}<c\frac{1}{2^n}.$$

这说明

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2^n-1+\sin^2 n^3}$$

对于某个 N 是收敛的，这当然意味着原级数收敛．

也可以反过来应用比较判别法．例如，研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}.$$

因为对于很大的 n 来说，$(n+1)/(n^2+1)$ 几乎等于 $1/n$，所以我们可以预料这个级数是发散的．为了证明这一点，我们选取任意一个满足条件 $0<c<1$ 的数 c．则对于充分大的 n 有

$$0\leqslant\frac{1}{n}<c\frac{n+1}{n^2+1}.$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)/(n^2+1)$ 发散，因为如果它收敛，则根据比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 也会收敛，而我们知道这是不成立的．

当我们用以前分析过的级数做媒介时，便可由比较判别法得出其他重要的判别法．选取几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$（特别好的一个收敛级数），我们得到所有可和性判别法中的最重要的一个．

定理 2（比率判别法） 设对于所有的 n 有 $a_n>0$，并假设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r.$$

则当 $r<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 另一方面,如果 $r>1$, 则一般项 a_n 不趋于 0, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. (注意, 因此必须计算 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ 而不是 $\lim_{n\to\infty}a_n/a_{n+1}$!)

证明 首先假定 $r<1$. 选取任意一个满足条件 $r<s<1$ 的数 s. 原假设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$$

意味着存在某个 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant s.$$

这可以写成, 当 $n\geqslant N$ 时

$$a_{n+1}\leqslant sa_n.$$

于是

$$\begin{aligned}
&a_{N+1}\leqslant sa_N,\\
&a_{N+2}\leqslant sa_{N+1}\leqslant s^2a_N,\\
&\vdots\\
&a_{N+k}\leqslant s^ka_N.
\end{aligned}$$

因为 $\sum_{k=0}^{\infty}a_Ns^k=a_N\sum_{k=0}^{\infty}s^k$ 收敛, 所以比较判别法证明

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{N+k}$$

收敛. 这意味着级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 只有有限多个项不包

括在$\sum_{n=N}^{\infty}a_n$内.

$r>1$ 的情形甚至更容易. 如果 $1<s<r$, 则存在一个数N使得 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant s,$$

这意味着

$$a_{N+k}\geqslant a_N s^k\geqslant a_N \quad k=0, 1, \cdots.$$

这就证明$\{a_n\}$的单项不趋于 0, 所以$\{a_n\}$不是可求和的.∎

作为比率判别法的一个简单的应用, 研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}1/n!$. 令$a_n=1/n!$, 我们得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,$$

这说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}1/n!$收敛. 如果我们改为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n/n!$, 其中 r 是某个固定的正数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n+1}=0,$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}r^n/n!$ 收敛. 由此推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0,$$

这个结果在第十六章中已经证明过（那里给出的证明所根据的思想与比率判别法中所用的相同）. 最后，如果我们研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}=\lim_{n\to\infty}r\cdot\frac{n+1}{n}=r,$$

因为$\lim_{n\to\infty}(n+1)/n=1$. 这证明当 $0\leqslant r<1$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$收敛，从而

$$\lim_{n\to\infty}nr^n=0.$$

（这个结果对于 $-1<r\leqslant 0$ 显然也成立.）不用比率判别法作为媒介而提供一个直接证明这个极限的方法，是一个有用的练习.

虽然比率判别法在理论上非常重要，但作为一个应用的工具却往往令人失望. 比率判别法的一个缺点是，$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n$可能很难确定，甚至可能不存在. 一个更严重的缺陷（它会令人恼火地合乎规律地出现）是该极限可能等于 1 这个事实. $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=1$ 这种情形正是不确定的情形：$\{a_n\}$可能是不可求和的（例如，若 $a_n=1/n$），也可能是可求和的. 实际上，我们下一个判别法将证明$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)^2$收敛，尽管

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=1.$$

这个判别法提供一个断定无穷级数是收敛或是发散的很不同的方法——和比率判别法一样，它是比较判别法的一个直接的结果，但

是选来做比较的级数却是很新奇的.

定理 3（积分判别法） 假设 f 在$[1, \infty)$上是正的和递减的，并且对于所有的 n 有 $f(n)=a_n$. 则当且仅当极限

$$\int_1^\infty f=\lim_{A\to\infty}\int_1^A f$$

存在时$\sum_{n=1}^\infty a_n$收敛.

证明 $\lim_{A\to\infty}\int_1^A f$ 的存在与级数

$$\int_1^2 f+\int_2^3 f+\int_3^4 f+\cdots$$

的收敛是等价的. 现在，因为 f 是递减的，所以我们有（图 2）

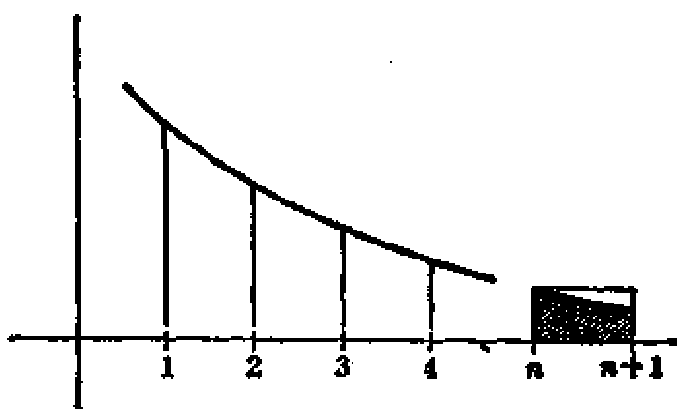


图 2

$$f(n+1)<\int_n^{n+1} f<f(n).$$

这双重不等式的前一半表明级数$\sum_{n=1}^\infty a_{n+1}$可与级数$\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1} f$相比较，证明了当$\lim_{A\to\infty}\int_1^A f$ 存在时$\sum_{n=1}^\infty a_{n+1}$（从而 $\sum_{n=1}^\infty a_n$）收敛.

这个不等式的另一半表示级数$\sum_{n=1}^\infty\int_n^{n+1} f$ 可以和级数$\sum_{n=1}^\infty a_n$比

较，证明了当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛时$\lim_{A\to\infty}\int_1^A f$必定存在. ∎

虽然这里将只给出一个应用积分判别法的例子，但它立刻解决无穷多个级数的收敛问题. 如果$p>0$，则按积分判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$的收敛与

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

的存在是等价的. 现在

$$\int_1^A\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}-\frac{1}{(p-1)}\cdot\frac{1}{A^{p-1}}+\frac{1}{p-1}, & p\neq 1\\ \log A, & p=1.\end{cases}$$

这说明$\lim_{A\to\infty}\int_1^A 1/x^p dx$当$p>1$时存在，而当$p\leqslant 1$时不存在. 于是$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$只对于$p>1$收敛. 特别是，$\sum_{n=1}^{\infty}1/n$发散.

到目前为止所研究过的判别法只适用于非负序列，但非正序列完全可以用同样的方法去处理. 实际上，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}-a_n\right),$$

所以所有关于非正序列的研究都可以归结为非负序列的问题. 同时包含正项和负项的序列情况就完全不同.

如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是同时包含正项和负项的序列，我们可以转而研究序列$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，它的所有项都是非负的. 我们情愿不顾原序列所有的有趣信息有被丢掉的可能，继续赞赏经这样处理后化为收敛序列的那些序列.

定义

> 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$是收敛的，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是绝对收敛的(用更正式的语言来说，如果序列$\{|a_n|\}$是可求和的，则称序列$\{a_n\}$是绝对可和的.)

虽然我们没有理由期望这个定义是有趣的，但有理由说它是非常重要的. 下述定理说明该定义至少不是完全无用的.

定理 4 每一个绝对收敛的级数是收敛的. 另外，一个级数绝对收敛的必要充分条件是，由它的正项所组成的级数和由它的负项所组成的级数两者都是收敛的.

证明 如果$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则根据柯西准则

$$\lim_{m,n\to\infty}(|a_{n+1}|+\cdots+|a_m|)=0.$$

因为

$$|a_{n+1}+\cdots+a_m|\leqslant|a_{n+1}|+\cdots+|a_m|,$$

由此推出

$$\lim_{m,n\to\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_m)=0,$$

这就证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

为了证明该定理的第二部分，设

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, & \text{如果 } a_n>0\\ 0, & \text{如果 } a_n\leqslant 0,\end{cases}$$

$$a_n^-=\begin{cases}a_n, & \text{如果 } a_n<0\\ 0, & \text{如果 } a_n\geqslant 0,\end{cases}$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$是由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的正项所组成的级数，而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$是由其负

项所组成的级数.

如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$同时收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^+-(a_n^-)]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$$

也收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

另一方面，如果$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则像我们刚才已证明的那样，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)$$

同时收敛.▮

由定理 4 知，在每个收敛的正项级数中，只要随意加上负号，便可得出无穷多个其他的收敛级数. 然而并非每个收敛级数都能用这种方法得到——有些级数是收敛的但不是绝对收敛的（这样的级数叫做条件收敛的）. 为了证明这一说法，我们需要一个专门适用于具有正项和负项的级数的收敛性判别法.

定理 5（莱布尼兹定理） 假设

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant 0,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\cdots\cdots$$

收敛.

证明 图 3 说明我们将要建立的部分和之间的关系:

(1) $s_2\leqslant s_4\leqslant s_6\leqslant\cdots$,

(2) $s_1\geqslant s_3\geqslant s_5\geqslant\cdots$,

(3) 当 k 为偶数而 l 为奇数时 $s_k\leqslant s_l$.



图 3

为了证明头两个不等式,注意观察

(1) $$s_{2n+2}=s_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}$$
$$\geqslant s_{2n}, \text{因为 } a_{2n+1}\geqslant a_{2n+2};$$

(2) $$s_{2n+3}=s_{2n+1}-a_{2n+2}+a_{2n+3}$$
$$\leqslant s_{2n+1} \text{ 因为 } a_{2n+2}\geqslant a_{2n+3}.$$

为了证明第三个不等式,首先注意到

$$s_{2n}=s_{2n-1}-a_{2n}$$
$$\leqslant s_{2n-1}, \text{因为 } a_{2n}\geqslant 0.$$

这只证明(3)的一个特殊情况,但结合(1)与(2)其一般情况是容易证明的:设 k 是偶数 l 是奇数,则选取这样的 n 使得

$$2n\geqslant k \text{ 和 } 2n-1\geqslant l;$$

于是

$$s_k\leqslant s_{2n}\leqslant s_{2n-1}\leqslant s_l,$$

这就证明了(3).

现在,序列 $\{s_{2n}\}$ 是收敛的,因为它是非减和上有界的(被 s_l 界

住，其中 l 为任意奇数）．设

$$\alpha=\sup\{s_{2n}\}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}.$$

类似地，设

$$\beta=\inf\{s_{2n+1}\}=\lim_{n\to\infty}s_{2n+1}.$$

由(3)推出 $\alpha\leqslant\beta$；因为

$$s_{2n+1}-s_{2n}=a_{2n+1} \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

这实际上是 $\alpha=\beta$ 的情况．这就证明了 $\alpha=\beta=\lim_{n\to\infty}s_n$.∎

由定理 5 导出的典型例子是级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots,$$

它是收敛的，但不是绝对收敛的（因为 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 不收敛）．如果这个级数的和用 x 来表示，则下列演算会导致一个十分荒谬的结果：

$$x=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$$

$$+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$$

（其形式是一个正项后面跟着两个负项）

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}$$

$$+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{16}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}x,$$

即 $x=\frac{x}{2}$，这意味着 $x=0$. 另一方面，容易看出 $x\neq 0$：因为部分和 $s_2=\frac{1}{2}$，并且由莱布尼兹定理的证明知 $x\geqslant s_2$.

这个矛盾的产生是由于我们认为对有限和有效的运算对无穷和也必然有效. 诚然，序列

$$\{b_n\}=1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{10},\ -\frac{1}{12},\ \cdots$$

包含序列

$$\{a_n\}=1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},$$
$$-\frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{10},\ \frac{1}{11},\ -\frac{1}{12},\ \cdots$$

中所有的数. 事实上，在下述严格的意义上 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个重排：每个 $b_n=a_{f(n)}$，其中 f 是"排列"自然数的某一函数，亦即每个自然数 m 恰好是对于一个 n 的 $f(n)$. 在我们的例子中

$f(2m+1)=3m+1$ $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots\right.$ 各项变到第一，第四，第七，$\cdots$位$)$，

$f(4m)=3m$ $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \cdots\right.$ 各项变到第三，第六，第九，$\cdots$位$)$，

$f(4m+2)=3m+2$ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, \cdots\right.$ 各项变到第二，第五，第八，$\cdots$位$)$.

然而，我们没有理由假定 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 应该等于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$：按照定义，这些和

是$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)$和$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)$,因此可以想像,这些项的特定次序是有重大关系的.在这一点上,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$并没有什么特殊;实际上它的性质是那些不绝对收敛的级数的典型——下边的结果(与其说是一个定理实在不如说是一个重要的反例)表明条件收敛的级数是多么不中用.

定理 6 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,但不绝对收敛,则对于任何数$\alpha$皆存在$\{a_n\}$的一个重排$\{b_n\}$使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha$.

证明 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$表示由$\{a_n\}$的正项所组成的级数,并设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$表示由$\{a_n\}$的负项所组成的级数.则由定理4知这两个级数中至少有一个不收敛.实际上两者必定都不收敛,因为如果其中一个部分和有界,另一个部分和无界,则原来的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和也会是无界的,而这与它收敛的假设相矛盾.

现在设α是任意一个数.为简单起见,假设$\alpha>0$(对于$\alpha<0$的证明将是一个简单的修正).因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$是不收敛的,所以存在一个数$N$使得

$$\sum_{n=1}^{N}p_n>\alpha.$$

我们将选N_1为具有这种性质的**最小的**N.这就意味着

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{N_1-1}p_n\leqslant\alpha,$$

但
$$(2)\ \sum_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha.$$

于是如果

$$s_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n,$$

我们便有

$$s_1 - \alpha \leqslant p_{N_1}.$$

这个关系(由图 4 可清楚看出)直接由不等式(1)推出:

$$s_1 - \alpha \leqslant s_1 - \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n = p_{N_1}.$$



图 4

现在我们给和 s_1 加上恰好够的一些负项以便得出一个小于 α 的新和 T_1. 换句话说,我们选取一个能使

$$T_1 = s_1 + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha$$

的最小的整数 M_1. 那么像前面一样,我们有

$$\alpha - T_1 \leqslant -q_{M_1}.$$

我们现在不断地继续这一过程,交替得出大于和小于 α 的和,每次选取最小的 N_k 和 M_k. 序列

$$p_1, \cdots, p_{N_1}, q_1, \cdots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \cdots, p_{N_2}, \cdots$$

是 $\{a_n\}$ 的一个重排. 这个重排的部分和增大到 s_1, 然后减小到 T_1, 接着又增大到 s_2, 又减小到 T_2, 等等. 为了完成该证明,我们只要注意到 $|s_k-\alpha|$ 和 $|T_k-\alpha|$ 分别小于或等于 p_{N_k} 和 $-q_{M_k}$, 而这些

项作为原序列$\{a_n\}$的元必定减小到0，这是因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是收敛的.∎

下一个定理和定理6一起，确立了条件收敛级数和绝对收敛级数之间的区别.

定理7 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，而$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的任一重排，则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也(绝对)收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

证明 让我们用s_n表示$\{a_n\}$的部分和，而用t_n表示$\{b_n\}$的部分和.

假设$\varepsilon>0$. 则因$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以存在某个N使得

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n-s_N\right|<\varepsilon.$$

另外，因为$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，所以我们也可以选取N使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-(|a_1|+\cdots+|a_N|)<\varepsilon,$$

亦即使得

$$|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+|a_{N+3}|+\cdots<\varepsilon.$$

现在我们选取这样大的M，使得$a_1,\cdots,a_N$中的每一个都出现在$b_1,\cdots,b_M$中. 那么每当$m>M$时，差t_m-s_N将是其中肯定不包括$a_1,\cdots,a_N$的某些a_i的和. 因此，

$$|t_m-s_N|\leqslant|a_{N+1}|+|a_{N+2}|+|a_{N+3}|+\cdots.$$

于是，如果$m>M$，则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n-t_m\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n-s_N+s_N-t_m\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n-s_N\right|+|t_m-s_N|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon.$$

因为这对于任意 $\varepsilon>0$ 都成立，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. 为了证明它绝对收敛，注意到上述论证可以分别用于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的正项和负项；这证明由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的正项和负项所组成的级数各自收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛. ▮

这一章的各定理涉及到了序列的可和性，但未涉及其实际的和. 一般说来，没有理由认为一个已知的无穷和可以用任何较简单的项来"计算". 然而，应用泰勒定理可使许多简单的表示式等于无穷和. 第十九章提供了这类函数

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+R_{n,a}(x)$$

的许多例子，其中 $\lim_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=0$. 这恰好等于

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

这又意味着

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

作为一些特例，我们有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\ |x|\leqslant 1,$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots,\ -1<x\leqslant 1.$$

(注意：关于 $\arctan x$ 和 $\log(1+x)$ 的级数对于 $|x|>1$ 还不收敛；另外，当 $x=-1$ 时，关于 $\log(1+x)$ 的级数变为不收敛的级数

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots.)$$

给 x 以一些特殊的值，可以得出一些给人深刻印象的结果：

$$0=\pi-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots,$$

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

如果我们稍微仔细地对照一下关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的级数，就可以预料一些更有意义的结果．如果我们不顾还未证明过无穷和的导数这一事实，而热衷于将等式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

的两边逐项微分，那么我们所得到的正是关于 $\cos x$ 的级数．同样地，如果我们对关于 $\cos x$ 的公式的两边从形式上(即不加证明地)

进行微分，我们将得到公式$\cos'(x)=-\sin x$，并且如果我们微分关于e^x的公式，我们就会得出$\exp'(x)=\exp(x)$. 在下一章中，我们将会看到，无穷和的这种逐项微分法在某些重要的情况下的确是有效的。

习　　题

1. 判定下列各无穷级数，看它是收敛还是发散. 你所需要的工具将是莱布尼兹定理以及比较判别法、比率判别法和积分判别法. 有几个例子是有意挑选的；两个看样子很相似的级数可能要用不同的判别法(但也可能不). 后面的提示指出可用哪一种判别法。

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}$.

   (ii) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$.

   (iii) $1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\cdots$.

   (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$.

   (v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$.

   (求和之所以从$n=2$开始，只是为了避免由$n=1$得出的无意义的项.)

   (vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

   (vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

   (viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$.

   (ix) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$.

(x) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$

(xi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

(xii) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}$.

(xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.

(xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

(xv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$.

(xvi) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.

(xvii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}$.

(xviii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(xix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

(xx) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

提示：(i)、(ii)、(v)、(vi)、(ix)、(x)、(xi)、(xiii)、(xiv)、(xvii)用比较判别法；(vii)、(xviii)、(xix)、(xx) 用比率判别法；(viii)、(xv)、(xvi)用积分判别法。

下列两题（附有提示）所判别的无穷级数比第1题需要更巧妙的分析。

*2. (a) 如果你已经成功地解决了第1题中的(xix)和(xx)，那么就应该

明白 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n!/n^n$ 当 $a<e$ 时收敛，而当 $a>e$ 时发散. 当 $a=e$ 时比率判别法失效；应用习题二十一，10 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} e^n n!/n^n$ 实际上是散发的.

(b) 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} n^n/a^n n!$ 何时收敛，当比率判别法失效时再次依靠习题二十一，10.

*3. 第 1 题提供了两个级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-k}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-n}$. 其中的第一个发散，第二个收敛. 在下面的 (a) 和 (b) 中分析介于这两者之间的级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

(a) 通过研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(e/n)^n$ 证明 $\int_1^{\infty} e^y/y^y dy$ 存在.

(b) 应用积分判别法证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

收敛. 提示：应用一个适当的替换和(a).

(c) 用积分判别法证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log(\log n)}}$$

发散. 提示：用与在(b)中同样的替换，并直接证明所得出的积分发散.

4. (a) 设 $\{a_n\}$ 是一个满足 $0\leqslant a_n\leqslant 9$ 的整数序列. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 存在(并且在 0 和 1 之间). (当然，这就是我们通常记之为 $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ 的那个数.)

(b) 假定 $0\leqslant x\leqslant 1$. 证明存在一个满足 $0\leqslant a_n\leqslant 9$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n}=x$ 的整数序列 $\{a_n\}$. 提示: 例如 $a_1=[10x]$ (这里符号 $[y]$ 表示 $\leqslant y$ 的最大整数).

(c) 证明: 如果 $\{a_n\}$ 是循环的, 亦即它具有形式 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_1, a_2, \cdots, a_k, a_1, a_2, \cdots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n}$ 是一个有理数 (并求它). 如果 $\{a_n\}$ 最终循环, 亦即如果序列 $\{a_{N+k}\}$ 对于某个 N 是循环的, 同样的结果当然成立.

(d) 证明: 如果 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n}$ 是有理数, 则 $\{a_n\}$ 最终是循环的. (看一看求 p/q 的小数表示式的过程——用长除法以 q 除 p.)

5. 假定 $\{a_n\}$ 满足莱布尼兹定理的假设条件. 试用莱布尼兹定理的证法求出下述估计:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n-[a_1-a_2+\cdots\pm a_N]\right|<a_N.$$

6. 证明下述定理("比较判别法"的另一形式). 如果 $a_n, b_n>0$ 且 $\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=c\neq 0$, 则当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

7. 证明: 如果 $a_n\geqslant 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $r<1$ 时收敛, 而当 $r>1$ 时发散 (其证明和比率判别法的证明很类似.) 这个结果称为"根判别法". 容易构造出这样的级数, 对于它比率判别法不能用, 但根判别法却能用. 例如, 根判别法证明级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots$$

收敛, 尽管其相邻两项之比不趋于任一极限. 虽然大多数例子都具有这种有点不大自然的特性, 但根判别法仍然可以说是一个重要的理论工具, 且若比率判别法能用的话, 根判别法也能用(根据习题二十一, 13). 从根判别法中消去极限是可能的; 该证明的一个简单的修改即可证明,

如果存在某个$s<1$，使得除了有限多个以外的所有$\sqrt[n]{a_n}$皆$\leqslant s$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，而如果有无穷多个$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。这个结果叫做"精密根判别法"(存在一个类似的精密比率判别法)。应用习题二十一，19的记法即得：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$当$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}<1$时收敛，当$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}>1$时发散；而当$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}>1$时得不出什么结论。

8. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+\cdots+s_n}{n}=l$$

(其中$s_k=a_1+\cdots+a_k$)，则称序列$\{a_n\}$是塞萨罗可求和的，并称l为其塞萨罗和。习题二十一，12证明，一个可求和的序列自动是塞萨罗可求和的，且其和等于它的塞萨罗和。试求一个序列，它不是可求和的，但它却是塞萨罗可求和的。

9. 这一题概述定理7的另一种证法，这种证法不依赖于柯西准则。

(a) 假定对于每个n有$a_n\geqslant 0$。设$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的一个重排，并设$s_n=a_1+\cdots+a_n$而$t_n=b_1+\cdots+b_n$。证明对于每个n都有某个m使得$s_n\leqslant t_m$。

(b) 证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}b_n$。

(c) 证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$。

(d) 现在应用定理4的第二部分将条件$a_n\geqslant 0$代之以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛这个假设。

10. (a) 证明：如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，而$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的任一子序列，则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$(绝对)收敛。

(b) 证明：当$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$不绝对收敛时，这个结论不成立.

*(c) 证明：如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots).$$

11. 证明：如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是绝对收敛的，则$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$.

*12. 习题十八，28证明了$\int_0^{\infty} (\sin x)/x dx$收敛. 证明$\int_0^{\infty} |(\sin x)/x| dx$发散.

*13. 求一个对于所有的x有$f(x) \geqslant 0$的连续函数f，使得$\int_0^{\infty} f(x) dx$存在，但$\lim_{x \to 0} f(x)$不存在.

*14. 设对于$0 < x \leqslant 1$有$f(x) = x \sin 1/x$，且$f(0) = 0$. 回想习题十五，32中关于$l(f, P)$的定义. 证明所有关于$[0, 1]$的划分P的$l(f, P)$的集合是无界的（于是f有"无限的长度"）. 提示：试一下形如

$$P = \left\{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \cdots, \frac{2}{\pi}, 1\right\}$$

的划分.

15. 设f是图5中所示的函数. 求$\int_0^1 f$，并求图5中阴影部分的面积.

*16. 在这一题中，我们将由证明$\lim_{n \to \infty} R_{n,0}(x) = 0$来建立"二项级数"

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1,$$

其中α为任意的数. 该证明分成几步，并使用了在习题十九，6中求得的柯西和拉格朗日形式.

(a) 应用比率判别法证明：当$|r| < 1$时级数$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} r^k$的确收敛（这并不是说它必定收敛到$(1+r)^{\alpha}$）. 特别是由此推出当$|r| < 1$时，$\lim_{n \to \infty} \binom{\alpha}{n} r^n = 0$.

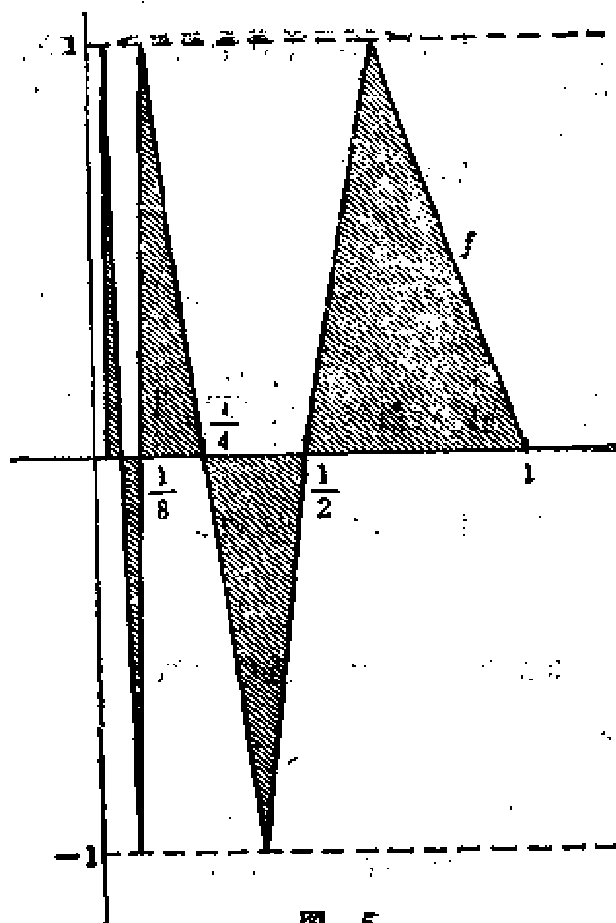


图 5

(b) 先假定 $0\leqslant x<1$. 应用余项的拉格朗日形式, 并注意到对于 $n+1>\alpha$ 有 $(1+t)^{\alpha-n-1}\leqslant 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0$.

(c) 现在假定 $-1<x<0$; 那么在余项的柯西形式中数 t 满足 $-1<x<t\leqslant 0$. 证明

$|x(1+t)^{\alpha-1}|\leqslant|x|M$, 其中 $M=\max(1,(1+x)^{\alpha-1})$,

并且 $$\left|\frac{x-t}{1+t}\right|=|x|\left(\frac{1-t/x}{1+t}\right)\leqslant|x|.$$

应用余项的柯西形式以及下列事实

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1}=\alpha\binom{\alpha-1}{n},$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0$.

*17. (a) 假定序列 $\{a_n\}$ 的部分和有界, 而 $\{b_n\}$ 是一个递减序列且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. 提示: 应用阿贝耳引理(习题二十一, 20)

验证柯西准则.

(b) 由这个结果导出莱布尼兹定理.

(c) 应用习题十五，31 证明：如果 x 对于任何整数 k 都不具有 $2k\pi$ 的形式，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n$ 收敛.（在 $x=2k\pi$ 的情况下它显然发散.）

*18. 假定 $\{a_n\}$ 是递减的且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 也收敛（"柯西凝聚定理"）. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 的发散是一种特殊情况，因为如果 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(1/2^n)$ 也应收敛；这个说明可作为一个提示.

*19. (a) 证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛.

(b) 证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n$ 收敛.

*20. 假定 $\{a_n\}$ 是递减的且每个 $a_n\geqslant 0$. 证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$. 提示：写出柯西准则且务必应用 $\{a_n\}$ 是递减的这一事实.

*21. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则其部分和 s_n 是有界的，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 这会使人们推测部分和的有界性连同条件 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 会意味着 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性. 这种推测是不正确的，但要找出一个反例则需要一些创造性. 作为一个提示，注意到部分和的某个**子序列**必须收敛；你应该设法使这发生而不让该序列本身收敛.

*22. $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ 的发散性是下述值得注意的事实的一个特殊的结果. 这个事

实是：任何正的有理数 x 都可以写成形如 $1/n$ 的一些互异数的有限和．这样一种表示式总能用下述的直截了当的方法求出，就是不断地加上该序列中不至于过大的下一个数．例如，下列的计算

$$\frac{19}{15}-\frac{1}{2}=\frac{23}{30}$$

$$\frac{23}{30}-\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$$

$$\frac{13}{30}-\frac{1}{4}=\frac{11}{60}$$

$$\frac{11}{60}<\frac{1}{5}$$

$$\frac{11}{60}-\frac{1}{6}=\frac{1}{60}$$

说明

$$\frac{19}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{60}.$$

注意到分子 23, 13, 11, 1 是递减的．通过证明在这种计算中的分子总是递减的，因此最终使余数具有分子 1，从而证明每一个正的有理数 x 都可以写成这种形式．提示：你只需证实，如果 $p/q<1/n$，但 $p/q>1/(n+1)$，则 $p/q-1/(n+1)$ 的分子小于 p.

选题解答

1. (i) （绝对）收敛，因为 $|(\sin n\theta)/n^2|\leqslant 1/n^2$.

(iii) 发散，因为头 $2n$ 项的和为 $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

（因各项的绝对值不是递减的，所以不能应用莱布尼兹定理．）

(v) 发散，因为对于足够大的 n 有

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}\geqslant\frac{1}{2\cdot n^{2/3}}.$$

(vii) 收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2/(n+1)!}{n^2/n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n+1}=0.$$

(ix) 发散，因为 $1/(\log n)>1/n$.

(xi) 收敛，因为对于 $n>9$ 有 $1/(\log n)^n<\frac{1}{2^n}$.

(xiii) 发散，因为对于足够大的 n 有

$$\frac{n^2}{n^3+1}>\frac{1}{2n}.$$

(xv) 发散，因为当 $N\to\infty$ 时，

$$\int_3^N\frac{1}{x\log x}dx=\log(\log N)-\log(\log 3)\to\infty.$$

(注意 $f(x)=1/(x\log x)$ 在 $[3,\infty)$ 上是递减的，因为对于 $x>e$ 有

$$f'(x)=\frac{-[1+\log x]}{(x\log x)^2}<0.$$

(xvii) 收敛，因为对于 $n>2$ 有 $1/n^2(\log n)<1/n^2$.

(xix) 收敛，因为根据习题十七，12，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}.$$

4. (a) 对于每个 N 我们显然有

$$0\leqslant\sum_{n=1}^{N}a_n10^{-n}<9\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n}=1,$$

于是由有界准则知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n10^{-n}$ 收敛，并在 0 和 1 之间. (实际上，只有当序列 $\{a_n\}$ 终究不为 0 时，这个数才表示为 $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$)

15. 阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}$，其积分为

$$\frac{1}{2}\left(\left[1-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right]+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right]+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

第二十三章 一致收敛和幂级数

上一章末尾提出一种研究无穷级数的完全新的方法．我们的注意力将从特殊的无穷和转移到象

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

这样一些等式上来，这些等式涉及随 x 而定的诸量之和．换句话说，我们感兴趣的是：由形如

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots$$

的等式所定义的函数（在前面例子中 $f_n(x)=x^{n-1}/(n-1)!$）．在这种情形下 $\{f_n\}$ 将是某个函数序列；对于每个 x 我们得到一个数列 $\{f_n(x)\}$，而 $f(x)$ 是这个序列的和．为了分析这样的函数，当然必需回忆一下：每个和

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots$$

按定义都是序列

$$f_1(x), f_1(x)+f_2(x), f_1(x)+f_2(x)+f_3(x), \cdots$$

的极限．如果我们用

$$s_n=f_1+\cdots+f_n$$

定义一个新的函数序列 $\{s_n\}$，则可用

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)$$

来更简洁地表示这一事实．

因此，我们有时将注意力集中于定义为极限

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

的函数，而不是定义为无穷和的函数．关于这种函数的全部结果可以很容易地概括为：实际上没有人们所希望成立的东西——倒是有很令人满意的一系列的反例．这些反例中的头一个，说明即使每一个 f_n 都连续，函数 f 仍然可能不连续；出乎你的预料，函数 f_n 将是非常简单的．图 1 表示诸函数

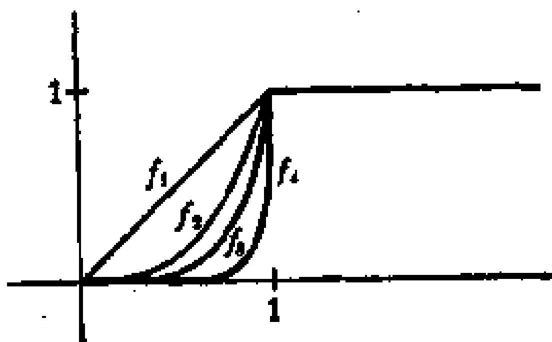


图 1

$$f_n(x)=\begin{cases}x^n, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

的图形．这些函数都是连续的，但函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 是不连续的；事实上

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

这同一现象的另一个例子如图 2 所示，函数 f_n 是由

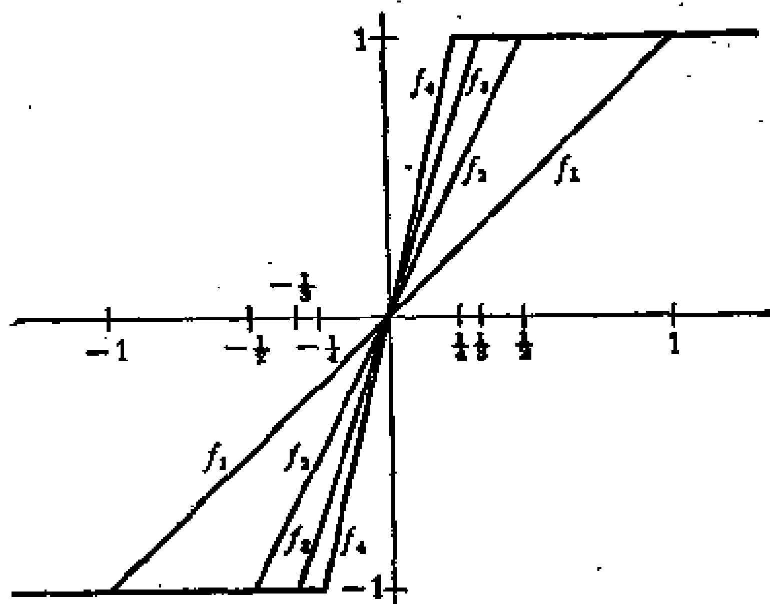


图 2

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -\frac{1}{n}\\ nx, & -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}\\ 1, & \frac{1}{n}\leqslant x\end{cases}$$

定义的. 在这种情况下, 如果 $x<0$, 则 $f_n(x)$最终(亦即对于足够大的 n)等于-1, 而若 $x>0$, 则 $f_n(x)$最终等于 1. 但对于所有的 n 却都有 $f_n(0)=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0;\end{cases}$$

所以再次出现 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$不连续的情况.

将上例中的棱角弄圆, 甚至能得到一个可微函数的序列$\{f_n\}$, 对于这个序列来说, 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$不连续. 一个这样的序列是不难明确地定义的:

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -\frac{1}{n}\\ \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), & -\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}\\ 1, & \frac{1}{n}\leqslant x.\end{cases}$$

这些函数都是可微的(图 3), 但我们仍有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

另外, 不仅是连续性和可微性会出问题. 另一个难题是如图 4 所示的序列$\{f_n\}$; 在区间$[0, 1/n]$上, f_n 的图形形成一个高为 n 的等腰三角形, 而对于 $x\geqslant 1/n$ 则有 $f_n(x)=0$. 这些函数可以明确地

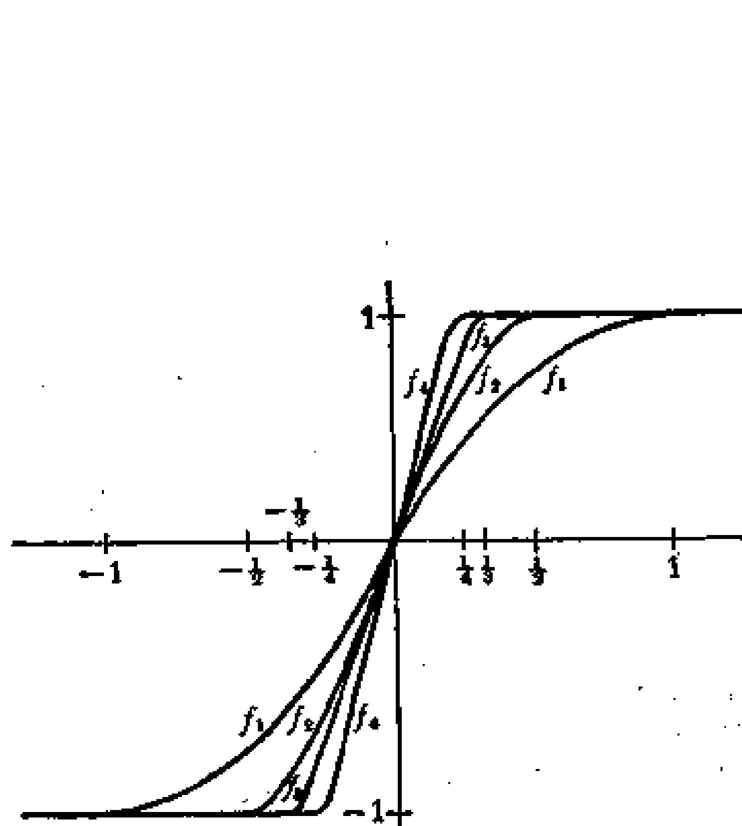


图 3

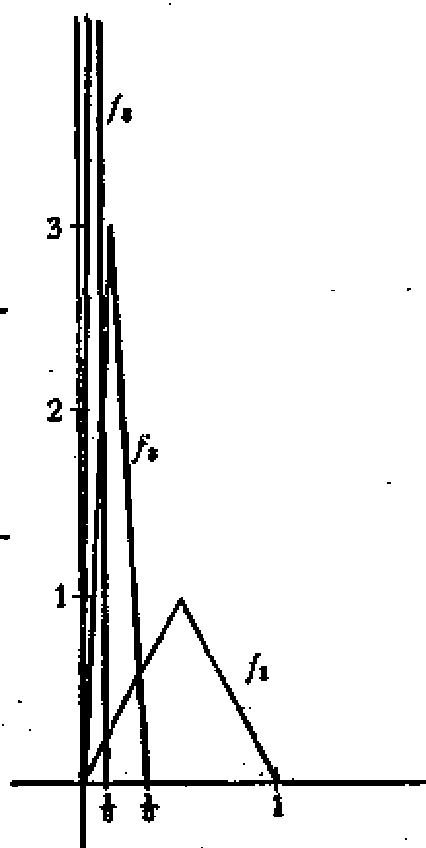


图 4

定义为:

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2n}\\ 2n-2n^2x, & \dfrac{1}{2n}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

因该序列在 0 附近的变化很古怪，致使我们纯朴的数学直觉会觉得$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 未必总是存在的. 然而，这个极限对于所有的 x 的确都存在，并且函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$甚至还是连续的. 事实上，如果 $x>0$, 则$f_n(x)$最终等于 0, 因此$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$; 另外, 对于所有的 n 有 $f_n(0)=0$，所以我们当然有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$, 换句话说, 对于

所有的 x 有 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 另一方面，其积分很快会揭示出这一序列奇怪的性质；我们有

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2},$$

但

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

这个特殊的函数序列表现出一种在我们初次研究用极限定义的函数时确实想象不到的性质. 虽然

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

对于 $[0,1]$ 内的每个 x 都是正确的，但函数 f_n 的图形在位于它的邻近这意义上却不"趋近" f 的图形——如图 5 所示，如果我们画一个总宽度为 2ε 的围绕 f 的条形（允许上下各有一个 ε 的宽度），则无论我们选取多么大的一个 n，f_n 的图形不完全位于这个条形之内. 当然，对于每个 x 都存在某个 N 使得当 $n>N$ 时点 $(x, f_n(x))$ 位于这个条形之内；这个论断只是相当于 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 这一事实. 但是当 x 选得越来越接近 0 时，必须选取越来越大的 N 值，且没有一个 N 会同时对于所有的 x 成立.

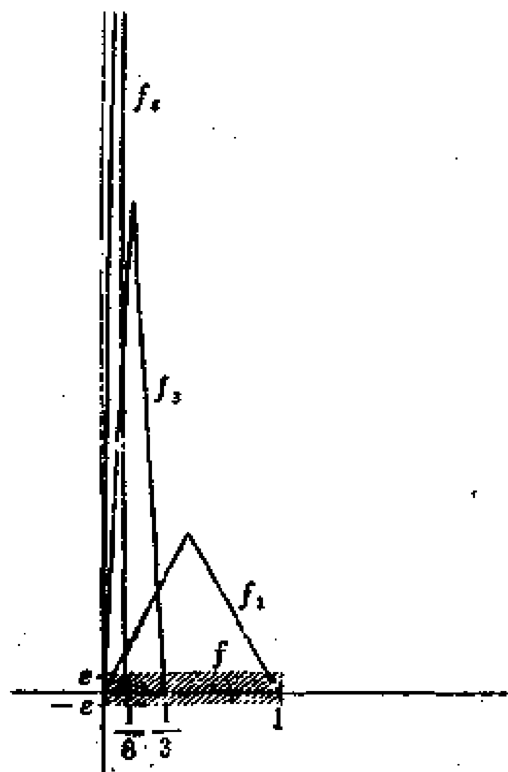


图 5

虽则没有一一说明，但对于前面给出的每一个别的例子来说，也的确发生同样的情况．对于序列

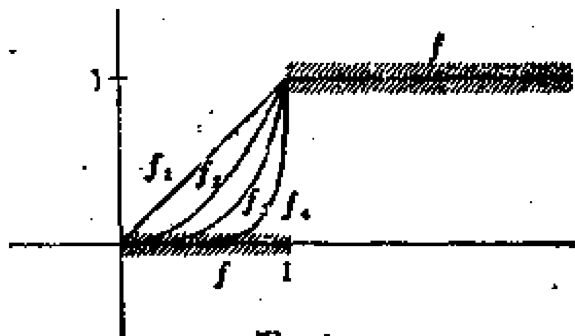


图 6

$$f_n(x)=\begin{cases}x^n, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

图6说明了这一点．围绕$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$的图形已作出了一个总宽度为$2\varepsilon$的条形．如果$\varepsilon<\frac{1}{2}$，则这个条形便由都不包含第二个坐标等于$\frac{1}{2}$的点的两片组成；因为每个函数$f_n$都取得值$\frac{1}{2}$，所以每个$f_n$的图形都不会位于这个条形之内．又一次出现这样的情形，即对于每个点x都存在某个N，使得当$n>N$时$(x, f_n(x))$位于该条形之内，但要选得一个对于所有x同时成立的N则是不可能的．

容易证实，正是这同一情形对于其他各例也发生．在每一种情况下我们有一个函数f和一个函数序列$\{f_n\}$，它们全都定义在某个集合A上，使得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

对A中的所有x都成立．这意味着：

对于所有$\varepsilon>0$，且对于A中的所有x，都存在某个N使得当$n>N$时有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$．

但是在每种情况下，对于各不同的x必须选取不同的N，且在每种情况中，下列说法是不对的：

对于所有$\varepsilon>0$都存在某个N，使得对于A中的所有x当$n>N$时恒有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$．

虽然这个条件和第一个不同的地方，仅仅在于"对于A中的所

有 x" 这一短语的一个小的移动，但它却具有完全不同的意义。如果序列 $\{f_n\}$ 满足这第二个条件，则正如在图 7 中所示的那样，f_n 的图形终于会接近 f 的图形。弄清这个条件恰是极限函数的研究得以实行的那种条件。

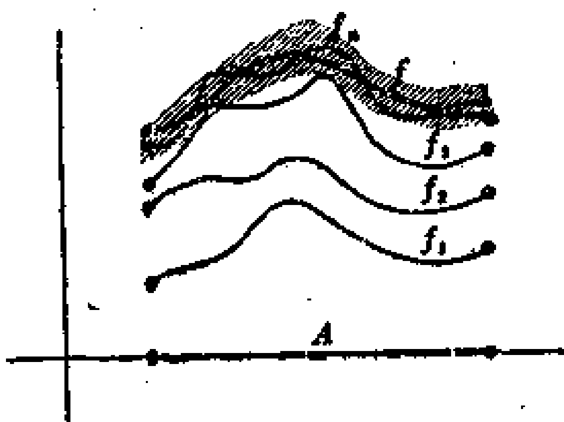


图 7

定义

> 设 $\{f_n\}$ 是一个定义在 A 上的函数序列，又设 f 也是一个定义在 A 上的函数。如果对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在某个 N 使得对于 A 中的所有 x，当 $n>N$ 时恒有
>
> $$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$
>
> 则称 f 为 **$\{f_n\}$ 在 A 上的一致极限**。我们也说 **$\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛于 f**，或 **f_n 在 A 上一致地趋于 f**。

作为这个定义的对立物，如果我们仅知道对于 A 中的每个 x 都有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

则我们说 **$\{f_n\}$ 在 A 上点态收敛于 f**。显然，一致收敛性蕴含点态收敛（但反之则不然！）。

关于一致收敛性的应用的证据是完全不难收集的。积分代表一个特别容易的论题；图 7 使下述事实几乎是明显的，即如果 $\{f_n\}$ 一致地收敛于 f，则 f_n 的积分便能任意接近于 f 的积分。叙述得更严格一点，我们便有下面的定理。

定理 1 设 $\{f_n\}$ 是一个在 $[a, b]$ 上可积的函数的序列，且 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致地收敛于一个在 $[a, b]$ 上可积的函数 f。则

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

证明 设 $e>0$，则存在某个 N 使得对于一切 $n>N$ 及 $[a,b]$ 中的所有 x 我们有

$$|f(x)-f_n(x)|<e.$$

于是，如果 $n>N$ 我们便有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f_n(x)dx\right|&=\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]dx\right|\\&\leqslant\int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx\\&\leqslant\int_a^b e dx\\&=e(b-a).\end{aligned}$$

因为这对于任意的 $e>0$ 都是对的，从而推出

$$\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n. \blacksquare$$

连续性的处理只是稍微困难一点，它涉及一个所谓"$e/3$-论证"，一个 $|f(x)-f(x+h)|$ 的三步估计．如果 $\{f_n\}$ 是一个一致地收敛于 f 的连续函数的序列，则存在某个 n 使得

(1) $|f(x)-f_n(x)|<\dfrac{e}{3}$,

(2) $|f(x+h)-f_n(x+h)|<\dfrac{e}{3}$.

另外，因为 f_n 是连续的，所有对于充分小的 h 我们有

(3) $|f_n(x)-f_n(x+h)|<\dfrac{e}{3}$.

从(1)，(2)，和(3)推出 $|f(x)-f(x+h)|<e$．然而，为了得到(3)我们必须以一种在 n 已被选定后才能预言的方式限制 $|h|$ 的大小；所以十分重要的是应存在某个固定的 n 使得无论 $|h|$ 多么小

(2)式都成立——这正是一致收敛性进入证明的原由.

定理 2 设 $\{f_n\}$ 是一个在 $[a,b]$ 上连续的函数的序列, 且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致地收敛于 f. 则 f 在 $[a,b]$ 上也是连续的.

证明 对于 $[a,b]$ 中的每个 x, 我们必须证明 f 在 x 处是连续的. 我们将只涉及在 (a,b) 内的 x; $x=a$ 和 $x=b$ 的情形需要作适当的简单修正.

设 $\varepsilon>0$. 因为 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致地收敛于 f, 则存在某个 n 使得

$$|f(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对于 $[a,b]$ 中的一切 y 均成立. 特别是, 对于所有使得 $x+h$ 在 $[a,b]$ 内的 h, 我们有

$$(1)\quad |f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$(2)\quad |f(x+h)-f_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

既然 f_n 是连续的, 所以存在某个 $\delta>0$ 使得对于 $|h|<\delta$ 我们有

$$(3)\quad |f_n(x)-f_n(x+h)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 如果 $|h|<\delta$, 则

$$\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)|
&=|f(x+h)-f_n(x+h)+f_n(x+h)-f_n(x)\\
&\qquad+f_n(x)-f(x)|\\
&\leqslant|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|\\
&\qquad+|f_n(x)-f(x)|\\
&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\
&=\varepsilon.
\end{aligned}$$

这证明 f 在 x 处是连续的. ∎

在由定理 1 和定理 2 所提供的两个值得注意的结果之后，关于可微性的情况却是非常令人失望的. 即使 f_n 是可微的，且 $\{f_n\}$ 一致地收敛于 f, f 仍然不一定是可微的. 例如，图 8 表明存在一致收敛于函数 $f(x)=|x|$ 的一个可微函数的序列. 即使 f 是可微的，等式

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

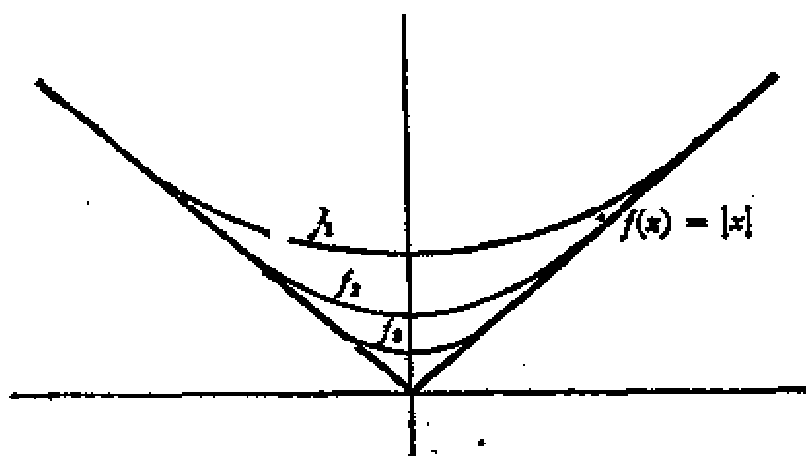


图 8

仍可能是不成立的. 如果我们想到一个光滑的函数可以用振动非常迅速的一些函数来逼近，这就一点也不奇怪了. 例如(图9)，如果

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(n^2x),$$

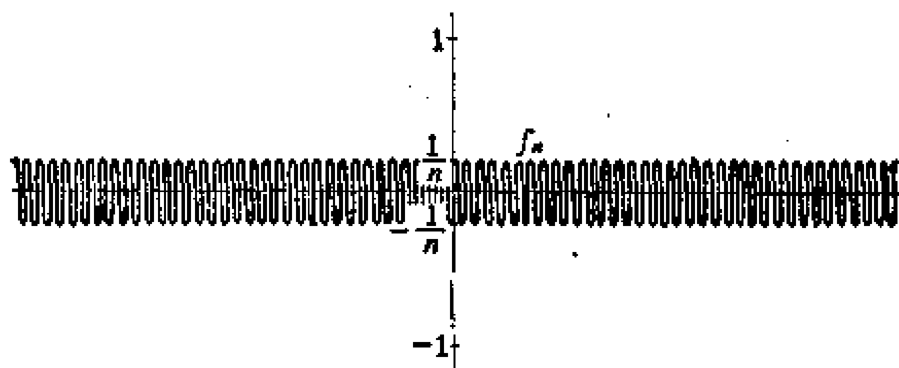


图 9

则 $\{f_n\}$ 一致地收敛于函数 $f(x)=0$, 但

$$f_n'(x)=n\cos(n^2x),$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}n\cos(n^2x)$并非总是存在的(比如,当 $x=0$ 时它就不存在).

虽然有这样一些例子,但微积分基本定理实际上仍保证某种关于导数的定理将是定理 1 的一个推论;其决定性的假设是$\{f_n'\}$一致收敛(于某个连续的函数).

定理 3 设$\{f_n\}$是一个在$[a, b]$上可微的函数的序列,且设$\{f_n\}$(点态)收敛于 f. 另外假定$\{f_n'\}$在$[a, b]$上一致地收敛于某个连续函数 g. 那么 f 是可微的且$f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)$.

证明 应用定理 1 于区间$[a, x]$,我们看到对每个 x 都有

$$\begin{aligned}\int_a^x g&=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'\\&=\lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(a)]\\&=f(x)-f(a).\end{aligned}$$

因为 g 是连续的,从而推出对于在区间$[a, b]$内的所有 x 都有

$$f'(x)=g(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x). \blacksquare$$

关于一致极限的基本事实现在已被证明,因此如何处理定义为无穷和

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots$$

的函数就很清楚了.上面的等式意味着

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(f_1(x)+\cdots+f_n(x));$$

当新的序列

$$f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, \cdots$$

一致地收敛于 f 时,我们前边的一些定理便是适用的.因为这是我们始终感兴趣的唯一情况,所以我们用一个定义将它挑选出来.

定义

如果序列

$$f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, \cdots$$

在 A 上一致地收敛于 f，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 A 上一致收敛于 f（更正式地说：序列 $\{f_n\}$ 在 A 上是一致可加的）。

现在我们可以将定理 1，2，和 3 中的每一个应用于一致收敛的级数；所得结果可以在一个推论中来叙述：

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $[a, b]$ 上一致地收敛于 f，那么

(1) 如果每个 f_n 都在 $[a, b]$ 上是连续的，则 f 在 $[a, b]$ 上是连续的。

(2) 如果 f 和每个 f_n 都在 $[a, b]$ 上是可积的，则

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

另外，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $[a, b]$ 上（点态）收敛于 f，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ 在 $[a, b]$ 上一致地收敛于某个连续的函数，则

(3) 对于 $[a, b]$ 内的所有 x 都有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

证明

(1) 如果每个 f_n 都是连续的，则每个 $f_1+\cdots+f_n$ 也是连续的，而 f 是序列 $f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, \cdots$ 的一致极限，所以按定理 2，f 是连续的。

(2) 因为 $f_1, f_1+f_2, f_1+f_2+f_3, \cdots$ 一致地收敛于 f，所以从定理 1 推出

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_1 + \cdots + f_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_1 + \cdots + \int_a^b f_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n.$$

(3) 每个函数 $f_1+\cdots+f_n$ 是可微的，且具有导数$f_1'+\cdots+f_n'$，而按假设 f_1', $f_1'+f_2'$, $f_1'+f_2'+f_3'$, …一致地收敛于一个连续函数。从而由定理 3 推出

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty}[f_1'(x) + \cdots + f_n'(x)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \blacksquare$$

这个推论此刻还不是非常有用的，因为预言序列 f_1, f_1+f_2, $f_1+f_2+f_3$, …什么时候会一致收敛似乎是十分困难的. 保证这种一致收敛性的最重要的条件由下述定理所提供；由于巧妙地选出非常简单的假设，使该证明几乎是显然的.

定理 4 （魏尔斯特拉斯M-判别法） 设$\{f_n\}$是一个定义在A上的函数的序列，又设$\{M_n\}$是一个使得对于A中的所有x都有

$$|f_n(x)| \leqslant M_n$$

的数列. 另外假定$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$收敛. 则对于 A 中的每个x级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛（实际上它绝对收敛），且$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$在 A 上一致地收敛于函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

证明 根据比较判别法，对于A中的所有x级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$（绝对）收敛．另外，对于$A$中的所有$x$我们有

$$|f(x)-[f_1(x)+\cdots+f_N(x)]|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(x)\right|$$
$$\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}|f_n(x)|$$
$$\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}M_n.$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$收敛，所以通过将N选得充分大便可以使数$\sum_{n=N+1}^{\infty}M_n$要多小有多小．▌

下面的序列$\{f_n\}$说明了魏尔斯特拉斯M-判别法的一个简单的应用．设$\{x\}$表示由x到最邻近的整数的距离（$f(x)=\{x\}$的图形如图10所示）．现在定义

$$f_n(x)=\frac{1}{10^n}\{10^n x\}.$$

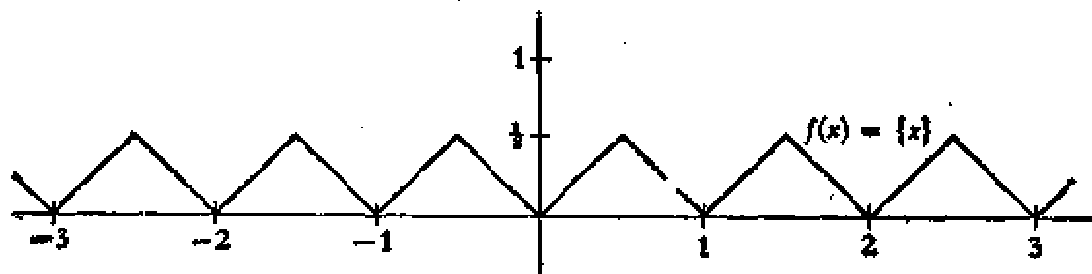
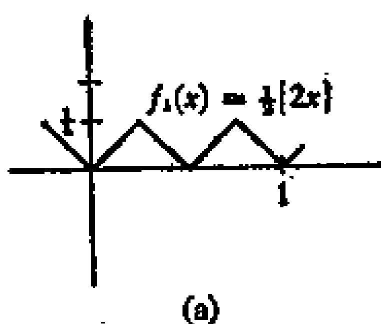
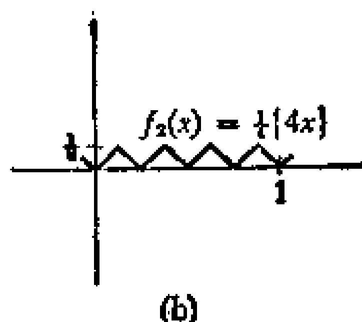


图 10

函数f_1和f_2表示在图11中（但为了画图简单，10^n已以2^n代替）．这个函数序列这样定义以便魏尔斯特拉斯M-判别法可自动适用；显然对于所有的x都有



(a)



(b)

图 11

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{10^n},$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/10^n$收敛．于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$一致收敛．因为每个$f_n$都是连续的，所以推论蕴含了函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\{10^nx\}$$

也连续．图12中给出了最初的几个部分和$f_1+f_2+\cdots+f_n$的图形．随着n的增大，图形变得越来越难画，且如同下边的定理（主要是作为一个有趣的侧面而列在这里的，如果你觉得道路太艰险，就跳过它去不读）所证明的那样，无穷和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$的图简直就不能画．

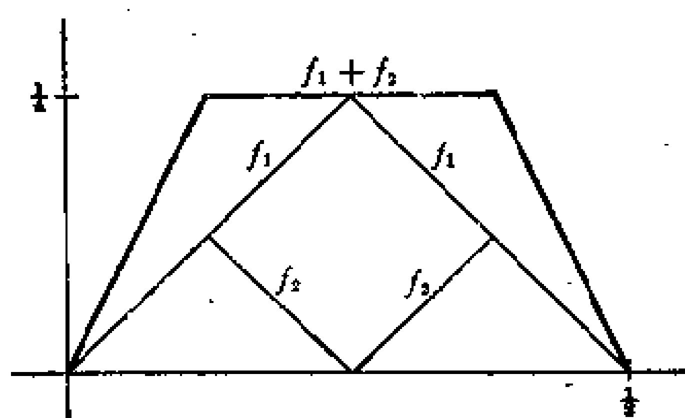
定理5　函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\{10^nx\}$$

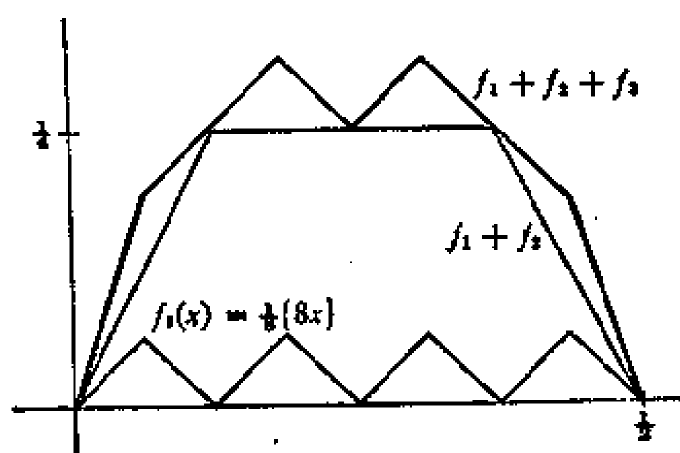
是处处连续却没有一处是可微的！

证明　我们刚才证明了f是连续的，这是证明中仅有的用到一致收敛性的部分．我们将证明对于任何a，f在a处是不可微的，所用的方法是显示一个趋于0的特殊序列$\{h_m\}$，对于此序列，

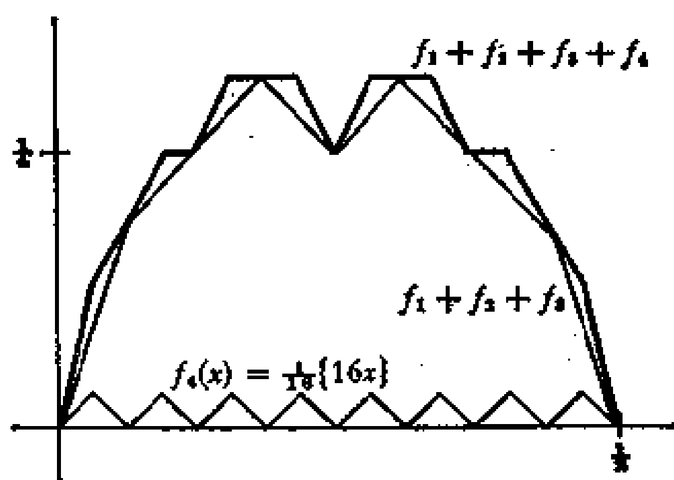
$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$



(a)



(b)



(c)

图 12

不存在．显然只需研究满足 $0<a\leqslant1$ 的那些数 a 就足够了．

假定 a 的十进小数表示是

$$a=0.a_1a_2a_3a_4\cdots$$

那么当 $a_m \neq 4$ 或 9 时令 $h_m = 10^{-m}$，而当 $a_m = 4$ 或 9 时(关于这两个例外的理由不久即会明白)，令 $h_m = -10^{-m}$. 这时

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\frac{\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}}{\pm 10^{-m}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\pm 10^{m-n}[\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}].\end{aligned}$$

这个无穷级数实际上是一个有限和，因为当 $n \geqslant m$ 时，$10^n h_m$ 是一个整数，因此

$$\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}=0.$$

另一方面，对于 $n<m$ 我们可写出

$$10^n a = 整数 + 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots a_m\cdots$$

$$10^n(a+h_m) = 整数 + 0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots(a_m \pm 1)\cdots$$

(为了使第二个等式成立，当 $a_m = 9$ 时我们必须选择 $h_m = -10^{-m}$). 现在假设

$$0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots a_m\cdots \leqslant \frac{1}{2}.$$

则我们也有

$$0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots(a_m \pm 1)\cdots \leqslant \frac{1}{2}.$$

(在 $m=n+1$ 的特殊情况下，由于我们在 $a_m=4$ 时选取 $h_m = -10^{-m}$，所以第二个不等式是成立的). 这就意味着

$$\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}=\pm 10^{n-m},$$

且当 $0.a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots > \frac{1}{2}$ 时所导出的恰是同一个等式. 这样，对于 $n<m$ 我们有

$$10^{m-n}[\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}]=\pm 1.$$

换句话说，

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

是 $m-1$ 个数之和，其中的每个数是 ±1. 既然将 $+1$ 或 -1 加到一个数上便使它由奇数变为偶数，或由偶数变为奇数. 所以 $m-1$ 个都是 ±1 的数之和当 m 为奇数时是一个偶整数，而当 m 为偶数时是一个奇整数. 因此比值

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

的序列无论如何不可能收敛，因为它是一个交替地取奇数和偶数的整数序列. ▌

除了在前边的定理中所起的作用之外，魏尔斯特拉斯 M-判别法是分析具有良好性态的那些函数的一种理想工具. 我们将特别注意形如

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

的那些函数，这类函数也可以关于 $f_n(x)=a_n(x-a)^n$ 用等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$$

来描述. 这样一种仅依赖于$(x-a)$的幂的函数的无穷和，称之为**中心在 a 处的幂级数**. 为简单起见，我们通常将集中考虑中心在 0 处的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

一组特别重要的幂级数是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

的幂级数．其中的 f 是在 a 处具有一切阶导数的某个函数；这个级数称为关于 f 在 a 处的泰勒级数．当然，等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

不一定成立，仅当余项满足 $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=0$ 时上式才成立．

我们已经知道一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不一定对于所有 x 都是收敛的．例如幂级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

仅仅对于 $|x|\leqslant 1$ 收敛，而幂级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

仅对于 $-1<x\leqslant 1$ 收敛．甚至可以产生一个仅仅对于 $x=0$ 收敛的幂级数．例如，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$$

对于 $x\neq 0$ 不收敛．事实上，比值

$$\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}=(n+1)x$$

对任何 $x\neq 0$ 都是无界的．然而，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对于某个 $x_0\neq 0$ 收敛，那么对于 $|x|<|x_0|$ 关于该级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 可说的就会更多．

定理 6 假定级数

$$f(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n$$

收敛，且设 a 是满足条件 $0<a<|x_0|$ 的任何一个数．则级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

在$[-a,a]$上一致收敛(且绝对收敛)．另外，同一结论对于级数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

也是对的．最后，对于一切满足 $|x|<|x_0|$ 的 x，f 是可微的且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}.$$

证明 因为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n$收敛，所以项 $a_n x_0^n$ 趋于 0．因此它们必定是有界的：即存在某个数M使得对于所有的 n，

$$|a_n x_0^n|=|a_n|\cdot|x_0^n|\leqslant M.$$

现在如果 x 在$[-a,a]$内，则$|x|\leqslant|a|$，因此

$$\begin{aligned}|a_n x^n|&=|a_n|\cdot|x^n|\\&\leqslant|a_n|\cdot|a^n|\\&=|a_n|\cdot|x_0|^n\cdot\left|\frac{a}{x_0}\right|^n \quad \text{(这是聪明的一步)}\\&\leqslant M\left|\frac{a}{x_0}\right|^n.\end{aligned}$$

而$|a/x_0|<1$，所以(几何)级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{a}{x_0}\right|^n=M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

收敛．选取$M\cdot|a/x_0|^n$ 作为在魏尔斯特拉斯M-判别法中的 M_n，便

推出$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在区间$[-a, a]$上一致收敛.

为了对于$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$证明同样的论断，注意到

$$
\begin{aligned}
|na_nx^{n-1}| &= n|a_n|\cdot|x^{n-1}| \\
&\leqslant n|a_n|\cdot|a^{n-1}| \\
&= \frac{|a_n|}{|a|}\cdot|x_0|^n n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n \\
&\leqslant \frac{M}{|a|}n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n.
\end{aligned}
$$

因为$|a/x_0|<1$，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{|a|}n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n=\frac{M}{|a|}\sum_{n=1}^{\infty}n\left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

收敛(这个事实已在第二十二章中作为比率判别法的一个应用被证明过). 再次求助于魏尔斯特拉斯M-判别法证明$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在$[-a, a]$上一致收敛.

最后，我们的推论证明：首先g是连续的，其次对于$[-a, a]$内的x有

$$f'(x)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

因为我们可以选取满足$0<a<|x_0|$的任何数a，所以这个结果对于满足$|x|<|x_0|$的所有x均成立.

将定理 6 用于无穷级数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

恰好产生所期望的结果. 这些级数中的每一个对于任何 x_0 都收敛, 因此定理 6 的结果对任何 x 都是适用的:

$$\sin'(x)=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\cdots=\cos x,$$

$$\cos'(x)=-\frac{2x}{2!}+\frac{4x^3}{4!}-\frac{6x^5}{6!}+\cdots=-\sin x,$$

$$\exp'(x)=1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\cdots=\exp(x).$$

对于函数 arctan 和 $f(x)=\log(1+x)$, 情况只是稍微复杂一些. 因为级数

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

对于 $x_0=1$ 收敛, 所以它对于 $|x|<1$ 也收敛, 且对于 $|x|<1$ 有

$$\arctan'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

在这个情况下, 级数碰巧对 $x=-1$ 也收敛. 然而, 关于导数的公式对于 $x=1$ 或 $x=-1$ 是不正确的; 事实上级数

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

对于 $x=1$ 和 $x=-1$ 发散. 注意, 这与定理 6 并不矛盾, 定理 6 证明仅仅对于 $|x|<|x_0|$ 导数才由所期望的公式给出.

因为级数

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

对于 $x_0=1$ 收敛, 所以它对于 $|x|<1$ 也收敛, 且对于 $|x|<1$ 有

$$\frac{1}{1+x}=\log'(1+x)=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

在这种情况下, 原来的级数对 $x=-1$ 不收敛; 再则, 其微分后的级

数对于 $x=1$ 不收敛.

适用于幂级数的所有讨论，在导数用幂级数表示的点处自动地适用于它的导数. 如果

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

对于在某个区间 $(-R,R)$ 内的一切 x 都收敛，则由定理 6 可推出对于 $(-R,R)$ 内的一切 x,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

再次应用定理 6 我们求得

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

接着用归纳法我们求得

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}.$$

这样，由一个在某个区间 $(-R,R)$ 内收敛的幂级数定义的函数，在该区间内自动地是无限次可微的. 另外，前面的等式暗含有

$$f^{(k)}(0)=k!a_k,$$

因此

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

换句话说，一个收敛的中心在 0 处的幂级数总是它所定义的那个函数在 0 处的泰勒级数.

基于这种愉快的回顾，我们可以就此心安理得地结束对幂级数和泰勒级数的研究. 然而，仔细评估我们的处境，就会暴露出一些不能解释的事实.

$\sin x$, $\cos x$, 和 e^x 的泰勒级数都是那样的尽如人意；它们对所有 x 都收敛，且对所有 x 都能逐项微分. 至于函数 $f(x)=\log(1+x)$ 的泰勒级数，就有点令人不大满意，因为它仅仅对于 $-1<x\leqslant 1$ 是收敛的，但这个缺陷乃是幂级数的基本特征的一个必然的结果. 如果关于 f 的泰勒级数对于 $|x_0|>1$ 的任一 x_0 收敛，那么它将在区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 上收敛，且它所定义的函数在这个区间上将是可微的，从而也是连续的. 但这是不可能的，因为它在它等于 $\log(1+x)$ 的区间 $(-1, 1)$ 上是无界的.

关于 $\arctan x$ 的泰勒级数就更难理解了——似乎没有任何借口来拒绝这个级数当 $|x|>1$ 时是收敛的. 这种不可思议的性质甚至更加明显地由一个无限次可微的仅次于多项式函数的函数 $f(x)=1/(1+x^2)$ 显示出来. f 的泰勒多项式由

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

给出. 当 $|x|\geqslant 1$ 时该泰勒级数一点也不收敛. 这是为什么呢？究竟是什么看不见的障碍阻挡着泰勒级数使之不能延展过 1 和 -1 呢？提出这种问题常常是令人难堪的，因为我们也许必须安排好一个冷冰冰的回答：它发生就是因为它发生了——事情本来就是这个样子嘛！在这种情况下有一种解释，不过现在就给出这种解释则是不可能的；虽然问题是有关实数的，但是只有将其置于较大的范围才能得到理智的回答. 所以在第二十六章中完成我们关于泰勒级数的讨论之前，有必要拿出两章的篇幅致力于全新的材料.

习　题

1. 对于下面的每一个序列 $\{f_n\}$，试确定 $\{f_n\}$ 在指定的区间上的点态极限（如果它存在的话），并判定 $\{f_n\}$ 是否一致地收敛于这个函数：

 (i) $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$，在 $[0, 1]$ 上.

(ii) $f_n(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant n\\ x-n, & x\geqslant n,\end{cases}$

在$[a,b]$上，及在$\mathbf{R}$上。

(iii) $f_n(x)=\frac{e^x}{x^n}$，在$(1,\infty)$上。

(iv) $f_n(x)=e^{-nx^2}$，在$[-1,1]$上。

(v) $f_n(x)=\frac{e^{-x^2}}{n}$，在$\mathbf{R}$上。

2. 对下面的每个函数求出其在0处的泰勒级数：

(i) $f(x)=\frac{1}{x-a}$，$a\neq0$.

(ii) $f(x)=\log(x-a)$，$a\neq0$.

(iii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. (应用习题十九，6.)

(iv) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(v) $f(x)=\arcsin x$.

3. 求下列各个无穷和.

(i) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$.

(ii) $1-x^3+x^6-x^9+\cdots$，提示：$1-x+x^2-x^3+\cdots$是什么？

(iii) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot2}+\frac{x^4}{4\cdot3}-\frac{x^5}{5\cdot4}+\cdots$对$|x|<1$. 提示：微分.

*(iv) $\frac{1}{2\cdot1}-\frac{1}{3\cdot2}+\frac{1}{4\cdot3}-\frac{1}{5\cdot4}+\cdots$

*(v) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$.

(参看第10题.)

4. 设当$x\neq0$时$f(x)=\frac{\sin x}{x}$而$f(0)=1$，试求$f^{(k)}(0)$. 提示：求关于f的幂级数.

5. 在这一题中我们将推导二项式级数

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ |x|<1$$

虽然我们将用到在习题二十二，16的(a)中所证明的一个事实——级

数$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$对于$|x|<1$的确收敛，但却无需那个题中的全部结果。

(a) 证明对于$|x|<1$有：$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$.

(b) 现在证明任何满足(a)的函数f都对于某个常数c具有形式$f(x)=c(1+x)^{\alpha}$，并应用这个事实建立二项式级数. 提示：研究$g(x)=\dfrac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}$.

6. (a) 假定$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$对于区间$(-R,R)$内的一切$x$都收敛，且对于$(-R,R)$内的一切$x$有$f(x)=0$. 证明每一个$a_n=0$.（如果你记得关于$a_n$的公式，这是容易的.）

(b) 假定我们仅仅知道对于某个满足条件$\lim_{n\to\infty}x_n=0$的序列$\{x_n\}$有$f(x_n)=0$，证明仍有每个$a_n=0$. 提示：首先证明$f(0)=a_0=0$；然后证明$f'(0)=a_1=0$，等等.

这个结果表明，如果当$x\neq0$时$f(x)=e^{-1/x^2}\sin 1/x$，则f不可能写为一个幂级数. 它还表明一个由幂级数定义的函数不可能对于$x\leqslant0$等于零而对于$x>0$不等于零——因此幂级数不可能描述一个直到时刻$t=0$一直保持静止然后开始运动的这种质点运动!

(c) 假定$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$对于某个包含0的区间内的所有$x$收敛，且对于某个收敛于0的序列$\{t_n\}$有$f(t_m)=g(t_m)$，证明对每个$n$都有$a_n=b_n$，特别是，*一个函数只能有一个中心在0处的幂级数表示式*.

7. 证明：如果$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$是一个偶函数，则对奇数$n$有$a_n=0$. 而如果$f$是一个奇函数，则对于偶数$n$有$a_n=0$.

*8. 回想一下斐波纳奇序列$\{a_n\}$定义为$a_1=a_2=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$.

(a) 证明$a_{n+1}/a_n\leqslant2$.

(b) 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}=1+x+2x^2+3x^3+\cdots$$

试应用比率判别法证明当$|x|<\frac{1}{2}$时 $f(x)$ 收敛.

(c) 证明　如果$|x|<1/2$, 则

$$f(x)=\frac{-1}{x^2+x-1}.$$

提示: 这个等式可以写为 $f(x)-xf(x)-x^2f(x)=1$.

(d) 应用关于$1/(x^2+x-1)$的部分分式分解以及关于 $1/(x-a)$ 的幂级数求关于 f 的另一幂级数.

(e) 由第 6 题推出关于 f 所得到的两个幂级数必须是相同的. 用这一事实证明

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

9. 证明关于 $f(x)=\log(1-x)$的幂级数仅仅对于$-1\leqslant x<1$ 收敛, 而关于$g(x)=\log[(1+x)/(1-x)]$的幂级数仅仅对于$(-1,1)$内的 x 是收敛的.

*10. 假定$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 则我们已经知道 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$对于 $0<a<1$ 必定在$[-a,a]$上一致收敛, 但它可以在$[-1,1]$上不一致收敛; 事实上, 它甚至可以在点-1 上不收敛(例如, 当 $f(x)=\log(1+x)$时就是如此). 不过, 漂亮的阿贝尔定理证明了该级数在$[0,1]$上确实一致收敛. 因此, f 在$[0,1]$上是连续的, 特别有 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. 注意到按照阿贝尔引理(习题二十一, 20), 当$|a_m+\cdots+a_n|<\varepsilon$ 时, $|a_m x^m+\cdots+a_n x^n|<\varepsilon$, 试据此证明阿贝尔定理.

11. 如果$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 存在, 则序列$\{a_n\}$称为**阿贝尔可加的**; 第 10 题证明一个可加的序列必是阿贝尔可加的. 试求一个是阿贝尔可加的但不是可加的序列.

提示: 检查一下泰勒级数的一览表, 找一个虽然它所表示的函数在 1

处是连续的，但它却在 1 处不收敛的泰勒级数.

12. 在定理 3 中我们仅仅假定了 $\{f_n\}$ 点态收敛于 f. 证明其余的假设保证了$\{f_n\}$实际上一致收敛于 f.

13. (a) 假定 $\{f_n\}$ 是一个在$[a, b]$上有界(不一定连续)的函数的序列，它在$[a, b]$上一致地收敛于 f. 证明 f 在$[a, b]$上是有界的.

    (b) 求一个在$[a, b]$上连续的函数序列，它点收敛于一个在$[a, b]$上无界的函数.

*14. 假定 f 是可微的，证明函数 f' 是一个连续函数的序列的点态极限. (因为我们已经知道不连续的导数的例子，所以这就提供了连续函数的点态极限是不连续的另一例子.)

15. 求一个可积函数的序列$\{f_n\}$，它收敛于 (不可积的) 函数 f: 在有理点上 f 等于 1，而在无理点上 f 等于 0. 提示：每个 f_n 除了在几个点之外都等于 0.

16. 这一题略述了一条研究积分的全然不同的途径；因此，应用有关以前研究过的积分的任何事实都是不正当的.

    (a) 设 s 是一个在$[a, b]$上的阶梯函数，亦即对于$[a, b]$的某种划分 $\{t_0, \cdots, t_n\}$，s 在(t_{i-1}, t_i)上是常数. 定义$\int_a^b s$为$\sum_{i=1}^{n} s_i(t_i - t_{i-1})$，其中 s_i 是 s 在 (t_{i-1}, t_i) 上的(常数)值. 证明这个定义不依赖于划分$\{t_0, \cdots, t_n\}$.

    (b) 如果函数 f 是一个在 $[a, b]$ 上的阶梯函数的序列 $\{s_n\}$ 的一致极限，则称它为$[a, b]$上的一个**规则函数**. 证明在这种情况下，对于任意 $\varepsilon>0$，存在某个 N，使得当 m, $n>N$ 时对于$[a, b]$内的一切 x 我们恒有$|s_n(x)-s_m(x)|<\varepsilon$.

    (c) 证明数列$\left\{\int_a^b s_n\right\}$将是一个柯西序列.

    (d) 假定$\{t_n\}$是一致地收敛于 f 的另一个在$[a, b]$上的阶梯函数的序列. 证明对于任意 $\varepsilon>0$，存在这样的 N，使得当 $n>N$ 时对于$[a, b]$中的一切 x 我们都有 $|s_n(x)-t_n(x)|<\varepsilon$.

    (e) 推断$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n$. 这意味着我们可以定义$\int_a^b f$为关于任意一个一致收敛于 f 的阶梯函数序列$\{s_n\}$的$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n$. 剩下的问

题仅仅是：哪些函数是规则的？这里是一部分回答。

*(f) 证明连续函数是规则的。

提示：为了求得一个在$[a, b]$上的阶梯函数s使之对于$[a, b]$内的一切x满足$|f(x)-s(x)|<\varepsilon$，研究在$[a, y]$上存在这样一个阶梯函数的所有的y。

*17. 求一个在$[0, 1]$上一致地逼近f的序列$\{f_n\}$，对于它$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n$ 在 $[0,1]$ 上之长度$)\neq f$在$[0,1]$上之长度。（长度已在习题十五，32中定义过，但其最简单的例子将涉及其图象的长度是明显的那些函数。）

选题解答

1. (i) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

$\{f_n\}$不一致收敛于f.

(iii) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$（因为对于$x>1$有$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$）。序列$\{f_n\}$不一致收敛于$f$；事实上，对于任何一个$n$而言，当$x$充分大时$f_n(x)$都有很大的值.

(v) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，且因为对于所有$x$有$|f_n(x)|\leqslant 1/n$，所以$\{f_n\}$一致收敛于$f$.

2. (i) $-\dfrac{1}{a}-\dfrac{x}{a^2}-\dfrac{x^2}{a^3}-\cdots$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^k$.

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}}{2k+1}x^{2k+1}$.

3. (i) e^{-x}

(iii) 如果

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 3}-\cdots,\ |x|\leqslant 1$$

则

$$f'(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

$$=\log(1+x),\ |x|<1,$$

所以对于$|x|<1$我们有

$f(x)=(1+x)\log(1+x)-(1+x)+c$，$c$为某个常数．因为

$f(0)=0$，所以$c=1$，因此对于$|x|<1$应有

$$f(x)=(1+x)\log(1+x)-x.$$

4．因为

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

所以我们有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

（注意到对$x=0$其右边是1）．因此

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}, & k=2n\\ 0, & k\text{为奇数}.\end{cases}$$

第二十四章　复　　数

除了上一章的最后几段以外，本书对实数曾作过不懈的宣传。但是，实数的确具有很大的缺陷——并非每一多项式函数都具有(实数)根。最简单又最著名的例子是没有一个(实)数 x 能够满足 $x^2+1=0$ 这一事实。这个缺陷是如此严重，以致很早以前数学家们就感到有必要"发明"一个具有性质 $i^2+1=0$ 的"数"i。长期以来"数"i 的身份一直是十分神秘的：既然没有满足 $x^2+1=0$ 的数 x，那么说"令 i 是满足 $x^2+1=0$ 的数"自然是毫无意义的。不过，"虚数" i 加入数族的结果，似乎大大地简化了许多代数运算，特别是当"复数"$a+bi$(a 和 b 为实数)被承认，且当第一章中所列举的全部算术运算的定律假定是成立的时候。例如，每一个二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

可以用公式求解，给出

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{或} \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，这些公式给出真正的解；当复数被承认时，这些公式似乎在任何情况下都是有意义的。例如，方程

$$x^2+x+1=0$$

没有实根，因为对于所有 x 而言，有

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

但是关于二次方程的根的公式则提供了"解"

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{和} \quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

如果我们把$\sqrt{-3}$理解为表示$\sqrt{3\cdot(-1)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$，则这些数将是：

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad 和 \quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

不难验证这些至今还纯粹是形式上的数的确满足方程

$$x^2+x+1=0.$$

甚至那些其系数本身就是复数的二次方程也是可以"解"的．例如，方程

$$x^2+x+1+i=0$$

应该具有解

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1+i)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3-4i}}{2},$$

其中符号$\sqrt{-3-4i}$是一个其平方为$-3-4i$的复数$\alpha+\beta i$．为了有

$$(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i=-3-4i,$$

我们必须有

$$\alpha^2-\beta^2=-3,$$
$$2\alpha\beta=-4.$$

这两个方程能够容易地就实数α和β解出；事实上，有两组可能的解：

$$\alpha=1, \qquad \beta=-2.$$

和

$$\alpha=-1, \qquad \beta=2.$$

这样，$-3-4i$的两个"平方根"是$1-2i$和$-1+2i$．没有适当的方法来确定这两者中的哪一个应被称为$\sqrt{-3-4i}$，哪一个应被称为$-\sqrt{-3-4i}$．$\sqrt{x}$的习惯用法仅仅对于实的$x\geqslant 0$才有意义，在这种情况下$\sqrt{x}$表示(实的)非负根．鉴于这种理由，解

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$$

必须被理解为关于

$$x=\frac{-1+r}{2}\text{，其中 } r \text{ 是 } -3-4i \text{ 的平方根之一}$$

的一个省略的写法. 按照这种理解，我们得到解

$$x=\frac{-1+1-2i}{2}=-i,$$

$$x=\frac{-1-1+2i}{2}=-1+i;$$

正如你能够容易地加以验证的那样，这些数的确提供了方程

$$x^2+x+1+i=0$$

的形式解.

对于三次方程而言，复数同样是有用的. 正如我们已知道的那样，每一个具有实系数 a, b, c, d 的三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0)$$

都具有一个实根 α，如果我们用 $x-\alpha$ 去除 ax^3+bx^2+cx+d，我们便得到一个二次多项式，该二次多项式的根是 ax^3+bx^2+cx+d的另外一些根；这个二次多项式的根可以是复数. 因此，一个三次方程或者具有三个实根，或者具有一个实根和两个复根. 实根的存在性是由每个奇数次方程都具有实根的定理所保证，但实际上不必求助于这个定理(在系数为复数的情况下它全然没有用处)；在三次方程的情形下，我们凭借充分的聪明才智可以实际找到一个求所有根的公式. 下面的推导所以被提出，不只是作为早期数学家发明才能的一个有趣的例证，而且是作为复数(不管它们可能是什么)之重要性的更进一步的证据.

为了解最一般的三次方程，显然只需研究形如

$$x^3+bx^2+cx+d=0$$

的方程就足够了. 借助于一个相当简单的处置还可以消去其中含有 x^2 的项. 如果我们令

$$x=y-\frac{b}{3},$$

则

$$x^3=y^3-by^2+\frac{b^2}{3}y-\frac{b^3}{27},$$

$$x^2=y^2-\frac{2b}{3}y+\frac{b^2}{9},$$

所以

$$\begin{aligned}0&=x^3+bx^2+cx+d\\&=\left(y^3-by^2+\frac{b^2}{3}y-\frac{b^3}{27}\right)+\left(by^2-\frac{2b^2}{3}y+\frac{b^3}{9}\right)\\&\quad+\left(cy-\frac{bc}{3}\right)+d\\&=y^3+\left(\frac{b^2}{3}-\frac{2b^2}{3}+c\right)y+\left(\frac{b^3}{9}-\frac{b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d\right).\end{aligned}$$

其右边现在不包含 y^2 的项. 如果我们能解此关于 y 的方程, 我们便能求出 x; 这表明先研究形如

$$x^3+px+q=0$$

的方程就行了. 在 $p=0$ 的特殊情况下, 我们得到方程 $x^3=-q$. 以后我们将看到每个复数确实有立方根, 且实际上有三个, 所以这个方程有三个解. 另一方面, $p\neq0$ 的情形则需要一个十分巧妙的步骤. 设

$$(*)\quad x=w-\frac{p}{3w}\qquad\left(w=\frac{p}{3w-3x}\neq0\right).$$

则

$$0=x^3+px+q=\left(w-\frac{p}{3w}\right)^3+p\left(w-\frac{p}{3w}\right)+q$$

$$=w^3-\frac{3w^2p}{3w}+\frac{3wp^2}{9w^2}-\frac{p^3}{27w^3}+pw-\frac{p^2}{3w}+q$$

$$=w^3-\frac{p^3}{27w^3}+q.$$

这个方程可以被写为

$$27(w^3)^2+27q(w^3)-p^3=0,$$

这是关于 w^3 的一个二次方程(!!).

因此

$$w^3=\frac{-27q\pm\sqrt{(27)^2q^2+4\cdot 27p^3}}{2\cdot 27}$$

$$=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

要记住这实际上意味着:

$$w^3=-\frac{q}{2}+r,\text{其中 } r \text{ 是}\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\text{的平方根.}$$

所以我们可以写出

$$w=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

这个等式意思是 w 是 $-\frac{q}{2}+r$ 的某个立方根，而其中的 r 是 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 的某个平方根. 关于 w 允许有六种可能性，但当其被代入(*)时便得:

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{p}{3\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}},$$

结果只会得出三个不同的 x 值! 当我们研究一个其根全部是实数的三次方程时，这个解的更令人吃惊的特征就显露出来了；上面所推导出的公式仍然可能本质上涉及到复数. 例如,

$$x^3-15x-4=0$$

的根是 4, $-2+\sqrt{3}$, 和 $-2-\sqrt{3}$. 另一方面，上面所导出的公式(这时 $p=-15, q=-4$)作为一个解则给出

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}-\frac{-15}{3\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}}\\&=\sqrt[3]{2+11i}+\frac{15}{3\cdot\sqrt[3]{2+11i}}.\end{aligned}$$

现在，

$$\begin{aligned}(2+i)^3&=2^3+3\cdot2^2i+3\cdot2\cdot i^2+i^3\\&=8+12i-6-i\\&=2+11i,\end{aligned}$$

所以 $2+i$ 是 $2+11i$ 的一个立方根. 于是，作为方程的一个解我们有

$$\begin{aligned}x&=2+i+\frac{15}{6+3i}\\&=2+i+\frac{15}{6+3i}\cdot\frac{6-3i}{6-3i}\\&=2+i+\frac{90-45i}{36+9}\\&=4(!).\end{aligned}$$

如果 $2+11i$ 的其他立方根是已知的，那么其他的根也可以求出来. 甚至这些实根之一也是由一个依赖于复数的表示式来求出这一事实是令人难忘的，它足以暗示复数的使用不会是纯粹的无稽之谈. 实际上，关于二次及三次方程的求解公式完全可以按实数来加以解释.

假定我们暂且同意将全部复数写为 $a+bi$，将实数 a 写为 $a+0i$，而将数 i 写为 $0+1i$. 通常的算术定律及关系式 $i^2=-1$ 证明：

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

这样，一个象

$$(1+2i)\cdot(3+1i)=1+7i$$

这样的等式可以简单地看作是两个等式

$$1\cdot 3-2\cdot 1=1,$$
$$1\cdot 1+2\cdot 3=7.$$

的一种缩写. 实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解可以作如下解释:

$$\text{如果}\begin{cases}u^2-v^2=b^2-4ac,\\ uv=0,\end{cases}$$

$$(\text{即, 如果}(u+vi)^2=b^2-4ac),$$

$$\text{则}\begin{cases}a\left[\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{v}{2a}\right)^2\right]+b\left[\dfrac{-b+u}{2a}\right]+c=0,\\ a\left[2\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)\left(\dfrac{v}{2a}\right)\right]+b\left[\dfrac{v}{2a}\right]=0,\end{cases}$$

$$(\text{即, 则}a\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right)+c=0).$$

要验证这个没有写一个“i”的关于实数的论断并非是十分困难的，但陈述自身的复杂性就应能使你承认：关于复数的等式作为关于实数的一对等式的缩写是值得采取的.（如果你还不承认，无妨试一试去解释三次方程的解.）然而，如果我们果真打算一贯地使用复数的话，提出某些适当的定义则是必要的.

一种可能性已暗含于上述整个讨论中. 复数 $a+bi$ 的所有数学性质完全由实数 a 和 b 确定；任何具有这种相同性质的数学对象都可以合理地用来定义复数. 明显的候选者是有序的实数偶 (a, b)，我们将把复数定义为一个实数偶，并同样定义复数的加法和乘法.

定义

> 复数是一个有序的实数偶；如果$z=(a,b)$是一个复数，则称a为z的**实部**，而称b为z的**虚部**．所有复数的集合被记为$\mathbf{C}$．设(a,b)和(c,d)是两个复数，我们定义
>
> $$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
> $$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c).$$
>
> （在左边出现的＋和·是正被定义的新符号，而出现在右边的＋和·则是大家熟知的关于实数的加法和乘法．）

当复数初被引入时，以为实数当然都是复数；但如果当真根据我们的定义，则这是不对的——一个实数毕竟不是一个实数偶．然而，这个困难只是一个小小的麻烦．注意到

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0+0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0);$$

这表明形如$(a,0)$的复数关于复数的加法和乘法其"举止"恰好和实数关于它们特有的加法和乘法是一样的．为此，我们将沿用把$(a,0)$简单地记为a的惯例．如果再作一个定义，那么关于复数的熟知的$a+bi$表示法便可以重新使用．

定义

> $$i=(0,1).$$

注意　$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$（最后的等号是按我们的惯例写的）．另外，

$$\begin{aligned}(a,b)&=(a,0)+(0,b)\\&=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\\&=a+bi.\end{aligned}$$

你可能会觉得我们的定义纯粹是为了将复数定义为"形如$a+bi$的式子"所做的一种精心的设计．这本质上是不错的；将新的

事物必须定义为某种特定的东西，而不定义为“式子”，是近代数学的一个既定的成见.不过，值得注意的是直到近代的定义被提出为止，数学家们对于使用复数一直是提心吊胆的. 此外，该严格的定义突出了一个重要的观点.在引进复数时，我们的目的在于避免去解释关于复数的种种借其实部和虚部表述的说法的必要性.这就意味着我们希望能以处理有理数或实数的同一方式去处理复数.例如，三次方程的解法需要写出$x=w-\frac{p}{3w}$，所以我们必须知道$\frac{1}{w}$是有意义的. 另外，w^3是通过解一个二次方程求得的，这就需要许多其他的代数运算.简单地说，我们大概迟早会用到曾对实数施行过的任何一种运算. 我们当然不想每回都中止下来去证明每一步是正确的，幸而这是不必要的. 因为施行于实数的种种代数运算都可借助于第一章中列举的各性质证明是正确的，所以只需验证这些性质对于复数也是正确的就行了. 在绝大多数情况下这是十分容易的，且这些事实不再被作为正式定理一一列举.例如，P1(性质1)的证明，

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$

只需要应用关于复数的加法的定义. 其左边变为

$$([a+c]+e,[b+d]+f),$$

而其右边变为

$$(a+[c+e],b+[d+f]);$$

由于P1对于实数是正确的，所以上边的两个(复数)是相等的. 验证P2—P7以及P9是一个好主意. 我们指出，在P2和P6中起0和1的作用的复数分别是$(0,0)$和$(1,0)$. 想象出$-(a,b)$是什么是不难的，但在P8中要求的关于(a,b)的乘法逆(元素)则是稍需一些技巧的. 如果$(a,b)\neq(0,0)$，则$a^2+b^2\neq0$且

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0).$$

这个事实能由两种方法推出. 为求出适合等式

$$(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$$

的(x,y), 只要解方程组

$$ax-by=1,$$

$$bx+ay=0$$

就行了. 其解是$x=a/(a^2+b^2)$, $y=-b/(a^2+b^2)$. 象下面那样去推理也是可以的: 如果$1/(a+bi)$意味着任何东西的话, 那么

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

就应当是正确的. 逆元素的存在性一旦确实被证明(在以某种方式推出逆元素之后), 上述这种运算就确实是可行的; 在实际寻求一个复数的逆元素时, 它是最容易记住的一个方法——我们曾用来计算

$$\frac{15}{6+3i}=\frac{15}{6+3i}\cdot\frac{6-3i}{6-3i}$$

$$=\frac{90-45i}{36+9}$$

的恰好就是这个技巧.

和P1—P9不同, 没有类似P10—P12的法则: 容易证明不存在使P10—P12对一切复数都能满足的复数集合P. 事实上, 如果存在的话, 那么P必须包含1 (因为$1=1^2$)以及-1(因为$-1=i^2$), 但这将与P10相矛盾. 在没有P10—P12的情况下将不会有什么不幸的结果, 但它意味着对于复数z和w我们不可能定义$z<w$. 另外, 你也许记得: 对于实数而言, P10—P12曾用来证明过$1+1\neq0$. 幸好, 关于复数的相应事实能简化为: 显然

$$(1,0)+(1,0)\neq(0,0).$$

虽然我们通常将把复数写成 $a+bi$ 的形式，但是记住全部复数的集合C正好就是所有实数偶的集合仍是很值得的．很早以前这个集合就当做平面一样看待，并因此常常称平面为“复平面”．由所有点$(a,0)$（其中 a 属于R）组成的水平轴常常称为实轴，而直立轴则称为虚轴．两个重要的定义也涉及到这一几何图形．

定义

> 设 $z=x+iy$ 是一个复数（x 和 y 均为实数），则 z 的共轭 $\bar{z}$ 定义为
>
> $$\bar{z}=x-iy,$$
>
> 而 z 的**绝对值**或**模** $|z|$ 定义为
>
> $$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$
>
> （注意到 $x^2+y^2\geqslant 0$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}$ 是完全确定的；它表示 x^2+y^2 的非负实平方根．）

从几何上看，$\bar{z}$ 不过是 z 关于实轴的反射，而 $|z|$ 则是由 z 到$(0,0)$的距离（图 1）．注意到关于复数的绝对值的记号和关于实数的是一致的．两个复数 z 和 w 之间的**距离**可以十分容易地定义为 $|z-w|$．下边的定理列举了共轭和绝对值的所有重要性质．

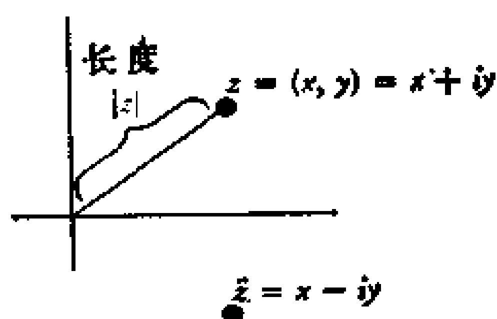


图 1

定理 1　设 z 和 w 是复数，则

(1) $\bar{\bar{z}}=z$.

(2) $\bar{z}=z$ 当且仅当 z 是实数（即对于某实数 a 具有形式 $a+0i$）时成立．

(3) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$.

(4) $\overline{-z}=-(\bar{z})$.

(5) $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$.

(6) $\overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}$, 如果 $z\neq0$.

(7) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$.

(8) $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.

(9) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

证明 断言(1)和(2)是明显的. 等式(3)和(5)则可以用直接的计算加以验证, 至于(4)和(6)则可以借助于一种技巧证明如下:

$$0=\overline{0}=\overline{z+(-z)}=\bar{z}+\overline{-z},\quad 所以\overline{-z}=-(\bar{z}),$$
$$1=\overline{1}=\overline{z\cdot(z^{-1})}=\bar{z}\cdot\overline{z^{-1}},\quad 所以\overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}.$$

等式(7)和(8)也可以通过直接计算去证明. 所以定理中唯一困难的部分就只有(9). 这个不等式实际上已经出现过(习题四, 8), 不过其证明将用稍微不同的术语在这里重复一次.

当 $z=0$ 或 $w=0$ 时, (9)中的等号显然是成立的. 同时不难看出, 对任何实数 λ 而言当 $z=\lambda w$ 时(9)也是正确的(分别研究 $\lambda>0$ 和 $\lambda<0$ 的情形). 另一方面, 假定对于任何实数 $\lambda, z\neq\lambda w$, 且 $w\neq0$. 则对于一切实数 λ 应有

$$(*)\quad 0<|z-\lambda w|^2=(z-\lambda w)\cdot(\overline{z-\lambda w})$$
$$=(z-\lambda w)\cdot(\bar{z}-\lambda\bar{w})$$
$$=z\bar{z}+\lambda^2 w\bar{w}-\lambda(w\bar{z}+z\bar{w})$$
$$=\lambda^2|w|^2+|z|^2-\lambda(w\bar{z}+z\bar{w}).$$

注意到 $w\bar{z}+z\bar{w}$ 是一个实数, 因为

$$\overline{w\bar{z}+z\bar{w}}=\bar{w}\bar{\bar{z}}+\bar{z}\bar{\bar{w}}=\bar{w}z+\bar{z}w=w\bar{z}+z\bar{w}.$$

因此(*)的右边是 λ 的一个实系数的且无实根的二次多项式; 所以其判别式必是负的. 于是有

$$(w\bar{z}+z\bar{w})^2-4|w|^2\cdot|z|^2<0;$$

因为 $w\bar{z}+z\bar{w}$ 和 $|w|\cdot|z|$ 都是实数, 且 $|w|\cdot|z|\geqslant0$, 从而推得

$$w\bar{z}+z\bar{w}<2|w|\cdot|z|.$$

从这个不等式推出

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w})\\&=|z|^2+|w|^2+(w\bar{z}+z\bar{w})\\&<|z|^2+|w|^2+2|w|\cdot|z|\\&=(|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

这蕴含着

$$|z+w|<|z|+|w|. \blacksquare$$

复数的加法和乘法运算都有重要的几何解释．关于加法的图形是非常简单的(图 2)．两个复数 $z=(a,b)$ 和 $w=(c,d)$，决定一个以由(0, 0)到 z 的线段和以由(0,0)到 w 的线段为其两(邻)边的平行四边形；该平行四边形的对着(0, 0)的那个顶点即是 $z+w$ (这个几何事实的证明留给读者去完成)．

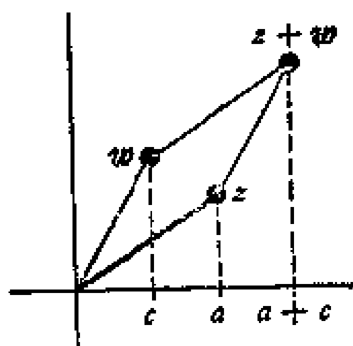


图 2

乘法的解释更复杂一些．如果 $z=0$ 或 $w=0$，则 $z\cdot w=0$(可以给出一个简短的计算证明，但甚至连这点也是不必要的——该断言已被表明为 P1—P9 的当然结果)，因此我们可以将我们的注意力限于非零的复数．我们从将每一非零复数写成一种特殊的形式开始．

对于任一复数 $z\neq0$ 我们可写

$$z=|z|\frac{z}{|z|};$$

在这个表示式中，$|z|$ 是一个正实数，而

$$\left|\frac{z}{|z|}\right|=\frac{|z|}{|z|}=1,$$

所以$z/|z|$是一个绝对值为 1 的复数．既然任何满足条件$1=|a|^2=x^2+y^2$ 的复数 $a=x+iy$ 都可关于某个数 θ 写为如下形式：

$$a=(\cos\theta, \sin\theta)=\cos\theta+i\sin\theta,$$

因此每一个非零的复数 z 都可以关于某个 $r>0$ 和某个数 θ 写为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

数 r 是唯一的(它等于$|z|$)，但 θ 不是唯一的；如果 θ_0 是一个可能的值，则其他的便是 $\theta_0+2k\pi$，k 在 $\mathbf{Z}$ 内(为任一整数)——这些数中的任何一个都称为 z 的幅角．图 3 显示出以 r 和 θ 表示的 z．(为了求出关于 $z=x+iy$ 的一个幅角 θ，我们注意到等式

$$x+iy=z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

意味着

$$x=|z|\cos\theta,$$
$$y=|z|\sin\theta.$$

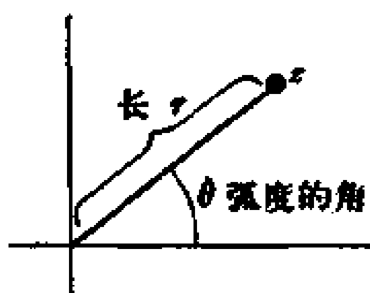


图 3

如果$x\neq0$，我们便可取$\theta=\arctan(y/x)$，而如果 $x=0$，那么当 $y>0$ 时我们可取 $\theta=\pi/2$，而当 $y<0$ 时可取 $\theta=3\pi/2$．)

现在，两个非零复数

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$
$$w=s(\cos\phi+i\sin\phi)$$

的乘积是

$$\begin{aligned}z\cdot w&=rs(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)\\&=rs[(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)\\&\quad+i(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)]\\&=rs[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)].\end{aligned}$$

因此，乘积的绝对值是因子绝对值的乘积，而一个因子的任何幅角与另一因子的任一幅角之和将是关于乘积的一个幅角．对于一个

非零的复数

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

而言，现在容易用归纳法证明下边的非常重要的公式(有时称之为棣莫弗定理)：

$$z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

(θ 为 z 的任一幅角).

这个公式将 z^n 叙述得如此明白，以致不难确定何时有 $z^n=w$:

定理 2 每个非零的复数恰好有 n 个复数 n 次根. 说得更确切一些，对于任何一个复数 $w\neq0$ 以及任一自然数 n，正好存在 n 个不同的复数 z 满足 $z^n=w$.

证明 设关于 $s=|w|$ 和某数 ϕ 有

$$w=s(\cos\phi+i\sin\phi).$$

则复数

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

当且仅当

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=s(\cos\phi+i\sin\phi)$$

时满足 $z^n=w$，而上式成立的必要而充分的条件是

$$r^n=s,$$

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos\phi+i\sin\phi.$$

从第一个方程推出

$$r=\sqrt[n]{s},$$

其中 $\sqrt[n]{s}$ 表示 s 的实的正 n 次根. 由第二方程推出：对于某个整数 k 我们有

$$\theta=\theta_k=\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}.$$

反之，我们如果选 $r=\sqrt[n]{s}$ 和 $\theta=\theta_k$，关于某个 k，则数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 将满足 $z^n=w$. 所以为了确定 w 的 n 次根的数目，只需

确定这样的 z 中不相同的那些. 因为任何整数 k 都可以关于某个整数 q 和某个介于 0 和 $n-1$ 之间的整数 k' 写成

$$k=nq+k',$$

所以

$$\cos\theta_k+i\sin\theta_k=\cos\theta_{k'}+i\sin\theta_{k'}.$$

这说明每一个满足 $z^n=w$ 的 z 可写为

$$z=\sqrt[n]{s}\,(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)\quad k=0,\cdots,n-1.$$

另外,容易看出这些数全是不同的,因为对于 $k=0,\cdots,n-1$ 而言,任何两个 θ_k 之差都小于 2π. ▮

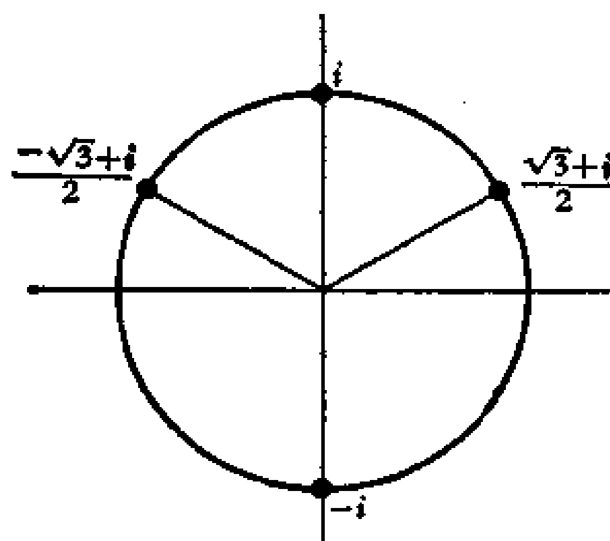


图 4

在证明定理 2 的过程中, 我们实际上已经发现了一种求复数的 n 次根的方法. 例如, 为了求 i 的立方根(图 4), 我们注意到 $|i|=1$ 和 $\pi/2$ 是 i 的一个幅角. 于是 i 的立方根应是:

$$1\cdot\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right],$$

$$1\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6},$$

$$1\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

因为

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}=0,\qquad \sin\frac{3\pi}{2}=-1,$$

所以 i 的立方根是

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2},\qquad \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i.$$

一般说来，我们不能期望得到这样简单的结果．例如，求 $2+11i$ 的立方根；注意到 $|2+11i|=\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{125}$ 以及 $\arctan\frac{11}{2}$ 是 $2+11i$ 的一个幅角，所以 $2+11i$ 的立方根之一是

$$\sqrt[6]{125}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right)\right]$$

$$=\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right)\right].$$

以前我们曾经指出 $2+i$ 也是 $2+11i$ 的一个立方根．因为 $|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，又因为 $\arctan\frac{1}{2}$ 是 $2+i$ 的一个幅角，所以我们可将这个立方根写为

$$2+i=\sqrt{5}\left(\cos\arctan\frac{1}{2}+i\sin\arctan\frac{1}{2}\right).$$

这两个立方根实质上是同一个数，因为我们有

$$\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}=\arctan\frac{1}{2}$$

（你可以用习题十五，8 中的公式验证这一点），但这是难得被人

所注意到的事!

每个复数对于所有 n 都有 n 次根这一事实，恰是一个非常重要的定理的特殊情形. 最初引入数 i，只是为了对方程 $x^2+1=0$ 提供一个解. 而代数基本定理则指出一个值得注意的事实：这一追加自动地为所有其他的多项式方程提供了解，亦即每一方程

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0,\quad a_0,\cdots,a_{n-1}\text{ 属于 }\mathbf{C}$$

具有复数根!

在下一章中，我们将给出代数基本定理的一个几乎完整的证明；课文中留下的一些微不足道的缺陷，可以做为练习(习题二十五, 5)予以弥补. 定理的证明将要依靠几个新的概念，而这些概念在对复数的更加深入的研究中会十分自然地被提出来.

习　题

1. 求下列各复数的绝对值和幅角.
   (i) $3+4i$.
   (ii) $(3+4i)^{-1}$.
   (iii) $(1+i)^5$.
   (iv) $\sqrt[7]{3+4i}$.
   (v) $|3+4i|$.
2. 解下列方程.
   (i) $x^2+ix+1=0$.
   (ii) $x^4+x^2+1=0$.
   (iii) $x^2+2ix-1=0$.
   (iv) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3, \\ (2+i)x+iy=4. \end{cases}$
   (v) $x^3-x^2-x-2=0$.
3. 描述分别满足下列条件的全部复数的集合:
   (i) $\bar{z}=-z$.
   (ii) $\bar{z}=z^{-1}$.
   (iii) $|z-a|=|z-b|$.

(iv) $|z-a|+|z-b|=c$.

(v) $|z|<1-z$ 的实部.

4. 证明$|z|=|\bar{z}|$,并证明 z 的实部是$\frac{z+\bar{z}}{2}$, 而虚部则是$\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

5. 证明$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$,并从几何上解释这个命题.

6. z和$\sqrt{i}\cdot\overline{z\sqrt{-i}}$之间在图形上有什么关系? 提示: 在用$\sqrt{-i}$ 乘时,哪条线成为实轴?

7. (a) 证明如果 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 是实的, 且 $a+bi$(对于实的 a 和 b)满足方程 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0$, 则 $a-bi$ 也满足这个方程. (因此这种方程的非实根总是成对出现的, 从而这种根的数目为偶数.)

(b) 推断 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 可以被 $z^2-2az+(a^2+b^2)$ (其系数为实数)所整除.

*8. (a) 设 c 是一个整数, 但它不是另一整数的平方. 如果 a 和 b 都是整数, 则我们定义$a+b\sqrt{c}$的**共轭**为$a-b\sqrt{c}$, 并记之为$\overline{a+b\sqrt{c}}$. 试通过证明一个数可用唯一的方式关于整数 a 和b写成$a+b\sqrt{c}$的形式来证明上述共轭是完全确定的.

(b) 证明对于形如$a+b\sqrt{c}$的所有 α 和 β 我们有: $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$; 当且仅当$\alpha$为整数时才有$\overline{\alpha}=\alpha$; $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{-\alpha}=-\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$, 当 $\alpha\neq0$ 时 $\overline{\alpha^{-1}}=(\overline{\alpha})^{-1}$.

(c) 证明如果 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 都是整数, 且 $z=a+b\sqrt{c}$满足方程 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0$, 则$\bar{z}=a-b\sqrt{c}$也满足这个方程.

9. 求 i 的所有 4 次根; 将其中具有最小幅角的那个表示为不含任何三角函数的形式.

*10. (a) 证明如果ω是 1 的一个 n 次根, 则 ω^k 也是.

(b) 如果$\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}$是 1 的全部 n 次根的集合, 则数 ω 称之为 1 的本原 n 次根. 对于 $n=3, 4, 5, 9$ 而言, 1 的本原 n 次根有多少?

(c) 设 $\omega\neq1$ 是 1 的一个 n 次根, 证明 $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=0$.

*11. (a) 证明如果 $z_1, \cdots, z_k$ 位于某条通过 0 的直线之一侧, 则 $z_1+\cdots+z_k\neq0$. 提示: 由加法的几何解释这是明显的, 不过分析证明也不难: 如果所说直线是实轴, 则论断是显然的, 而通过一种技巧即

可将一般情况归结到这种情况.

(b) 进而证明$z_1^{-1},\cdots,z_k^{-1}$全位于一条过0的直线的一侧，所以$z_1^{-1}+\cdots+z_k^{-1}\neq 0$.

*12. 证明如果$|z_1|=|z_2|=|z_3|$且$z_1+z_2+z_3=0$，则z_1，z_2和z_3是一个等边三角形的顶点．提示：假定z_1是一个实数将是有帮助的，且这样做并不失一般性．为什么？

选题解答

1. (i) $|3+4i|=5$; $\theta=\arctan\frac{4}{3}$.

(iii) $|(1+i)^5|=(|1+i|)^5=(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$;

因为$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{1}$是$1+i$的一个幅角，所以$(1+i)^5$的一个幅角是$\frac{5\pi}{4}$.

(v) $|(|3+4i|)|=|5|=5$; $\theta=0$.

2. (i)

$$x=\frac{-i\pm\sqrt{-1-4}}{2}$$

$$=\frac{-i\pm\sqrt{5}\,i}{2}$$

$$=\frac{(-1+\sqrt{5})i}{2}\quad \text{或}\quad \frac{(-1-\sqrt{5})i}{2}.$$

(iii) $x^2+2ix-1=(x+i)^2$，所以只有一个解是$x=-i$.

(v) $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$．所求解是

$$2,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3. (i) 所有的$z=iy$，其中y为实数．

(iii) 位于a和b之间的线段的中垂线上的所有z.

(v)[①] 因为$|x+iy|<1-x$暗含有$x<1$和$x^2+y^2<1-2x+x^2$的意思，所以$y^2<1-2x$．这说明满足已知条件的全部复数是位于

---

① 译注：原文此题的解答是错误的，此处给出的是译校者给出的解答．

抛物线 $y^2=1-2x$ 凹的一侧(即含有原点的一侧)的所有复数。

4. $|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(-y)^2}=|x-iy|$.

$(z+\bar{z})/2=[(x+iy)+(x-iy)]/2=x$.

$(z-\bar{z})/2i=[(x+iy)-(x-iy)]/2i=y$.

5. $$|z+w|^2+|z-w|^2=(z+w)(\bar{z}+\overline{w})+(z-w)(\bar{z}-\overline{w})$$
$$=2z\bar{z}+2w\overline{w}$$
$$=2(|z|^2+|w|^2).$$

从几何上看，这是说平行四边形两条对角线的平方和等于其各边的平方和。

第二十五章　复变函数

说到关于复数更深入的研究要依赖于函数的概念，你大概不会感到吃惊．直到现在为止，函数(在直觉上)是一种法则，它给一些实数指定了另一些确定的实数．但是这个概念没有理由不应予以推广，我们完全可以同样地研究一种法则，它给一些复数指定另一些确定的复数．一个严格的定义不会有任何问题(甚至我们连一个正式定义的地位都不给它)：函数是复数对的一个集合，它不包含具有相同的第一个元素的两个不同的数对．因为我们将实数看作是某种确定的复数，所以老的定义实际上是新定义的一种特殊情形．不过，有时我们将凭借专门的术语以便阐明正在研究的函数所在的范围．如果对于 f 的定义域中的所有 z 而言 $f(z)$ 是实数，则称 f 是**实值的**，而说函数是**复值的**，是为了强调它不必是实值的．同样地，在 f 的定义域是 $\mathbf{R}$(的子集)的那些情形，我们通常会明显地指出函数 f 是定义在 $\mathbf{R}$(的子集)上；在其他情形，我们有时说 f 被定义在 $\mathbf{C}$(的子集)上，其目的在于强调 $f(z)$ 对于复数 z 和对于实数 z 一样是有定义的．

定义在 $\mathbf{C}$ 上的众多的函数中，某些是特别重要的．其中最重要的是形如

$$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0,$$

的函数，这里的 $a_0,\cdots,a_n$ 都是复数．和在实数的情形一样，这些函数称为多项式函数；它们包括有函数 $f(z)=z$(“恒等函数”)以及关于某个复数 a 的形如 $f(z)=a$ 的函数(“常值函数”)．大家所熟悉的函数的又一个重要的推广是“绝对值函数”，即对于 $\mathbf{C}$ 中的所有 z，$f(z)=|z|$．

对于复数而言，特别重要的两个函数是 Re("实部函数")和 Im("虚部函数")，对于实数 x 和 y 它们被定义为

$$\mathrm{Re}(x+iy)=x,$$

$$\mathrm{Im}(x+iy)=y.$$

"共轭函数"定义为

$$f(z)=\bar{z}=\mathrm{Re}(z)-i\mathrm{Im}(z).$$

大家所熟知的一些定义在 R 上的实值函数，可以许多种方式加以组合以便产生出新的定义在 C 上的复值函数——函数

$$f(x+iy)=e^{y}\sin(x-y)+ix^{3}\cos y$$

便是一个例子. 关于这个特殊函数的公式说明了一种总是可行的分解. 任一复值函数 f 都可以用关于某两个实值函数 u 和 v 写成如下形式

$$f=u+iv$$

——只不过是定义 $u(z)$ 为 $f(z)$ 的实部，而定义 $v(z)$ 为 $f(z)$ 的虚部罢了. 这种分解常常是非常有用的，但并非总是如此；例如，以这种方式去描述一个多项式函数就可能是不方便的.

另一函数将在本章中起重要作用. 回想一下一个非零复数 z 的所谓**幅角**是使得

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的实数 θ. 对于 z 存在无穷多个幅角，但满足条件 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的却只有一个. 如果我们称这个唯一的幅角为 $\theta(z)$，则 θ 便是一个定义在 $\{z$ 属于 $\mathbf{C}: z\neq0\}$ 上的(实值)函数("幅角函数").

定义在 C 上的复值函数的"图形"，由于它们位于 4 维空间，所以对于形象化来说大概不是非常有用的. 在第四章中曾提到的另一种函数图形则可用来代替它：我们画出两幅 C，并从一幅内的 z 引箭头到另一幅内的 $f(z)$(图 1).

复值函数的最常用的图形表示法是通过在平面内的点上标出

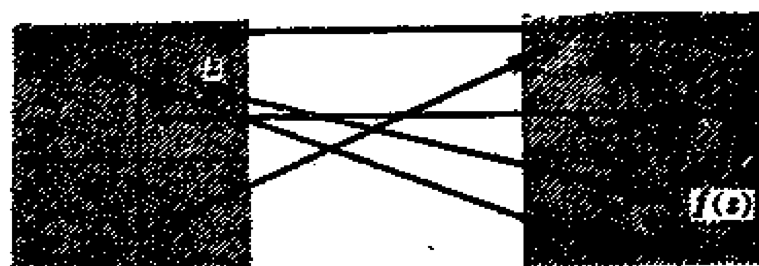
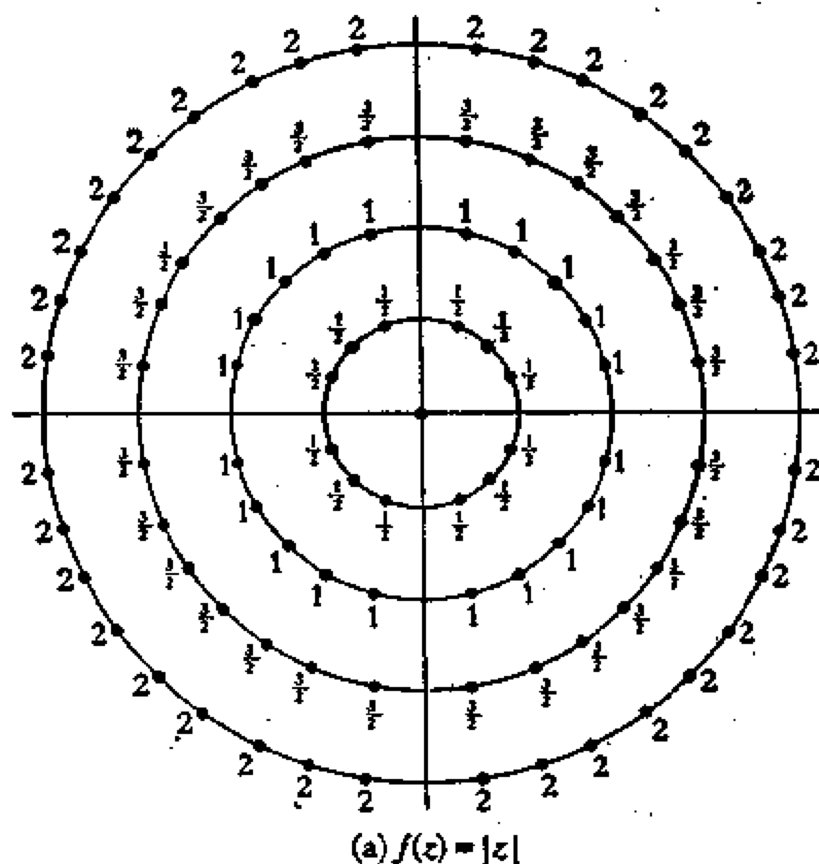


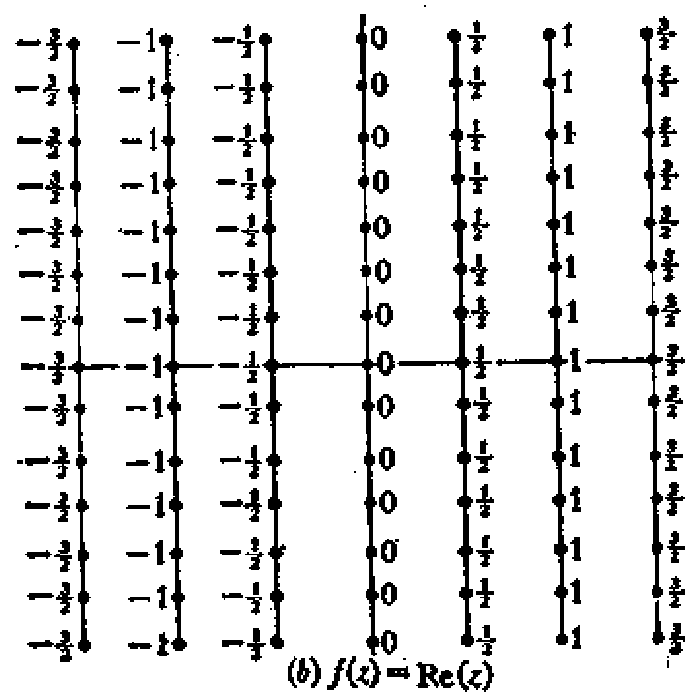
图 1

$f(z)$的值以代替 z(z 的值可由点在图上的位置加以估计)而作出的. 图 2 中给出了几个不同函数的这种图形. 函数的某些特征被这种"图形"十分清楚地表示出来. 例如, 绝对值函数在以 0 为中心的同心圆上是常数,函数 Re 和 Im 则分别在直立和水平直线上是常数,而函数 $f(z)=z^2$ 则随着 z 绕半径为 r 的圆转一周时绕半径为 r^2 的圆转两周.

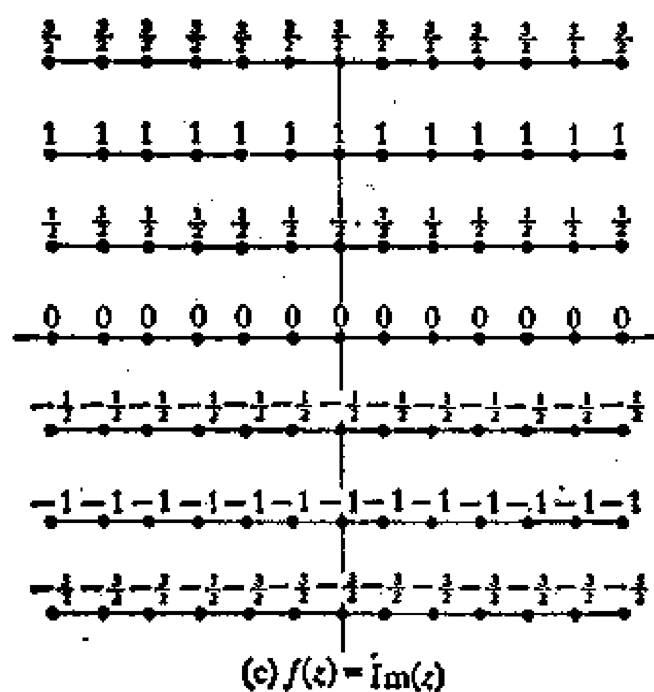
尽管在形象化复值函数时一般会涉及到种种问题, 但仍然可以定义和从前对于 R 上的实值函数定义过的一些重要性质相类



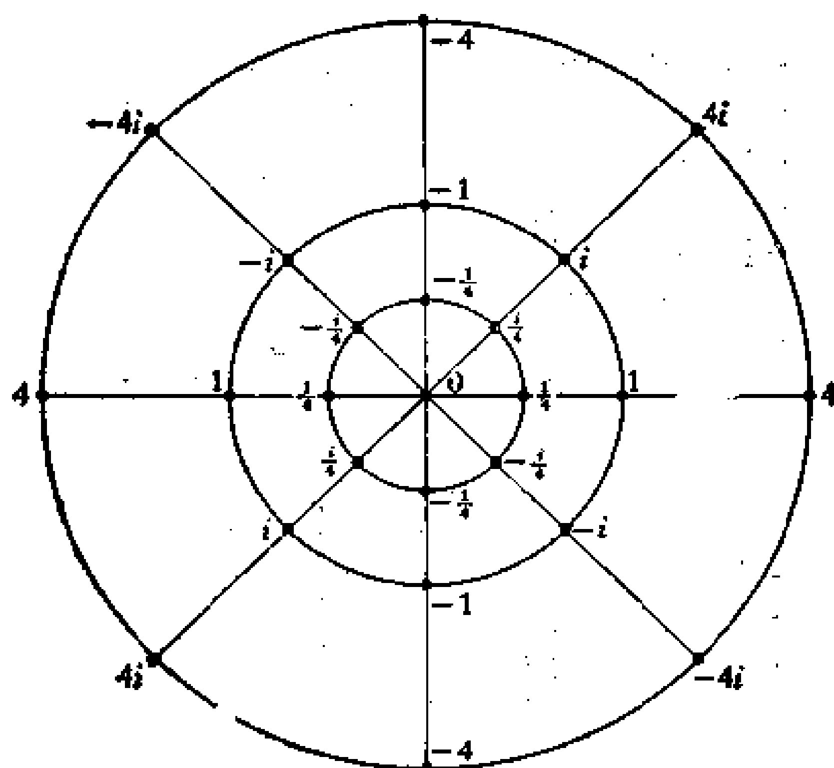
(a) $f(z)=|z|$



(b) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$



(c) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$



(d) $f(z)=z^2$

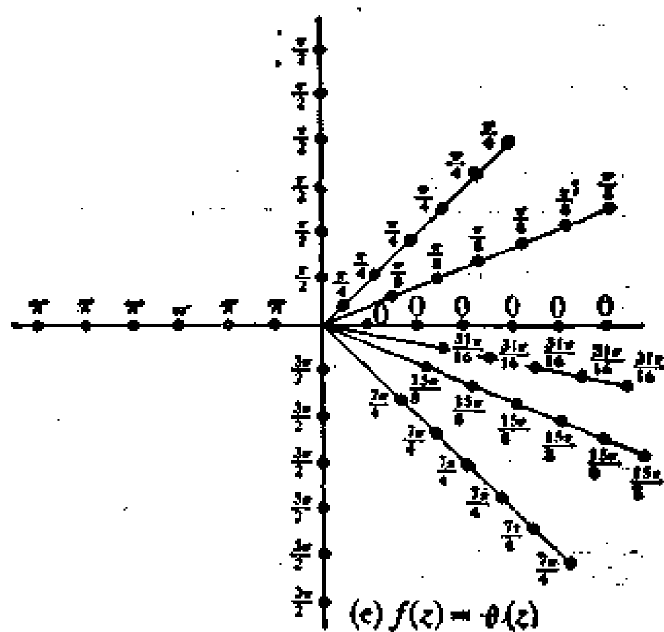

(e) $f(z)=\theta(z)$

图 2

似的东西，而且在某些场合这些性质在复数的情形下也许更容易形象化. 例如，极限的概念可定义如下：

$\lim_{z\to a} f(z)=l$ 指对于每个(实)数 $\varepsilon>0$，存在一个这样的(实)数 $\delta>0$，使得当 $0<|z-a|<\delta$ 时，有 $|f(z)-l|<\varepsilon$.

虽然该定义读起来和以前完全一样，但是其解释则稍有差别. 因为 $|z-w|$ 是复数 z 和 w 之间的距离，所以等式 $\lim_{z\to a} f(z)=l$ 意味着只要 z 被限制在位于一个以 a 为中心的充分小的圆内，便可以使 $f(z)$ 的值位于一个任意给定的以 l 为中心的圆的内部. 应用函数的"双幅"图形，特别容易使这个论断形象化(图 3).

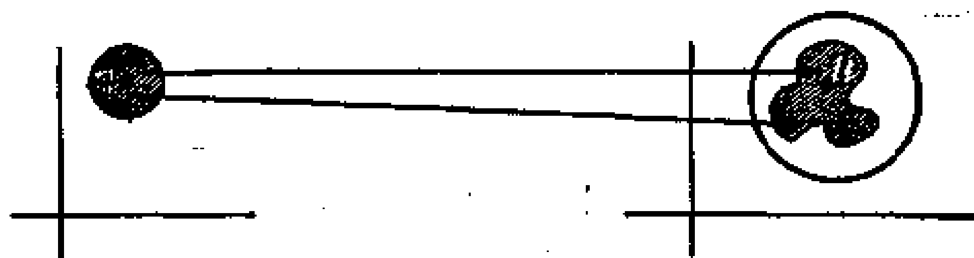


图 3

关于极限的某些事实，可以完全和实数的情形一样地加以证明. 特别是

$$\lim_{z\to a} c=c,$$

$$\lim_{z\to a} z=a,$$

$$\lim_{z\to a}[f(z)+g(z)]=\lim_{z\to a} f(z)+\lim_{z\to a} g(z),$$

$$\lim_{z\to a} f(z)\cdot g(z)=\lim_{z\to a} f(z)\cdot\lim_{z\to a} g(z),$$

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{\lim_{z\to a} g(z)}, \text{若} \lim_{z\to a} g(z)\neq 0.$$

这些结果所依据的绝对值的重要性质是不等式 $|z+w|\leqslant|z|+|w|$，而这个不等式对于复数和对于实数一样是成立的. 这些事

实已经提供了相当多的极限，但更多的则可由下述定理得出。

定理 1 设 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 且 $l=\alpha+i\beta$，其中 u 和 v 是实值函数，而 α 和 β 是实数．那么当且仅当

$$\lim_{z\to a}u(z)=\alpha,$$

$$\lim_{z\to a}v(z)=\beta$$

时才有 $\lim_{z\to a}f(z)=l$.

证明 首先设 $\lim_{z\to a}f(z)=l$．那么对于 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得对于所有 z 而言，

当 $0<|z-a|<\delta$ 时，有 $|f(z)-l|<\varepsilon$.

上面第二个不等式可以写为

$$|[u(z)-\alpha]+i[v(z)-\beta]|<\varepsilon,$$

或

$$[u(z)-\alpha]^2+[v(z)-\beta]^2<\varepsilon^2.$$

因为 $u(z)-\alpha$ 和 $v(z)-\beta$ 都是实数，它们的平方是正的，所以由这个不等式可得

$$[u(z)-\alpha]^2<\varepsilon^2 \text{ 和 } [v(z)-\beta]^2<\varepsilon^2,$$

而这两个不等式又暗含

$$|u(z)-\alpha|<\varepsilon \text{ 和 } |v(z)-\beta|<\varepsilon.$$

由于这对于一切 $\varepsilon>0$ 都是正确的，从而推出

$$\lim_{z\to a}u(z)=\alpha \quad \text{和} \quad \lim_{z\to a}v(z)=\beta.$$

现在假定这两个等式成立．则对于 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得当 $0<|z-a|<\delta$ 时便有

$$|u(z)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{和} \quad |v(z)-\beta|<\frac{\varepsilon}{2},$$

它们暗含着

$$|f(z)-l|=|[u(z)-\alpha]+i[v(z)-\beta]|$$

$$\leqslant |u(z)-\alpha| + |i|\cdot|v(z)-\beta|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是证明了 $\lim\limits_{z\to a} f(z) = l$. ▌

为了有效地应用定理 1, 注意到因为我们已经知道极限 $\lim\limits_{z\to a} z = a$, 所以就能断言

$$\lim_{z\to a} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a),$$
$$\lim_{z\to a} \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a).$$

利用 sin 的连续性容易推出象

$$\lim_{z\to a} \sin(\mathrm{Re}(z)) = \sin(\mathrm{Re}(a))$$

这样的极限. 这些原理的许多应用证明了下面这样一些极限:

$$\lim_{z\to a} \bar{z} = \bar{a},$$
$$\lim_{z\to a} |z| = |a|,$$
$$\lim_{(x+iy)\to a+ib} (e^y \sin x + ix^3 \cos y) = e^b \sin a + ia^3 \cos b.$$

既然极限的概念已被推广到了复函数, 连续性的概念当然也可以推广: 所谓 f 在 a 处连续是指 $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$, 而如果对于 f 的定义域中的所有 a, f 在 a 处都连续, 便说 f 是连续的. 前边对极限所作的阐述证明了下述各函数是连续的:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$f(z) = \bar{z},$$
$$f(z) = |z|,$$
$$f(x+iy) = e^y \sin x + ix^3 \cos y.$$

不连续函数的例子是容易提出的, 且某一些还来得非常自然. 一个特别令人灰心的例子是"幅角函数"θ, 它在所有的非负实数处

都是不连续的(见它在图 2 中的"图形"). 通过适当地重新定义 θ, 就可以改变其间断点;例如(图 4), 如果以 $\theta'(z)$ 表示 z 的满足条件 $\pi/2 \leqslant \theta'(z) < 5\pi/2$ 的唯一幅角, 则对于每个非负的实数 a, θ' 在 ai 处都不连续. 但是, 无论怎样重新定义 θ, 某些间断点总是会出现的.

$f(z) = \theta'(z)$

图 4

θ 的不连续性和定义一个"平方根函数"的问题有着重要的联系, 而所谓"平方根函数"是指对于所有的 z 使得 $(f(z))^2 = z$ 的函数 f. 对于实数来说, 函数 $\sqrt{\ }$ 的定义域仅为非负实数. 如果允许有复数的话, 那么每个数便具有两个平方根(0 是个例外, 它只有一个). 虽然这种情况似乎可能好一些, 但在某些方面情形则更

得；因为 z 的平方根是复数，所以没有一个明确的标准以便优先选择其中的一个(而不是另一个)作为 $f(z)$.

定义 f 的一种方法如下：我们令 $f(0)=0$，而对于 $z\neq 0$ 我们令

$$f(z)=\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta(z)}{2}+i\sin\frac{\theta(z)}{2}\right).$$

显然有 $(f(z))^2=z$，但由于 θ 是不连续的，所以函数 f 也是不连续的. 实际上，要找到一个对于一切 z 使得 $(f(z))^2=z$ 的连续函数 f 是不可能的. 虽然你或许心甘情愿地接受这个论断而丝毫不觉得奇怪，但下述论证却颇为巧妙.

我们现在将证明，一个连续的平方根函数 f 甚至在 $|z|=1$ 的所有 z 的集合上也是不能定义的. 假设存在这样一个函数 f，那么我们必须有 $f(1)=1$ 或 $f(1)=-1$，而且因为 $-f$ 也会是一个连续的平方根函数，所以我们可假定 $f(1)=-1$. 在这种情况下，因为 f 在 1 处不具有值 1，所以它决不会取得值 1. 这意味着如果我们用

$$g(z)=\theta(f(z)),\qquad 对于\ |z|=1$$

来定义 g 的话，那么 g 将是连续的，因为 θ 除了对于 $w=1$ 之外在 $|w|=1$ 的一切 w 处都是连续的，而对于任何 z，$w=1$ 又不是 $f(z)$. 但是等式

$$(f(z))^2=z$$

却暗含有

$$\theta(z)=2\theta(f(z))=2g(z),$$

而上式又暗含着 θ 对于 $|z|=1$ 的所有 z 在 z 处是连续的. 这显然是不对的，所以不可能存在这样的函数 f. 类似的论证表明，对于任何 $n\geqslant 2$ 都不可能定义出连续的"n 次根函数".

对于连续的复变函数而言，也存在一些和描写闭区间上实值

函数的性质的定理相类似的重要东西. 区间$[a,\ b]$的一个自然类似物是满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 和 $c\leqslant y\leqslant d$ 的所有复数 $x+iy$ 的集合(图 5). 这个集合称为闭矩形, 并记作$[a,b]\times[c,d]$.

如果 f 是一个连续的复值函数, 设其定义域为$[a,b]\times[c,d]$, 那么 f 在$[a,\ b]\times[c,\ d]$上是有界的这个断言就似乎是有道理的, 而且确实是正确的. 也就是说, 存在某个实数 M, 使得对于在$[a,b]\times[c,d]$内的一切 z 有

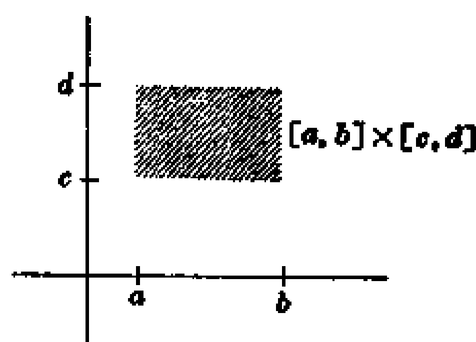


图 5

$$|f(z)|\leqslant M.$$

因为没有关于复数的序的概念, 所以关于 f 具有一个在$[a,\ b]\times[c,d]$上的最大值和最小值的说法是没有意义的. 然而, 如果 f 是一个实值函数, 则这个断言便有意义而且是正确的. 特别是, 如果 f 是任一在$[a,b]\times[c,d]$上连续的复值函数, 则 $|f|$ 也是连续的, 因此在$[a,b]\times[c,d]$内存在某个 z_0, 使得对于$[a,\ b]\times[c,\ d]$内的一切 z 有

$$|f(z_0)|\leqslant|f(z)|;$$

一个类似的说法对于相反的不等式也是对的. 这有时被说成"f 达到它在$[a,b]\times[c,d]$上的最大和最小模值".

前一段所列举的种种事实在此将不予证明, 尽管一些证明被概略地叙述在第 5 题中. 然而, 采用这些事实我们即可给出代数基本定理的一个证明, 这实在是令人吃惊的, 因为对于多项式函数和其他连续函数的区别我们还没有说过多少.

定理 2(代数基本定理) 设 $a_0,\cdots,a_{n-1}$ 是一些任意的复数. 则存在这样的复数 z, 使

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_0=0.$$

证明 设

$$f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0,$$

则 f 是连续的，且定义为

$$|f|(z)=|f(z)|=|z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|$$

的函数 $|f|$ 也是连续的. 我们的证明基于这样一种观察：满足 $f(z_0)=0$ 的点 z_0 显然将是 $|f|$ 的一个最小点. 为了证明定理，我们将首先证明 $|f|$ 的确具有在整个复平面上的最小值. 该证明和在第七章中所作的关于(实系数的)偶次多项式函数具有在整个 R 上的最小值的证明几乎是一模一样的；两个证明都依赖于当 $|z|$ 很大时 $|f(z)|$ 也很大这一事实.

我们从下式开始，对于 $z\neq0$，$f(z)$ 可写成

$$f(z)=z^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right),$$

于是

$$|f(z)|=|z|^n\cdot\left|1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|.$$

令

$$M=\max(1,2n|a_{n-1}|,\cdots,2n|a_0|).$$

则对于 $|z|\geqslant M$ 的一切 z，我们有 $|z^k|\geqslant|z|$ 和

$$\frac{|a_{n-k}|}{|z^k|}\leqslant\frac{|a_{n-k}|}{|z|}\leqslant\frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|}=\frac{1}{2n},$$

因此

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|\leqslant\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|\leqslant\frac{1}{2},$$

这暗含着

$$\left|1+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|\geqslant1-\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|\geqslant\frac{1}{2},$$

这就意味着对于 $|z|\geqslant M$ 有

$$|f(z)|\geqslant\frac{|z|^n}{2}.$$

特别是，如果同时有$|z|\geqslant M$ 和 $|z|\geqslant\sqrt[n]{2|f(0)|}$，则

$$|f(z)|\geqslant|f(0)|.$$

现在设$[a, b]\times[c, d]$是一个包含有$\{z:|z|\leqslant\max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|})\}$的闭矩形(图 6)，并假定$|f|$在$[a, b]\times[c, d]$上的最小值在 z_0 处取得，从而

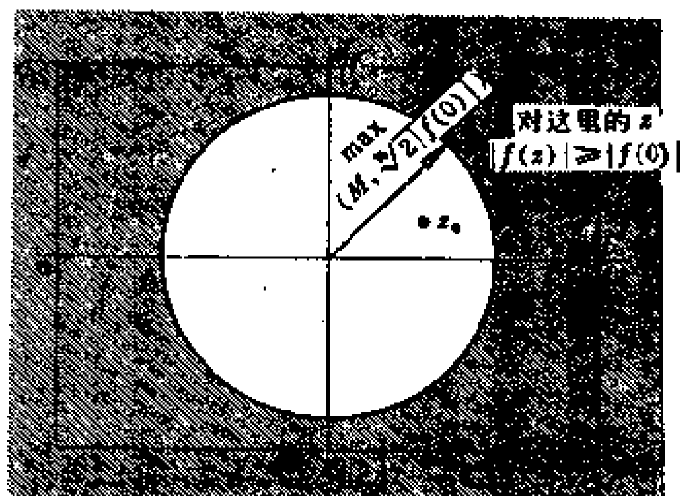


图 6

(1) 对于$[a, b]\times[c, d]$内的 z 有$|f(z_0)|\leqslant|f(z)|$. 特别据此推出$|f(z_0)|\leqslant|f(0)|$. 因此

(2) 如果$|z|\geqslant\max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|})$，则有

$$|f(z)|\geqslant|f(0)|\geqslant|f(z_0)|.$$

联合(1)和(2)我们即可看出对于所有的 z 都有$|f(z_0)|\leqslant|f(z)|$，亦即$|f|$在 z_0 处达到它在整个复平面上的最小值.

为了完成定理的证明，我们现在来证明 $f(z_0)=0$. 引入定义为

$$g(z)=f(z+z_0)$$

的函数 g 是方便的. 则 g 是一个 n 次多项式函数，它的最小的绝对值出现在 0 处. 我们需要证明 $g(0)=0$.

假设 $g(0)=\alpha\neq 0$. 若 m 是出现在 g 的表示式中的 z 的最小正幂次，则我们可以写出

$$g(z)=\alpha+\beta z^m+c_{m+1}z^{m+1}+\cdots+c_n z^n,$$

其中 $\beta\neq 0$. 现在，根据定理二十四，2 存在一个这样的复数 γ 使

$$\gamma^m=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

于是，令 $d_k=c_k\gamma^k$，我们便有

$$\begin{aligned}
|g(\gamma z)|&=|\alpha+\beta\gamma^m z^m+d_{m+1}z^{m+1}+\cdots+d_n z^n|\\
&=|\alpha-\alpha z^m+d_{m+1}z^{m+1}+\cdots|\\
&=|\alpha(1-z^m+\frac{d_{m+1}}{\alpha}z^{m+1}+\cdots)|\\
&=\left|\alpha\left(1-z^m+z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right]\right)\right|\\
&=|\alpha|\cdot\left|1-z^m+z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right]\right|.
\end{aligned}$$

如此曲折地得出的这个式子将使我们碰到一个尖锐的矛盾. 首先注意到当 $|z|$ 选得足够小时，我们将会有

$$\left|\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right|<1.$$

如果我们从使得这个不等式成立的所有 z 当中选出某个既是实的又是正的 z，则

$$\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right]\right|<|z^m|=z^m.$$

因此，当 $0<z<1$ 时我们有

$$\begin{aligned}
\left|1-z^m+z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right]\right|&\leqslant|1-z^m|+\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right]\right|\\
&=1-z^m+\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z+\cdots\right]\right|\\
&<1-z^m+z^m=1.
\end{aligned}$$

这就是所要求的矛盾：对于这样一个数 z，我们有

$$|g(\gamma z)|<|\alpha|,$$

这与 $|\alpha|$ 是 $|g|$ 在整个平面上的最小值的事实相矛盾，因此原假定一定是不正确的，从而有 $g(0)=0$. 这就意味着 $f(z_0)=0$. ▌

即使把我们省去的关于连续复变函数诸基本事实的证明也考虑在内，这个证明仍然是以格外少的工作量证明了一个深刻的事实. 当我们更进一步去寻求与实函数的性质相类似的东西时，很自然地希望会产生其他一些有趣的发展. 下一个明显的步骤便是定义导数：如果

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(a+z)-f(a)}{z}$$

存在，就说函数 f 在 a 处是可微的，这时其极限记为 $f'(a)$. 不难证明

当 $f(z)=c$ 时，$f'(a)=0$，

当 $f(z)=z$ 时，$f'(a)=1$，

$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$，

$(f\cdot g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$，

如果 $g(a)\neq 0$，则 $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}$，

$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$；

所有这些公式的证明和以前完全是一样的. 尤其是由此可推出：若 $f(z)=z^n$，则 $f'(z)=nz^{n-1}$. 然而这些公式仅仅证明了有理函数的可微性. 许多其他的一些明显的函数不是可微的. 例如，假定

$$f(x+iy)=x-iy \quad (\text{即 } f(z)=\bar{z}).$$

如果该函数 f 在 0 处可微的话，极限

$$\lim_{(x+iy)\to 0}\frac{f(x+iy)-f(0)}{x+iy}=\lim_{(x+iy)\to 0}\frac{x-iy}{x+iy}$$

一定存在．然而，注意到

$$\text{如果 } y=0,\text{则 } \frac{x-iy}{x+iy}=1,$$

和

$$\text{如果 } x=0,\text{则 } \frac{x-iy}{x+iy}=-1;$$

所以这个极限绝对不可能存在，因为当 $x+iy$ 任意接近于 0 时，商 $\frac{x-iy}{x+iy}$ 具有两个值 1 和 -1.

由这个例子看来，其他的可微函数来自何处一点也不清楚．如果回想起 sin 和 exp 的定义，那么就会看出根本没什么希望将这些定义推广到复数的情形．暂时只好局限于此，但我们所有的问题马上会得到解决．

习　题

1. (a) 对于任何实数 y，定义 $\alpha(x)=x+iy$（因此 α 是一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的复值函数）．证明 α 是连续的．（这可直接由本章中的定理推出．）同样地证明 $\beta(y)=x+iy$ 是连续的．

   (b) 设 f 是一个定义在 $\mathbf{C}$ 上的连续函数．对于固定的 y，令 $g(x)=f(x+iy)$．证明 g 是一个（定义在 $\mathbf{R}$ 上的）连续函数．同样地证明 $h(y)=f(x+iy)$ 是连续的．提示：应用(a)．

2. (a) 设 f 是一个定义在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续实值函数．证明：如果 f 对于 $[a,b]\times[c,d]$ 内的 z 和 w 取得值 $f(z)$ 和 $f(w)$，则 f 也取得介于 $f(z)$ 和 $f(w)$ 之间的一切值．提示：对于 $[0,1]$ 内的 t 考察函数 $g(t)=f(tw+(1-t)z)$．

   *(b) 如果 f 是一个定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续复值函数，由于我们无法说介于 $f(z)$ 和 $f(w)$ 之间的复数，所以(a)中的论断不再有任何意义．我们可能推测 f 会取 $f(z)$ 和 $f(w)$ 之间的线段上的一切

值，但即使这也是不对的．试举一个表明这个事实的例子．

3. (a) 证明：如果 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 是任意一些复数，则存在有复数 $z_1, \cdots, z_n$（不一定不同）使得

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i).$$

(b) 证明：如果 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 是实数，则 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 可写为系数全是实数的线性因子 $z+a$ 和二次因子 z^2+bz+c 的乘积．（利用习题二十四，7．）

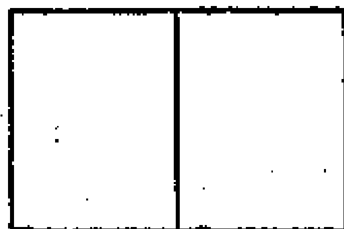
4. 在这一题中我们只研究实系数的多项式．这样的多项式如果对于实系数多项式 h_i 可写成 $h_1^2+\cdots+h_n^2$，则称它为一个**平方和**．

(a) 证明：若 f 是一个平方和，则对于一切 x 都有 $f(x)\geqslant 0$．

(b) 证明：若 f 和 g 是平方和，则 $f\cdot g$ 也是平方和．

(c) 假定对一切 x 有 $f(x)\geqslant 0$．证明 f 是一个平方和．提示：首先将 $f(x)$ 写成 $f(x)=x^k g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$ 对一切 x 成立．则 k 就一定是偶数（为什么？），且对一切 x 有 $g(x)>0$．接着应用第 3 题 (b)．

5. (a) 设 A 为一复数集合．象在实数的情形一样，如果对于每个（实数）$\varepsilon>0$ 有 A 中的一点 a 使 $|z-a|<\varepsilon$ 但 $a\neq z$，则称数 z 为集合 A 的**极限点**．证明二维波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理：如果 A 是 $[a, b]\times[c, d]$ 的一个无限子集，则 A 具有在 $[a, b]\times[c, d]$ 内的极限点．提示：首先象图 7(a) 那样用铅垂线将 $[a, b]\times[c, d]$ 分为两半．那么由于 A 是无限的，所以至少有一半仍包含有 A 的无限多个点．象图 7(b) 那样又将这一半用水平线分为两半．继续以这种方式交替地用铅垂线和水平线来分．



(a)



(b)

图 7

(在这个提示中所概述的二维对分论证法是如此标准，以致"波尔察诺-魏尔斯特拉斯"这一标题除用来称呼定理本身之外，还常常用来称呼其证明方法．例如，见H. 皮塔德(H. Petard)的"A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting"一文，载美国数学月刊45期(1938)446-447．)

(b) 证明在$[a, b]\times[c, d]$上连续的(复值)函数在$[a, b]\times[c, d]$上是有界的．(仿照习题二十一，22．)

(c) 证明：如果f是$[a, b]\times[c, d]$上的实值连续函数，则f取得其在$[a, b]\times[c, d]$上的最大值和最小值．(你可以使用对第七章定理3施行的同一技巧．)

*6. 不能认为定理2的证明是完全初等的，因为选择使$\gamma^m=-\alpha/\beta$的γ的可能性依赖于第二十四章定理2，从而依赖于三角函数．因此，对于方程$z^n-c=0$有解提供一个初等的证明是感兴趣的．

(a) 做一次明显的计算以证明对于任何复数c总可以求得方程$z^2-c=0$的解．

(b) 说明方程$z^n-c=0$的求解为什么总可以简化为n为奇数的情况．

(c) 设z_0是函数$f(z)=z^n-c$具有其最小绝对值的那个点．如果$z_0\neq0$，证明在定理2之证明中的那个整数m等于1；既然我们一定会求出$\gamma^1=-\alpha/\beta$的γ，因此证明的其余部分对f是有效的．所以，只要证明f的最小绝对值不出现在0处就够了．

(d) 反之，我们假定f在0处具有它的最小绝对值．因为n是奇数，所以点$\pm\delta$, $\pm\delta i$在f的作用下变成$-c\pm\delta^n$, $-c\pm\delta^n i$．证明对于小的δ而言，这些点中至少有一个具有比$-c$更小的绝对值，从而得出一个矛盾．

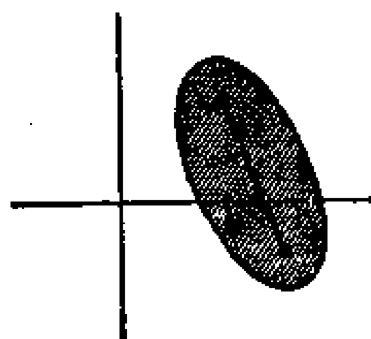
7. 设$f(z)=(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k}$.

(a) 证明：$f'(z)=(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k}\cdot\sum_{\alpha=1}^{k}m_\alpha(z-z_\alpha)^{-1}$.

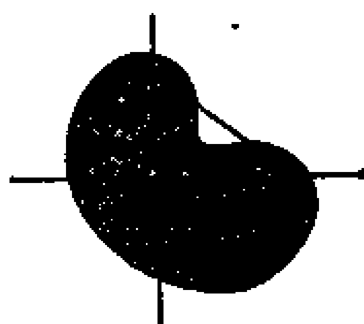
(b) 设$g(z)=\sum_{\alpha=1}^{k}m_\alpha(z-z_\alpha)^{-1}$．证明：如果$g(z)=0$，则$z_1, \cdots, z_k$不可能全都位于通过$z$之直线的同一侧．提示：应用习题二十

四, 11.

(c) 设K为平面的一个子集, 如果K包含有联结其内部任意两点的直线段, 则称K为**凸的**(图 8). 对于任一集合 A, 都有一个包含它



(a) 平面的凸子集



(b) 平面的非凸子集

图 8

的最小凸集, 称之为A的**凸包**(图 9); 如果点P不在A的凸包内, 则整个A被包含在某条通过P的直线的一侧. 利用这个信息证明方程$f'(z)=0$的根位于集合$\{z_1, \cdots, z_k\}$的凸包之内. (在第十一章之附录中的凸性的定义与在此给出的凸性定义有关——函数f是凸的是指位于f的图形上或其上方的点所成的集合是凸集, 且f的图形不含有直线段. 关于凸集的更进一步的详情可在建议读物中的参考书[19]中找到.)

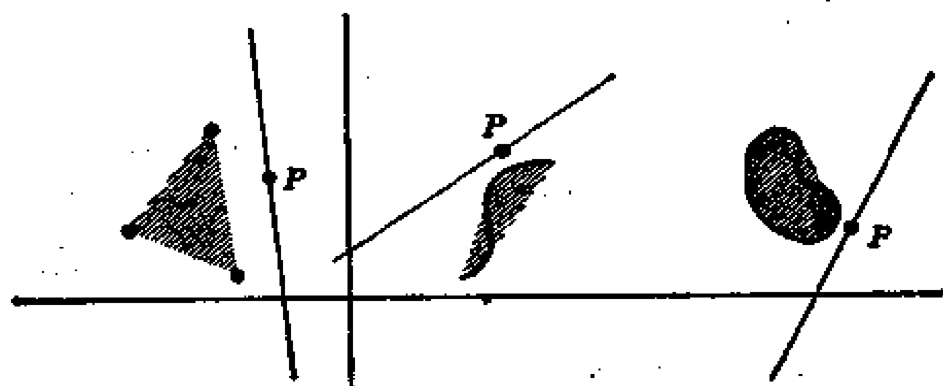


图 9

8. 证明: 如果f在z处是可微的, 则f在z处是连续的.

9. 假设$f=u+iv$, 其中u和v是实值函数.

(a) 对于固定的y_0, 令$g(x)=u(x+iy_0)$和$h(x)=v(x+iy_0)$. 证明: 如果$f'(x_0+iy_0)=\alpha+i\beta$, α和β为实数, 则$g'(x_0)=\alpha$和$h'(x_0)=\beta$.

(b) 另一方面，设 $k(y)=u(x_0+iy)$ 和 $l(y)=v(x_0+iy)$. 证明：$l'(y_0)=\alpha$ 和 $k'(y_0)=-\beta$.

(c) 假定对一切 z 有 $f'(z)=0$，证明 f 是一个常值函数。

10. (a) 应用表示式

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

对所有的 k 求 $f^{(k)}(x)$.

(b) 用这个结果对一切 k 求 $\arctan^{(k)}(0)$。

第二十六章　复变数幂级数

如果你尚未猜出可微的复变函数将来自何处，那么本章的标题会立即指出其秘诀所在：我们打算用无穷级数来定义函数．这将需要讨论复数的无穷序列以及这种序列的和，但（象在极限和连续的情形一样）其基本定义几乎和关于实数序列与级数的相应定义完全相同．

复数的**无穷序列**形式上是其定义域为N的复值函数；对于实数序列方便的下标记法亦将用于复数序列．一个复数序列$\{a_n\}$可以非常方便地用在平面内标出点a_n（图1）的办法来几何地表示．

图1中所示的序列收敛于0，复数序列的"收敛性"将完全和实数序列一样地定义：序列$\{a_n\}$收敛于l，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

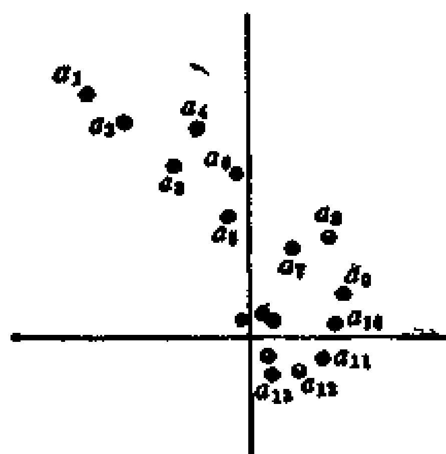


图　1

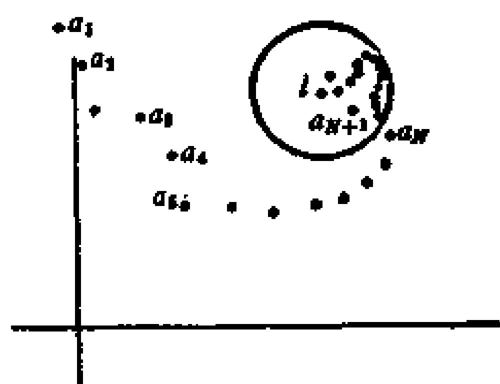


图　2

是指对于任意$\varepsilon>0$，存在一个自然数N，使得对于一切n而言，

如果$n>N$，则$|a_n-l|<\varepsilon$．

这个条件意味着围绕l画出的任一圆将包含关于所有充分大的n的a_n（图2）；说得更通俗一些，该序列最终将在任一围绕l画出的

圆内.

复数序列的收敛性不仅恰好与实数序列一样来定义，而且还能化为这种熟悉的情况.

定理1 设对于实数 b_n 和 c_n 有

$$a_n = b_n + ic_n,$$

又对于实数 β 和 γ 有

$$l = \beta + i\gamma.$$

则当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$$

时 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

证明 本证明留作一个容易的练习. 如果对于如何证明尚有疑问的话，可参考类似的第二十五章定理1.

序列 $\{a_n\}$ 之和又一次定义为 $\lim_{n\to\infty} s_n$, 其中

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

这个极限存在的那些序列是**可加的**；换句话说，如果这个极限存在我们便说无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，否则便说无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**. 由于下述定理，不必再去发现任何新的关于无穷级数的收敛性的判别法.

定理2 设对于实数 b_n 和 c_n 有

$$a_n = b_n + ic_n.$$

则当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 两者都收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且在这种情况下有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right).$$

证明 这是将定理 1 用于$\{a_n\}$的部分和序列的直接结果. ∎

对于复级数也存在一个绝对收敛的概念：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$(这是一个实数项级数，因此我们以前的种种判别法对它都是适用的)收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛. 下面的定理不象前两个那么容易.

定理 3 设对于实数b_n和c_n有

$$a_n=b_n+ic_n.$$

则当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$两者都绝对收敛时$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$才绝对收敛.

证明 首先假设$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$两者都绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$和$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$两者都收敛. 由此推出$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|+|c_n|$收敛. 因为有

$$|a_n|=|b_n+ic_n|\leqslant|b_n|+|c_n|.$$

所以由比较判别法推出$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛(数$|a_n|$和$|b_n|+|c_n|$都是实的和非负的). 于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

现在假设$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛. 因为

$$|a_n|=\sqrt{b_n^2+c_n^2},$$

所以显然有

$$|b_n|\leqslant|a_n|\text{和}|c_n|\leqslant|a_n|$$

再次由比较判别法证明$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$和$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$收敛. ∎

定理 3 的两个结果是特别值得注意的. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$也绝对收敛；因此根据第二十二章定理 4 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，所以按定理 2 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛. 换句话说，绝对收敛暗含着收敛. 同样的推理证明，绝对收敛级数的任何重排都具有相同的和. 通过先建立柯西准则的类似准则(见第 12 题)也可以直接证明这些事实，而不必应用关于实数的相应定理.

有了这些妥善的准备，我们现在即可研究复变数的幂级数，即形如

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$$

的函数. 这里的数 a 和 a_n 可允许为复数，且我们的兴趣所在自然是对于复数 z 而言 f 的性质. 象在实数的场合一样，我们通常将研究中心在 0 点的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n;$$

在这种情况下，如果 $f(z_0)$ 收敛，则 $f(z)$ 对于 $|z|<|z_0|$ 也收敛. 这个事实的证明和第二十三章定理 6 的证明相类似，但是由于这很快就要弄清楚，我们将完全不用一致收敛性和魏尔斯特拉斯M-判别法的工具，尽管它们都有着其复数类似的结论. 因此我们下边的定理只推广了第二十三章定理 6 的一小部分.

定理 4 假定

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_0^n=a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\cdots$$

对于某个 $z_0\neq 0$ 收敛．则当$|z|<|z_0|$时两个级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots$$

都绝对收敛．

证明 象在第二十三章定理 6 的证明中一样，我们只需要数 $a_n z_0^n$的集合是有界的这个事实，即存在一个数M使得对一切n有

$$|a_n z_0^n|\leqslant M.$$

于是我们有

$$|a_n z^n|=|a_n z_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$$\leqslant M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n;$$

且对于 $z\neq 0$ 有

$$|na_n z^{n-1}|=\frac{1}{|z|}n|a_n z_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$$\leqslant\frac{M}{|z|}n\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

因为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$和$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$收敛，这证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

和 $$\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$$

两者都绝对收敛(关于$\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$的论证我们假定了 $z\neq 0$，但该级数对于 $z=0$ 无疑也是收敛的)．

定理 4 明显地大大限制了关于集合

$$\left\{z: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{收敛}\right\}$$

的可能性。例如，图 3 中画阴影的集合 A 便不可能是使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛的所有 z 的集合，因为它包含 z 但却不包含满足 $|w|<|z|$ 的数 w。

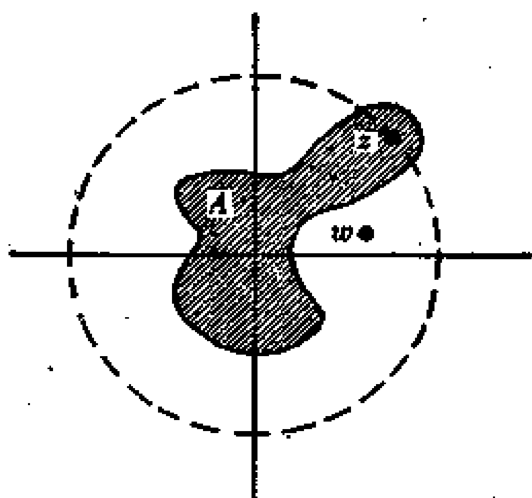


图 3

一个幂级数在其上收敛的那些点的集合，似乎除了是一个圆内的点集之外不大可能是别的任何东西．如果我们允许"半径为 0 的圆"（当幂级数仅在 0 点收敛时）和"半径为∞的圆"（当幂级数在所有点上都收敛时），则这个论断便是真的（虽有我们立刻会说到的一个复杂之处）；其证明仅需要定理 4 和一种巧妙的组织。

定理 5　对于任一幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots,$$

下列三种可能性之一必定是真的：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 仅对于 $z=0$ 收敛．

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 对于 $\mathbf{C}$ 中的所有 z 都绝对收敛．

(3) 存在这样一个数 $R>0$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 当 $|z|<R$ 时绝对收敛而当 $|z|>R$ 时发散．（注意我们没有提及当 $|z|=R$ 时出现什么情况．）

证明 设

$$S=\{\mathbf{R}\text{中的}x:\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n\text{关于某个满足}$$
$$|w|=x\text{的}w\text{收敛}\}.$$

首先假定S是无界的. 那么对于任一复数z，有S中的一个数x使$|z|<x$. 按照S的定义，这意味着$\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$对于某个满足$|w|=x>|z|$的$w$收敛. 从定理4推出$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$绝对收敛. 因此，在这种情况下可能性(2)是真的.

现在设S是有界的，并设R是S的最小上界. 如果$R=0$，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$仅对于$z=0$收敛，从而可能性(1)是真的. 另一方面，假定$R>0$，则当$z$是一个适合$|z|<R$的复数时，便有$S$中的一个数$x$使$|z|<x$. 于是，这又一次意味着$\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n$对于某个适合$|z|<|w|$的$w$收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$绝对收敛. 另外，如果$|z|>R$，则因为$|z|$不在$S$内，所以$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$不收敛. ∎

在情况(3)中出现的数R称为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的**收敛半径**. 在情况(1)和(2)中，习惯上说收敛半径分别为0和∞. 当$0<R<\infty$时，圆$\{z:|z|=R\}$称为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$的**收敛圆**. 如果$z$在该圆之外，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$当然不收敛，而实际上可作出更强的论断：这些项$a_nz^n$还不是有界的. 为了证明这一点，设$w$是任一满足条件$|z|>|w|>R$的数；

如果这些项$a_n z^n$是有界的，则定理4的证明表明$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$收敛，这显然是荒谬的．这样(图4)，在收敛圆的内部级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$以最佳可能方式(绝对)收敛，而在收敛圆外部级数则以最糟的可能方式(这些项$a_n z^n$不是有界的)发散．

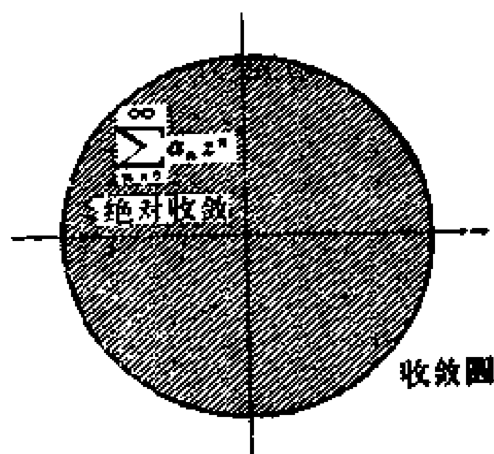


图 4

在收敛圆上发生什么情况是一个十分困难的问题．今后，除了提到存在在收敛圆上处处收敛的幂级数，在收敛圆上无一处收敛的幂级数，以及恰好是介于前两者之间的幂级数(见第5题)之外，我们将根本不考虑这个问题．

记住我们在这一章的目的是产生可微函数．所以我们需要推广在第二十三章中关于实的幂级数已证明了的结果，即由幂级数所定义的函数在收敛圆之内可以逐项微分．在这里，即使我们乐于引入一致收敛性也不再能仿效第二十三章中的证明过程，因为似乎没有第二十三章定理3的类似定理可以适用．代替这种模仿我们将使用直接的论证(它也可能已在第二十三章中使用过)．在开始证明之前，我们注意到关于通过逐项微分所产生的级数的收敛性至少不会有什么问题．如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$具有收敛半径$R$，则定理4直接含有级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$对于$|z|<R$也收敛的意思．此外，如果$|z|>R$，则因为项$a_n z^n$是无界的，从而项$n a_n z^{n-1}$也必定是无界的，因此$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$必不收敛．这就说明$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$的收敛半径

也恰好是 R.

定理 6 如果幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

具有收敛半径 $R>0$，则 f 对于任何满足 $|z|<R$ 的 z 在 z 处都是可微的，且

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}.$$

证明 我们将再次使用"$\varepsilon/3$ 论证"、此定理对于多项式函数显然成立这一事实，暗示我们写出

$$(*)\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{((z+h)^n-z^n)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{((z+h)^n-z^n)}{h}-\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{((z+h)^n-z^n)}{h}\right|$$

$$+\left|\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{((z+h)^n-z^n)}{h}-\sum_{n=1}^{N}na_nz^{n-1}\right|$$

$$+\left|\sum_{n=1}^{N}na_nz^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|.$$

我们将证明，对于任一 $\varepsilon>0$，能够通过选取充分大的 N 和充分小的 h 使得上式右边的每个绝对值 $<\varepsilon/3$. 这显然就证明了定理.

只是在(*)右边的第一项会出现一些困难. 首先，选取某个满

足条件$|z|<|z_0|<R$的z_0;往后我们将只考虑适合$|z+h|\leqslant|z_0|$的h. 如果我们回想到

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1},$$

便可将表示式$\frac{(z+h)^n-z^n}{h}$以更方便的方式写出. 应用上述公式于

$$\frac{(z+h)^n-z^n}{h}=\frac{(z+h)^n-z^n}{(z+h)-z},$$

我们就得到

$$\frac{(z+h)^n-z^n}{h}=(z+h)^{n-1}+z(z+h)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}.$$

因为

$$|(z+h)^{n-1}+z(z+h)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}|\leqslant n|z_0|^{n-1},$$

所以我们有

$$\left|a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}\right|\leqslant n|a_n|\cdot|z_0|^{n-1}.$$

但因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|a_n|\cdot|z_0|^{n-1}$收敛,所以如果$N$充分大就有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}n|a_n||z_0|^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这就意味着

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}\right|$$

$$=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{N}\left|a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}n|a_n|\cdot|z_0|^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

简单地说，如果N充分大，则

(1) 对于所有满足$|z+h|\leqslant|z_0|$的h，

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

在(*)右边的第三项是容易处理的：既然$\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$收敛，从而推出当$N$充分大时就有

(2) $$\left|\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}-\sum_{n=1}^{N}na_nz^{n-1}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

最后，选取一个使(1)和(2)成立的N，我们注意到由于多项式函数$g(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nz^n$无疑是可微的，所以有

于是 $$\lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}=\sum_{n=1}^{N}na_nz^{n-1}.$$

(3) 对于充分小的h应有

$$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-\sum_{n=1}^{N}na_nz^{n-1}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

正如我们曾经指出的那样，(1)，(2)和(3)证明了定理. ▮

定理6有一个明显的推论：一个由幂级数所表示的函数在其收敛圆内是无限次可微的，且该幂级数就是它在0处的泰勒级数. 特别是，由此推出f在收敛圆内是连续的，因在z处可微的函数在z处是连续的(习题二十五，8).

幂级数在它的收敛圆内的连续性，有助于阐明关于实变函数得到的某些泰勒级数的性质，并给出曾经许诺的关于在二十三章末提出的问题的答案. 我们已经看到过关于函数$f(z)=1/(1+z^2)$的泰勒级数，即

$$1-z^2+z^4-z^6+\cdots,$$

仅对于$|z|<1$的实数z收敛，因此具有收敛半径1. 这并非是偶然的，因为收敛圆含有点i和$-i$，在其上f是无定义的. 如果这个幂级数在一个半径大于1的圆内收敛，则(图5)它将表示一个在那个圆内，特别是在i和$-i$处是连续的函数. 但这是不可能的，因为它在单位圆内等于$1/(1+z^2)$，而$1/(1+z^2)$当z由单位圆内趋于i或$-i$时不趋于极限.

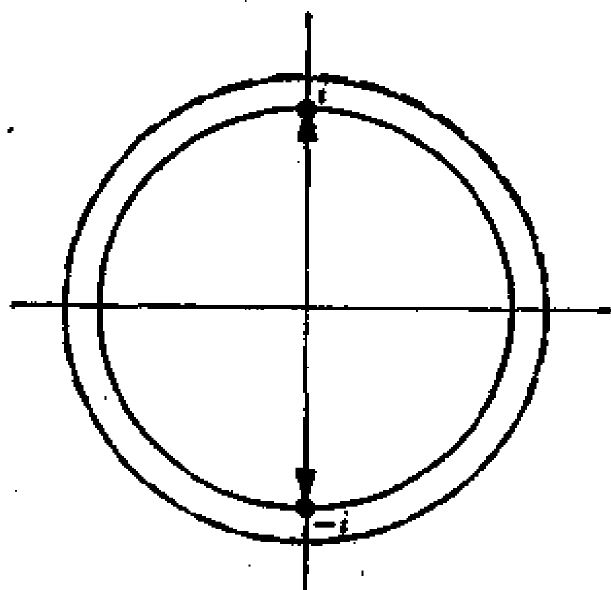


图 5

复数的使用也多少可阐明关于函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的泰勒级数的古怪的性质. 虽然我们尚未对复数z定义函数e^z，但如果y是实数且不等于0，则

$$f(iy)=e^{-1/(iy)^2}=e^{1/y^2}.$$

这大概会是正确的. 关于这个式子的一个有趣的事实是当y变小时它却变大. 因此，当f对于复数定义时它在0处便不再是连续的了，从而它只是对于$z=0$才等于它的泰勒级数这个事实就不

会是不可思议的。

我们将用来对于复数 z 实际定义 e^z(也定义 $\sin z$ 和 $\cos z$)的方法到现在应该是清楚了．对于实数 x 我们知道

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

所以对于复数 z 我们定义

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

$$\exp(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots.$$

于是根据定理 6 有 $\sin'(z) = \cos z$, $\cos'(z) = -\sin z$, 以及 $\exp'(z) = \exp(z)$．另外，如果我们在关于 e^z 的级数中以 iz 代替 z，那么某种特别有趣的事情就会发生：

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

(此步骤可借级数绝对收敛的事实来证明)，因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

由定义(即诸幂级数)显然有

$$\sin(-z) = -\sin z,$$

$$\cos(-z)=\cos z,$$

所以我们也有

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z$$

由关于 e^{iz} 和 e^{-iz} 的等式我们可以导出公式

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

这样，复幂级数的这一发现就将指数函数置于诸初等函数发展的核心地位——它揭示出三角函数和指数函数之间的关系，而这在这些函数初被定义时是决未想到的，且在不使用复数的情况下也是决不可能发现的．作为这个关系式的一个附带的结果，我们得到一个迄今未曾发觉的在数 e 和 π 之间的关系：如果在公式

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$

中我们取 $z=\pi$，那么便得到一个值得注意的结果

$$e^{i\pi}=-1.$$

我们将以这些说明结束我们关于复变函数的研究．但还有一些关于幂级数的基本事实没有提到．到此为止，除了关于$a=0$的情况之外，我们很少研究过中心在 a 处的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

这个省略所以被采用多少是为了简化说明．对于中心在 a 处的幂级数而言，本章中的所有定理都有其明显的叙述(其证明仅需要一些不足道的修正)：存在这样的数 R（也许是 0 或“∞”)使得级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 对于满足 $|z-a|<R$ 的 z 绝对收敛，对于满足 $|z-a|>R$ 的 z 则具有无界的项；此外，对于满足 $|z-a|<R$ 的一切 z；

函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

具有导数

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-a)^{n-1}.$$

如果一个函数已被写为一个中心在 a 处的幂级数，那么要研究将它表示为一个中心在 b 处的幂级数的可能性就不那么直截了当了．如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

具有收敛半径 R，且 b 是一个满足 $|b-a|<R$ 的点(图 6)，则 $f(z)$ 也能够写为一个中心在 b 处的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-b)^n$$

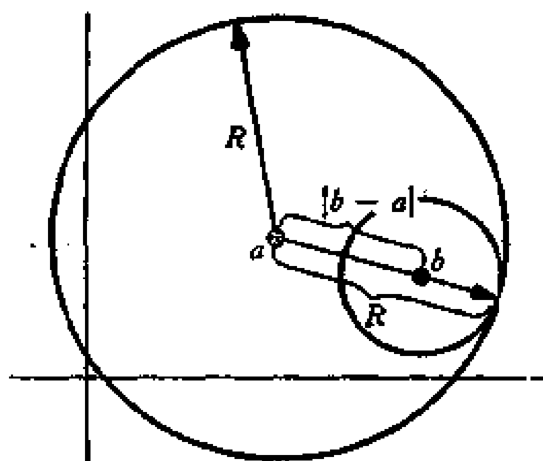


图 6

(诸数 b_n 必须是 $f^{(n)}(b)/n!$)；此外，这个级数具有至少是 $R-|b-a|$ (也许更大些)的收敛半径.

我们不想去证明前段提过的那些事实，而且还有另外的几个重要事实我们也不予证明．如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \text{ 和 } g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n$$

在某个围绕着 a 点的圆内收敛，那么 $f+g$ 和 $f\cdot g$ 也将在一个围绕 a 的圆内收敛一定是有希望的；此外，如果 $g(a)\neq 0$，则函数 $1/g$ 将有一个幂级数表示式．最后，如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \text{ 和 } g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-b)^n,$$

且 $g(b)=a$，则将 $f\circ g$ 写为一个中心在 b 处的幂级数应当是可能的.

所有这些事实不需要引进任何新的基本概念现在即可以证明. $f+g$ 的处理是容易的，而 $f\cdot g$ 就会出现一些问题，至于 $1/g$ 则甚至会出现更多的问题. 将一个中心在 a 处的幂级数变成中心在 b 处的幂级数的可能性会变得更加复杂，而 $f\circ g$ 的处理就需要真正的技巧. 我们不以计算的绝技来结束本节，宁愿给出"复分析"的一次预演，"复分析"是数学中最美妙的分支之一，所有上述的这些事实在其中都会作为某些基本结果的直接推论.

幂级数所以在本章内引入，是为了提供可微的复变函数. 由于这些函数实际上是无限次可微的，所以自然会以为我们仅仅选择了可微的复变函数的一个非常特殊的集合. 但复分析的基本定理表明这种猜想是完全不对的：

如果一个复变函数定义在平面的某个区域 A 内，且在 A 内是可微的，则它在 A 内便自动地是无限次可微的. 此外，对于 A 内的每一点 a 而言，f 在 a 处的泰勒级数将在包含于 A 中的任一圆内收敛于 f(图 7).

这些事实属于复分析中最先要证明的事实. 但在这里要给出证明这些论断的任何思想是不可能的——其所用的方法与初等微积分中的那些是很不相同的. 然而，如果这些论断被承认，那么在前面提到的那些事实就很容易得到证明.

例如，设 f 和 g 都是可以写为幂级数的函数，则正如我们已证明的那样，f 和 g 都是可微的——从而由一些容易的一般定理即可推出 $f+g$, $f\cdot g$, $1/g$ 以及 $f\circ g$ 也都是可微的. 求助于复分析中的那些结果就可知道它们能写成幂级数.

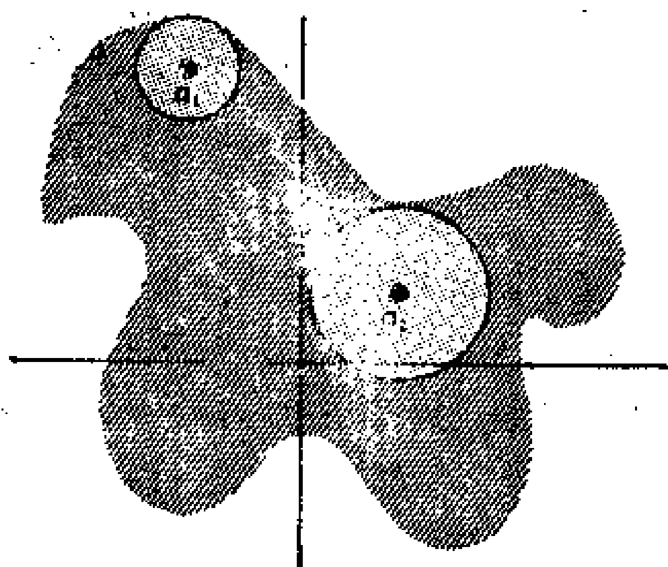


图 7

同样地，如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

具有收敛半径 R，则 f 在区域 $A=\{z:|z-a|<R\}$ 中是可微的．因此，如果 b 在 A 内，就可以将 f 写为中心在 b 处的幂级数，它将在半径为 $R-|b-a|$ 的圆内收敛．这个级数实际上可以在一个更大的圆内收敛，因为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 可以是关于一个在比 A 更大的区域内可微的函数的级数．例如，假定 $f(z)=1/(1+z^2)$，则 f 除了在它没有定义的 i 和 $-i$ 处之外是可微的．这样 $f(z)$ 可写为收敛半径为 1 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$（事实上，我们知道 $a_{2n}=(-1)^n$ 且当 k 为奇数时 $a_k=0$）．也可以写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(z-\frac{1}{2}\right)^n,$$

其中数 b_n 必定是 $b_n=f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\Big/n!$．我们能够容易地预言这个级

数的收敛半径：它是$\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$，即从$\frac{1}{2}$到$i$或$-i$的距离(图8).

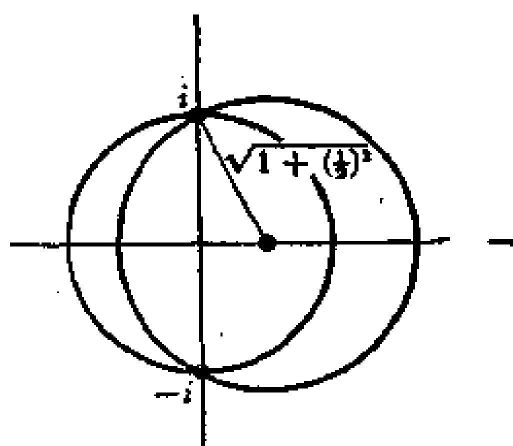


图 8

作为进一步研究复分析的一个附加的动机，我们将提到另一结果，这个结果差不多近乎是直觉的，且可以在该学科的任一论述中找到.

对于实数z来说，$\sin z$的值总是位于-1和1之间，但对于复数z而言则全然不是如此. 事实上，如果$z=iy$，其中y为实数，则

$$\sin iy=\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}.$$

如果y很大，则$\sin iy$就绝对值而言也很大. $\sin$的这个性质代表了那些在整个复平面上有定义而且可微的函数(这样的函数称为整函数或全纯函数)的性质. 一个在复分析中很早出现的结果如下：

刘维尔定理：唯一有界的全纯函数是常值函数.

作为刘维尔定理的一个简单的应用，我们来研究多项式函数

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

其中$n>1$，因此f不是常数. 我们已经知道$f(z)$对于大的z也是大的，所以关于f刘维尔定理没有告诉我们什么有趣的东西. 但我们研究函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}.$$

如果$f(z)$永远不是零，则g将是全纯的；因为对于大的z而言$f(z)$也变大，所以函数g又将是有界的，这就与刘维尔定理相矛盾. 因此对于某个z应有$f(z)=0$，且我们已证明了代数基本定理.

习　　题

1. 判定下列级数中的每一个是否收敛，以及是否绝对收敛.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2i}{2^n}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$.

(v) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n}+i^n\frac{\log n}{n}$.

2. 用比率判别法证明下列幂级数中的每一个的收敛半径是 1.（在每一种情况下相邻项之比当$|z|<1$, 时将趋近于一个小于 1 的极限，当$|z|>1$时，将趋近于∞或一个大于 1 的极限.）

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2^{-n})z^n$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}2^nz^{n!}$.

3. 用根值判别法(习题二十二，7)求下列各幂级数的收敛半径.

(i) $\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\frac{z^3}{2^2}+\frac{z^4}{3^2}+\frac{z^5}{2^3}+\frac{z^6}{3^3}+\cdots$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{n^n}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n!}$.

4. 根值判别法至少在理论上总可以用来求幂级数的收敛半径. 实际上, 对于情况的仔细分析可导出关于收敛半径的一个公式, 即所谓“柯西-哈达玛公式”. 首先假定数$\sqrt[n]{|a_n|}$的集合是有界的.

   (a) 应用习题二十二, 7 证明: 如果$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|<1$, 则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$收敛.

   (b) 并证明当$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|>1$时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$具有无界的项.

   (c) (a)和(b)表明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径是$1\Big/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (其中“1/0”意味着“∞”). 为了完成该公式, 当所有$\sqrt[n]{|a_n|}$的集合无界时, 定义$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$. 证明在这种情况下$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$对于$z\neq 0$发散, 从而收敛半径是0(它可以看做是“1/∞”).

5. 考察下边的三个来自第题2的级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}z^n.$$

证明第一个级数在单位圆上处处收敛; 第三个级数在单位圆上无一处收敛; 而第二个级数至少对于单位圆上的一个点收敛且至少对于单位圆上的一个点发散.

6. (a) 证明对于所有复数z和w, 有$e^z\cdot e^w=e^{z+w}$. (你只要仿照习题十

七，35 的有关部分.）

(b) 证明对于所有的复数 z 和 w，有

$$\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$$

和 $$\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w.$$

7. (a) 证明每个绝对值为 1 的复数都可以对于某个实数 y 写为 e^{iy}.

(b) 证明关于实数 x 和 y 有 $|e^{x+iy}|=e^{x}$.

8. (a) 证明 exp 取得除 0 以外的每个复数值.

(b) 证明 sin 取得每个复数值.

9. (a) 证明复值函数 $f=u+iv$ 满足方程

$$(*)\ f^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_0f=0^{①}$$

的必要和充分条件是 u 和 v 都满足此方程. 提示：应用习题二十五，9.

(b) 证明如果 $a=b+ci$ 是方程

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

的一个复数根，则 $f(x)=e^{bx}\sin cx$ 和 $f(x)=e^{bx}\cos cx$ 都是 (*) 的解.

10. (a) 证明 exp 在 $\mathbf{C}$ 上不是一对一的.

(b) 给定 $w\neq 0$，证明当且仅当 $z=x+iy$ 适合 $x=\log|w|$（这里 log 表示实的对数函数），且 y 是 w 的一个幅角时才有 $e^z=w$.

*(c) 证明不存在对非零复数定义的连续函数 log，使得对于一切 $z\neq 0$ 有 $\exp(\log(z))=z$.（证明 log 甚至对于 $|z|=1$ 也不能连续地被定义.）因为没有一种方法定义连续的对数函数，所以我们不能说一个复数的对数，而只能说"关于 w 的一个对数"，意思是指适合 $e^z=w$ 的无穷多个 z 中的一个数.

(d) 求关于 i 的所有对数.

(e) 求 i^i 的一切值，亦即 e^{iz} 的一切值，其中 z 是 i 的一个对数.（其答案将是实数.）

(f) 证明 $(1^i)^i$ 具有无穷多个可能值，而 $1^{i\cdot i}$ 则仅有一个值.

11. (a) 对于实数 x 证明我们能够选取 $\log(x+i)$ 和 $\log(x-i)$ 为

$$\log(x+i)=\frac{1}{2}\log(1+x^2)+i\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right),$$

---

① 译注：a_k 应假定为实数.

$$\log(x-i)=\frac{1}{2}\log(1+x^2)-i\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right).$$

$\left(\text{注意到当 } x\neq 0 \text{ 时} \frac{\pi}{2}-\arctan x=\arctan 1/x \text{ 将会是有帮助的.}\right)$

(b) 表示式

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

形式地产生出

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2i}[\log(x-i)-\log(x+i)].$$

试应用(a)验证这个解答和通常的答案是符合的.

12. (a) 设$\{a_n\}$为一复数序列, 如果

$$\lim_{m,n\to\infty}|a_m-a_n|=0,$$

则称 $\{a_n\}$ 为**柯西序列**. 假定 $a_n=b_n+ic_n$, 其中 b_n 和 c_n 是实数. 证明$\{a_n\}$是柯西序列的必要充分条件是$\{b_n\}$和$\{c_n\}$为柯西序列.

(b) 证明每个复数柯西序列都收敛.

(c) 不用关于实级数的定理而直接证明: 绝对收敛的级数是收敛的, 且其任何重排具有同一个和. (应用关于实级数之相应定理的证法是允许的, 而且实际上也是适当的.)

13. 通过写出 $\cos n\theta=(e^{in\theta}+e^{-in\theta})/2$, 并将所得的几何级数求和, 然后用 $e^{-i\theta/2}$ 乘上边和下边, 证明公式

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

14. 设$\{a_n\}$为斐波纳奇序列, $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$.

(a) 如果 $r_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明 $r_{n+1}=1+\frac{1}{r_n}$.

(b) 证明 $r=\lim_{n\to\infty}r_n$存在, 且 $r=1+\frac{1}{r}$. 由此断言 $r=(1+\sqrt{5})/2$.

(c) 证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 具有收敛半径 $2/(1+\sqrt{5})$. (应用本章中未证明的一些定理, 以及由习题 二十三, 8 中得出的

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = -1/(z^2+z-1)$$

这个事实，我们能够预言其收敛半径是 $z^2+z-1=0$ 的根中最小的那个绝对值；因为其根为 $(-1\pm\sqrt{5})/2$，所以收敛半径应是 $(-1+\sqrt{5})/2$。注意：这个数实际上等于 $2/(1+\sqrt{5})$。)

15. 因为 $(e^z-1)/z$ 可以写成在 0 处非零的幂级数 $1+z/2!+z^2/3!+\cdots$，由此推出如果当 $z\neq 0$ 时 $g(z)=z/(e^z-1)$ 而 $g(0)=1$，则 g 在某个围绕 0 的圆内是可微的。于是由本章中未证明的那个定理推出有一个具有非零收敛半径的幂级数

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

我们还能预告其收敛半径是 2π，因为使得 $e^z-1=0$ 的数 $z=2k\pi i$ 中最小的绝对值是 2π。这儿出现的数 b_n 称为**贝努利数**①。

(a) 显然 $b_0=g(0)=1$。现在证明：

$$\frac{z}{e^z-1} = -\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1},$$

$$\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1} = -\frac{e^z+1}{e^z-1},$$

并导出：

$$b_1 = -\frac{1}{2};\quad b_n=0,\ \text{当 } n>1 \text{ 为奇数时}.$$

(b) 通过求等式

$$z=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}z^k\right)\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

中右边的 z^n 的系数证明当 $n>1$ 时有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}b_i=0.$$

这个公式允许我们以其前面的各 $b_i(i\leqslant k-1)$ 计算任一 b_k，并证

① 有时称数 $B_n=(-1)^{n-1}b_{2n}$ 为贝努利数，这是由于当 $n>1$ 且是奇数时 $b_n=0$（见(a)）并由于数 b_{2n} 在符号上是交错的，虽然我们不证明它。这一名称的其他变体也在使用着。

明它们中的每一个都是有理数. 计算下列各数:

$$b_2=\frac{1}{6},\quad b_4=-\frac{1}{30},\quad b_6=\frac{1}{42},\quad b_8=-\frac{1}{30}.$$

中的两个或三个.

*(c) 部分(a)证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n)!}z^{2n}=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

$$=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}.$$

以 $2iz$ 代替 z 并证明

$$z\cot z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n)!}(-1)^n2^{2n}z^{2n}.$$

*(d) 证明

$$\tan z=\cot z-2\cot 2z.$$

*(e) 证明

$$\tan z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)z^{2n-1}.$$

(这个级数关于 $|z|<\pi/2$ 收敛.)

16. 贝努利数在一个最好用某种记号形式地介绍的定理中起着重要的作用. 让我们用 D 来表示"微分算子", 即 Df 表示 f'. 则 D^kf 将意味着 $f^{(k)}$ 而 e^Df 则意味着 $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}/n!$ (这个级数在一般场合当然是没有意义的, 但当 f 譬如说是一个多项式函数时它有意义). 最后, 设 Δ 表示"差分算子", 对它有 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$. 现在不管收敛性的问题, 由泰勒定理就得到

$$f(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}x}{n!},$$

或

$$(*)\ f(x+1)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!};$$

我们可以用符号将这写为$\Delta f=(e^D-1)f$，其中1是"恒等算子"。甚至可以更符号化地将它写为$\Delta=e^D-1$，该式暗示

$$D=\frac{D}{e^D-1}\Delta.$$

于是我们显然应有

$$D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}D^k\Delta,$$

亦即

$$(**)\ f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(x+1)-f^{(k)}(x)].$$

这种形式上的东西可取之处在于它起作用！

(a) 证明当f是多项式函数时（$**$）真正成立（在这种情况下无穷和实际上是有限和）。提示：将（$*$）应用于$f^{(k)}$求出一个关于$f^{(k)}(x+1)-f^{(k)}(x)$的公式；然后应用第15题(b)中的公式求($**$)右边的$f^{(j)}(x)$的系数。

(b) 由($**$)推导出

$$f'(0)+\cdots+f'(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(n+1)-f^{(k)}(0)].$$

(c) 证明关于任一多项式函数g我们有

$$g(0)+\cdots+g(n)=\int_0^{n+1}g(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k!}[g^{(k-1)}(n+1)-g^{(k-1)}(0)].$$

(d) 应用这个式子于$g(x)=x^p$证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1}n^{p-k+1}.$$

用$b_1=-\frac{1}{2}$这一事实证明

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\sum_{k=2}^{p}\frac{b_k}{k}\binom{p}{k-1}n^{p-k+1}.$$

这个公式的前十个实例已在习题二，6中写出过，它们是作为发现一般模式的启示而提供的。现在看来这也许是一种不自然的

暗示，但贝努利数的确就是以这种方式发现的！在写出这10个公式之后，贝努利便(在他的死后出版的著作 *Ars Conjectandi* 中，1713)宣称："凡是就它们的规律性考查这个序列的人们都能延续这张表."然后他写出了上边的公式，全然没有提供其证明而只是指出其系数 b_k (他简单地用 $A, B, C, \cdots$ 表示它们)满足第15题(b)中的等式. 这些数和关于 $z/(e^z-1)$ 的幂级数中的系数之间的关系是欧拉发现的.

*17. 第16题(c)中的公式能推广到 g 不是多项式函数的情形；其无限和应代之以有限和加余项的形式. 为了求出关于余项的一个表示式，引入某些新的函数将是有用的.

(a) **贝努利多项式** φ_n 定义为

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}x^k.$$

其前三个是

$$\varphi_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$\varphi_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$\varphi_3(x)=x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{x}{2}.$$

证明

$\varphi_n(0)=b_n$,

$\varphi_n(1)=b_n$, 当 $n>1$ 时,

$\varphi_n'(x)=n\varphi_{n-1}(x)$,

$\varphi_n(x)=(-1)^n\varphi_n(1-x)$, 当 $n>1$ 时.

提示：证明最后一个等式时，从 $n=2$ 出发用对 n 的归纳法.

(b) 设 $R_N^k(x)$ 是关于 $f^{(k)}$ 在区间 $[x, x+1]$ 上的泰勒公式中的余项，即

$$(*)\quad f^{(k)}(x+1)-f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{f^{(k+n)}(x)}{n!}+R_N^k(x).$$

证明

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(x+1)-f^{(k)}(x)]-\sum_{k=0}^{N}\frac{b_k}{k!}R_{N-k}^k(x).$$

提示：仿照第 16 题(a)．注意 R 的下标是 $N-k$.

(c) 应用余项的积分形式证明

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{b_k}{k!}R_{N-k}{}^{k}(x)=\int_x^{x+1}\frac{\varphi_N(x+1-t)}{N!}f^{(N+1)}(t)dt.$$

(d) 推导"欧拉-马克劳林求和公式"：

$$\begin{aligned}&g(x)+g(x+1)+\cdots+g(x+n)\\&=\int_x^{x+n+1}g(t)dt+\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{k!}[g^{(k-1)}(x+n-1)\\&\qquad-g^{(k-1)}(x)]+S_N(x,n),\end{aligned}$$

其中

$$S_N(x,n)=-\sum_{j=0}^{n}\int_{x+j}^{x+j+1}\frac{\varphi_N(x+j+1-t)}{N!}g^{(N)}(t)dt.$$

(e) 设 ψ_n 是周期为 1 的周期函数，对 $0\leqslant t<1$ 它满足 $\psi_n(t)=\varphi_n(t)$. ((a)暗示当 $n>1$ 时 ψ_n 是连续的，因为这时 $\varphi_n(1)=\varphi_n(0)$．当 n 是偶数时，ψ_n 为偶函数，n 是奇数时，ψ_n 是奇函数.)证明

$$S_N(x,n)=-\int_x^{x+n+1}\frac{\psi_N(x-t)}{N!}g^{(N)}(t)dt$$

$$\left(=(-1)^{N+1}\int_x^{x+n+1}\frac{\psi_N(t)}{N!}g^{(N)}(t)dt,\ 当\ x\ 为整数时\right).$$

和泰勒定理中的余项不同，余项 $S_N(x,n)$ 通常不满足 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N(x,n)=0$. 这是因为贝努利数和贝努利函数变大得非常快(虽然从前几个例子看不出这一点)．不过，由求和公式仍然常常能得到重要的信息．其一般情形已在专题研究("渐近级数")的范围内很好地讨论过，下一题则表明一个特别重要的例子.

**18. (a) 应用 $N=2$ 的欧拉-马克劳林公式证明

$$\log 1+\cdots+\log(n-1)=\int_1^n\log t\,dt-\frac{1}{2}\log n+\int_1^n\frac{\psi_2(t)}{2t^2}dt.$$

(b) 证明

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right)=1+\int_1^n\frac{\psi_2(t)}{2t^2}dt.$$

(c) 说明广义积分 $\beta=\int_1^\infty\psi_2(t)/2t^2dt$ 为什么存在，并证明如果

$\alpha=e^{\beta}$，则

$$\log\left(\frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n}}\right)=-\int_n^{\infty}\frac{\psi_2(t)}{2t^2}dt.$$

(d) 习题十八，26(d)证明了

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

应用(c)证明

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2 n^{2n+1}e^{-2n}2^{2n}}{\alpha(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\sqrt{n}},$$

并断言 $\alpha=\sqrt{2\pi}$.

(e) 证明$|\varphi_2(x)|$对$[0,1]$内的x的最大值是$\frac{1}{6}$，因此

$$\left|\int_n^{\infty}\frac{\psi_2(t)}{2t^2}dt\right|\leqslant\frac{1}{12n}.$$

由此作出结论：

$$\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n-1/12n}\leqslant n!\leqslant\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n+1/12n}.$$

第 18 题的最后结果——斯特林公式的一种强式，证明 $n!$ 在下述意义上近似地等于$\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}$，即当 n 较大时这个式子与 $n!$ 相差一个和$n!$相比很小的量．例如，对 $n=10$ 我们得到 3598696，以此替代 3628800，其误差$<1\%$.

斯特林公式的一个更一般的形式说明了求和公式的"渐近"特征．在第 18 题中所应用的同一论证现在可用来证明对于 $N\geqslant2$ 我们有

$$\log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}}\right)=\sum_{k=2}^{N}\frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}}\pm\int_n^{\infty}\frac{\psi_N(t)}{N!\,t^N}dt.$$

因为 ψ_N 是有界的，所以我们可以得出形如

$$\left|\int_n^{\infty}\frac{\psi_N(t)}{N!\,t^N}dt\right|\leqslant\frac{M_N}{n^{N-1}}$$

的估计．如果N大，常数 M_N 也大；但对非常大的 n 而言，因子 n^{1-N} 将使积非常小．因此，表示式

$$\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}\cdot\exp\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}}\right)$$

当 n 小时也许是关于 $n!$ 的一个非常坏的近似值，但对于大 n(多大取决于 N)

它将是一个非常好的近似值(多好也取决于 N).

选题解答

1. (i) 因为$\left|\frac{(1+i)^n}{n!}\right| \leqslant \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$, 且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$收敛, 所以原级数绝对收敛.

(iii) 因为其实项形成级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\cdots$$

而其虚项形成级数

$$i\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right),$$

所以原级数收敛,但不绝对收敛.

(v) 因为其实项形成级数

$$\frac{\log 3}{3}+2\frac{\log 4}{4}+\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}+2\frac{\log 8}{8}+\frac{\log 9}{9}+\cdots$$

发散, 所以原级数发散.

2. (i) 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}/(n+1)^2}{|z|^n/n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|z|=|z|$$

对于$|z|<1$是<1, 但当$|z|>1$时则>1.

(iii) 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}}{|z|^n}=|z|$$

当$|z|<1$时<1, 而当$|z|>1$时>1.

(v) 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|z|^{(n+1)!}}{2^n|z|^{n!}}=\lim_{n\to\infty}2|z|^{(n+1)!-n!}$$

对于$|z|<1$为 0, 但对$|z|>1$则为∞.

3. (i) 极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{|z|^{2n}}{3^n}}=\frac{|z|}{\sqrt{3}} \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{|z|^{2n+1}}{2^{n+1}}}=\frac{|z|}{\sqrt{2}}$$

当$|z|<\sqrt{2}$时皆<1, 所以该级数对于$|z|<\sqrt{2}$绝对收敛, 但级数对于$|z|>\sqrt{2}$不绝对收敛, 因此其收敛半径为$\sqrt{2}$.

(iii)[①]

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n|z|^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{2}\sqrt[n]{n}=\frac{|z|}{2},$$

所以该级数当 $|z|<2$ 时绝对收敛，而当 $|z|>2$ 时不绝对收敛，因而其收敛半径为 2.

(v) 极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n|z|^{n!}}=2\lim_{n\to\infty}|z|^{(n-1)!}$$

当 $|z|<1$ 时是 0，而当 $|z|>1$ 时为∞，所以级数的收敛半径为 1.

① 译注：原文题误，解错，校时据原题补做。

第五部分 结束语

有个最聪明的建筑师，
他发明了一种修房子的新法子，
从房顶盖起，
向下施工
最后打地基。

乔纳森·斯威夫特

第二十七章　域

在本书中，为定义所有重要概念已作了至诚的努力，甚至连“函数”这样的一些经常认为一个直观的定义就已经足够了的词也给下了定义．但是，作为本书中两个主要角色的Q和R，却只是被命名而从未下过定义．对未曾定义过的东西决不可能透彻地分析，而“性质”P1—P13必须看成是关于数的一些假设，而不是定理．不过，我们已经特意避免了“公理”一词，且对P1—P13的逻辑地位将在本章中更仔细地加以审查．

象Q和R一样，集合N和Z也未定义过．诚然，关于这四者的某些论述曾在第二章中写出过，但那些粗略的描述跟定义相差甚远．例如，说N由1，2，3等等组成，只不过是命名了N的某些元素而没有使它们同一(因此“等等”是无济于事的)．自然数是能够定义的，但其程序是复杂的且对于本书的剩余部分而言也是不很适宜的．建议读物的目录中包含有关于这个问题的参考书，也包含有当我们希望从基础的逻辑出发去发展微积分时所需要的其他一些步骤的有关参考书．这个进程的下一步将从用N定义Z开始，进而用Z定义Q．这一进程终归会得出某个有明确定义的集合Q，某种明确地定义了的运算＋和•，以及作为定理的性质P1—P12．这个进程的最后一步是以Q来构造R．这最后的一个构造是我们所关心的．假定Q已经定义，且对于Q P1—P12已被证明，我们最终将定义R并对R证明所有的P1—P13．

我们证明P1—P13的目的意味着我们不仅必须定义实数，而且也必须定义实数的加法和乘法．实际上，实数只是当它作为一

个与这些运算合起来的集合时才有意思：具有决定意义的是关于加法和乘法实数的性质如何，至于实数本身实际上可以是什么倒是无关紧要的．借用一个所谓"域"的概念，这个断言就可以用一个很有意义的数学方法表示出来，域的概念作为特殊情况包括了本书中的三个重要的数系．近代数学的这个特别重要的抽象，合并了 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$，和 $\mathbf{C}$ 共有的性质 P1—P9．所谓域是（无论哪一种对象的）集合 F 连同两个定义在 F 上的"二元运算" $+$ 和 $\cdot$（亦即使 F 中的元素 a 和 b 与 F 中的另外两个元素 $a+b$ 和 $a\cdot b$ 相联系的两个法则），关于两个运算 $+$ 和 $\cdot$ 要满足下列条件：

(1) 对于 F 中的一切 a, b 和 c，有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

(2) F 中存在某个元素 $\mathbf{0}$ 使得

(i) 对 F 中的所有 a，有 $a+\mathbf{0}=a$.

(ii) 对 F 中的每一个 a，存在 F 中的某个元素 b 使

$$a+b=\mathbf{0}.$$

(3) 对于 F 中的所有 a 和 b，有

$$a+b=b+a.$$

(4) 对于 F 中的所有 a, b 和 c，

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

(5) F 中存在某一元素 $\mathbf{1}$，使得 $\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$ 且

(i) 对 F 中的一切 a 有 $a\cdot\mathbf{1}=a$,

(ii) 对 F 中每个 $a\neq\mathbf{0}$ 的 a，有 F 中的某一元素 b 使

$$a\cdot b=\mathbf{1}.$$

(6) 对于 F 中的一切 a 和 b，有 $\quad a\cdot b=b\cdot a$.

(7) 对于 F 中的一切 a, b 和 c,

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

域的常见的例子，正如已经指出的，是 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$，并且 $+$ 和 $\cdot$

就是常见的运算+和·. 解释这些为什么是域大概是不必要的，但总而言之其解释是非常简单的. 当$+$和$\cdot$理解为通常的+和·时，法则(1),(3),(4),(6),(7)只不过是P1, P4, P5, P8, P9的重述；起着$\mathbf{0}$和$\mathbf{1}$的作用的元素是数0和1(这说明为什么要选用记号$\mathbf{0}$和$\mathbf{1}$)；且(2)或(5)中的元素b则分别是$-a$或a^{-1}.（为此，在任意的域F中我们用$-a$来记使$a+(-a)=\mathbf{0}$的元素，而对$a\neq\mathbf{0}$用a^{-1}来表示使$a\cdot a^{-1}=\mathbf{1}$的元素.）

除了$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$和$\mathbf{C}$之外，还有另外几个容易描述的域. 一个例子是关于$\mathbf{Q}$内的a, b由一切形如$a+b\sqrt{2}$的数所组成的集合F_1. 其运算$+$和$\cdot$还是关于实数的通常运算+和·. 有必要指出这些运算实际上的确产生出F_1的新元素：

$$\begin{aligned}&(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\\&=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},\ \text{它在}F_1\text{内;}\\&(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})\\&=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2},\text{它也在}F_1\text{内.}\end{aligned}$$

关于域的条件(1),(3),(4),(6),(7)，对于F_1是明显的：既然这些条件对于所有实数都成立，它们无疑对于一切形如$a+b\sqrt{2}$的实数也是成立的. 因为数$0=0+0\sqrt{2}$在F_1内，且对于F_1中的$\alpha=a+b\sqrt{2}$而言，F_1中的数$\beta=(-a)+(-b)\sqrt{2}$满足$\alpha+\beta=0$，所以条件(2)成立. 同样地，因为$1=1+0\sqrt{2}$在F_1内，所以(5i)也满足了. 唯一稍微困难一点的是(5ii)的验证. 如果$a+b\sqrt{2}\neq0$，则

$$(a+b\sqrt{2})\cdot\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=1;$$

所以必须证明$1/(a+b\sqrt{2})$在F_1内. 因为

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a-b\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{(-b)}{a^2-2b^2}\sqrt{2}.$$

(用 $a-b\sqrt{2}$ 作除数是正当的，因为仅当 $a=b=0$ 时才能有 $a-b\sqrt{2}=0$(由于$\sqrt{2}$是无理数)，而 $a=b=0$ 的情况已被假设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$ 所排除.)所以 $1/(a+b\sqrt{2})$的确在 F_1 内.

域的下一个例子 F_2 在某一方面看来是相当简单的：它只包含两个元素，我们也可以用 0 和 1 来表示它们. 其运算$+$和$\cdot$由下面的两个表来描述：

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

条件(1)—(7)的验证是简单的，一一核对就是了. 例如，条件(1)可通过核对由使 a, b, $c=0$ 或 1 所得出的 8 个等式来加以证明. 注意，在这个域中 $1+1=0$；此等式也可以写作 $1=-1$.

我们关于域的最后一个例子是很蠢笨的：F_3 由 $\mathbf{R}$ 中的 a 所形成的所有数对(a,a)组成，且$+$和$\cdot$定义为

$$(a,a)+(b,b)=(a+b,a+b),$$
$$(a,a)\cdot(b,b)=(a\cdot b,a\cdot b).$$

(右边出现的$+$和$\cdot$是通常的对于$\mathbf{R}$的加法和乘法.)关于 F_3 是一个域的证明留给读者作为一个简单的练习.

域的性质的详细研究本身就是一个学科，但就我们的目的而论，域只是提供了一种用来以最经济的方法讨论数的性质的理想的结构. 例如，在第一章中对于"数"所导出的 P1—P9 的种种推论实际上对任一域都是成立的；特别是它们对于域 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 是正确的.

注意，$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 的某些共同性质不是对于一切域都适用的.

例如，等式 $1+1=0$ 在某些域中是可能成立的，因此 $a-b=b-a$ 未必含有 $a=b$ 的意思．对于域C而言，$1+1\neq 0$ 这一断言已由C的描述推导出来；然而对于域Q和R来说，这个断言则是由一些别的性质推出来的，而在关于域的诸条件当中没有与这些性质相类似的东西．有一个有关的概念的确用到了这些性质．一个**有序域**是指(具有运算 $+$ 和 $\cdot$ 的)域 F 连同 F 的一个具有下列性质的某一子集P（“正”元素）：

(8) 对于 F 内的所有 a，下面三种情况中的一种且只有一种是真的：

(i) $a=0$，

(ii) a 在P内，

(iii) $-a$ 在P内．

(9) 如果 a 和 b 都在P内，则 $a+b$ 在P内．

(10) 如果 a 和 b 都在P内，则 $a\cdot b$ 在P内．

我们已经看到域C不可能作成一个有序域．仅具有两个元素的域 F_2，同样不能作成一个有序域：事实上，应用条件(8)于 $1=-1$ 证明 1 必在P内；而条件(9)则暗含有 $1+1=0$ 在P内的意思，这与(8)相矛盾．另一方面，由 a, b 在Q内的一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数组成的域 F_1 必定可作成一有序域：设P为是正实数(在通常的意义上)的所有 $a+b\sqrt{2}$ 的集合．域 F_3 也可以作成一个有序域；P的描述留给你去做．

对于任意的有序域自然要引入相应于对Q和R用过的记号：我们规定

$a>b$，　如果 $a-b$ 在P内，

$a<b$，　如果 $b>a$，

$a\leqslant b$，　如果 $a<b$ 或 $a=b$，

$a\geqslant b$，　如果 $a>b$ 或 $a=b$．

应用这些定义我们可以对任一有序域F重新作出第七章中的那些定义：

设A为F的元素的一个集合，如果F内有某个x使得对于在A中的一切a有$x\geqslant a$，则称集合A是**上方有界的**．任一这样的x都称为A的一个**上界**．如果F的元素x是A的一个上界，且对于F内是A的上界的每个y都有$x\leqslant y$，则称x为A的**最小上界**．

最后，可以陈述一个和关于$\mathbf{R}$的性质P13类似的性质；这就引导出本章中最后的一个概念：

完备的有序域是指这样一个有序域，在其中每个上方有界的非空集合都具有最小上界．

对域的研究似乎使我们远离了构造实数的目标．然而，我们现在却持有一个系统地陈述这一目标的易于理解的方法．在剩下的两章中将要回答的问题有两个：

1．有没有完备的有序域？

2．是否只有一个完备的有序域？

关于这些研究，我们的出发点将是假定为一个有序域的$\mathbf{Q}$，它包含有$\mathbf{N}$和$\mathbf{Z}$作为其子集．在一个关键性的地方，有必要假定关于$\mathbf{Q}$的另一事实：

设x为$\mathbf{Q}$的一个适合$x>0$的元素，则对于$\mathbf{Q}$内的任一y都有某个在$\mathbf{N}$内的n使$nx>y$．

这个假设（它断言有理数具有实数的阿基米德性质）不是由有序域的别的性质推出来的（明确地证明这一点的实例见[17]）．对我们来说重要的是，当$\mathbf{Q}$明显地构造后，性质P1—P12就会作为定理出现，这个附加的假设也是如此；要是我们真的从头着手的话，对$\mathbf{Q}$的种种假设就会是没有必要的．

习　题

1. 设F是集合$\{0,1,2\}$并用下面的表来定义F上的运算$+$和$\cdot$.（构造该表的规则如下：按通常的方法相加或相乘，然后减去3的最高可能倍数；这样，因为$2\cdot 2=4=3+1$，所以$2\cdot 2=1$.）证明F是一个域，并证明它不可能作成一个有序域.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2. 现在假设我们试图构造一个具有元素0, 1, 2, 3的域F，使它具有如在前例中定义的运算$+$和$\cdot$，即先按通常的方法相加或相乘，然后减去4的最高可能倍数. 证明这F不是域.

3. 设$F=\{0, 1, \alpha, \beta\}$，并用下面的表定义$F$上的运算$+$和$\cdot$. 证明$F$是一个域.

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

·	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

4. (a) 设F是一个域，在其中$1+1=0$. 证明对于所有的a有$a+a=0$（这也可以写为$a=-a$）.

   (b) 假定对于某个$a\neq 0$有$a+a=0$，证明$1+1=0$（从而对一切b有$b+b=0$）.

5. (a) 证明在任一域中对于所有的自然数m和n我们有

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{m\text{次}}\cdot\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\text{次}}=\underbrace{1+\cdots+1}_{mn\text{次}}.$$

   (b) 假设在域F中关于某个自然数m我们有

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{m\text{次}} \quad 0$$

证明具有这个性质的最小的m必定是一个素数(这个素数称之为F的特征).

6. 设F是只有有限多个元素的任一域.

 (a) 证明必有不同的自然数m和n适合:

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{m\text{次}}=\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{次}}.$$

 (b) 推断有某个自然数k适合

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{k\text{次}}=0.$$

7. 设a, b, c和d为域F的元素,且满足$a\cdot d-b\cdot c\neq 0$. 证明方程组

$$a\cdot x+b\cdot y=\alpha,$$
$$c\cdot x+d\cdot y=\beta,$$

对于x和y是可解的.

8. 设a是域F中的一个元素,a的"平方根"是F的满足$b^2=b\cdot b=a$的元素b.

 (a) 0具有多少个平方根?

 (b) 设$a\neq 0$. 证明a有两个平方根,除非$1+1=0$,而在该情况下a仅有一个平方根.

9. (a) 研究方程$x^2+b\cdot x+c=0$,其中b和c都是域F中的元素. 假定$b^2-4\cdot c$在F中有一平方根r,证明$(-b+r)/2$是这个方程的一个解.

 (b) 在课文中提及的域F_2中,两个元素显然都有平方根. 另一方面,容易验证其两个元素都不满足方程$x^2+x+1=0$. 因此,(a)中的某个细节必是不对的,它是什么?

10. 设F是一个域,而a是F的一个没有平方根的元素. 这一题说明应如何去构造一个较大的域F',它包含着F且在其中a确有平方根. (这个构造法已在一种特殊情况,即$F=\mathbf{R}$且$a=-1$时实施过;这种特殊情况将会在此题整个过程中引导你.)设F'由x和y在F内的所有元素对(x, y)组成. 如果在F上的运算是$+$和$\cdot$,则在F'上的运算$\oplus$和$\odot$定义如下:

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w),$$

$$(x, y) \odot (z, w) = (x \cdot z + a \cdot y \cdot w, y \cdot z + x \cdot w).$$

(a) 证明带有运算$\oplus$和$\odot$的 F' 是一个域.

(b) 证明:

$$(x, 0) \oplus (y, 0) = (x + y, 0),$$

$$(x, 0) \odot (y, 0) = (x \cdot y, 0),$$

因此我们可以约定将$(x, 0)$简写为 x.

(c) 在 F' 中求 $a = (a, 0)$的一个平方根.

11. 设F是实数的所有四数组(w, x, y, z)的集合. 定义$+$和$\cdot$ 为:

$$(s, t, u, v) + (w, x, y, z) = (s + w, t + x, u + y, v + z),$$

$$(s, t, u, v) \cdot (w, x, y, z) = (sw - tx - uy - vz, sx + tw + uz - vy,$$
$$sy + uw + vx - tz, sz + vw + ty - ux).$$

(a) 证明F满足关于域的除(6)以外的一切条件. 代数虽则常常会变得丰富多采,但唯一需要一点思考的只是乘法逆元素的存在.

(b) 习惯上记

$(0, 1, 0, 0)$为 i,

$(0, 0, 1, 0)$为 j,

$(0, 0, 0, 1)$为 k.

求 i, j 和 k 两两的所有 9 个乘积. 其结果将详细表明条件(6)无疑是不成立的. 这个"非对称域——体"F 称为**四元体**.

第二十八章 实数的构造

本章必然要包含的大量令人厌倦的工作，因采用了一种真正第一流的思想方法而得以解脱．为了证明完备的有序域的存在，我们必须明确地详细描述它；验证关于有序域的条件(1)—(10)将是一个直接的严峻考验，但对于域本身，即其中元素的描述则的确是巧妙的．

有理数的集合却是由我们随意处理的，并有必要从这种原材料出发产生出最终称之为实数的域．对于未入门的人来说，这似乎一定是全然无望的——如果只有有理数是已知的，那么其他的数从何而来呢？但现在我们已有足够的经验领会到情况不象偶然想到的那样没有希望．在我们的构造中应采用的策略，已在定义函数和复数时有效地使用过．我们不打算去确定这些概念的“真实面目”，而满足于一个足以描写它们的定义，此定义可以完全确定它们的数学性质．

定义实数的一个类似的打算要求用有理数来描写实数．一个实数应当由小于它的有理数的集合完全确定这一观察，提出了一种惊人地简单且很有吸引力的可能性：实数可以(而实际上终将)描写成一个有理数的集合．然而，为了使这个打算能够实施，就必须找出某种不提及实数的描述“小于实数的有理数的集合”的方法，因为实数仍然只不过是我们的数学想象力的启发式的臆造．

如果A被看做是小于实数α的有理数的集合，则A就应当具有下列性质：如果x在A内且y是一个满足$y<x$的有理数，则y也在A内．除了这个性质之外，集合A还应具有一些其他的性质．因为必须存在某个有理数$x<\alpha$，所以集合A必须是非空的．同样，

因为必须存在某个有理数 $x>\alpha$，所以集合 A 必须不是 $\mathbf{Q}$ 的全体．最后，如果 $x<\alpha$，则必须存在另一个满足 $x<y<\alpha$ 的有理数 y，即 A 必须不含有一个最大的数．

如果我们暂且将实数看做是已知的，那么便不难验证（习题八，17）具有这些性质的集合 A 的确是小于某个实数 α 的有理数的集合．既然实数不久将被丢弃，所以你的证明（如果你提供了的话）应该仅仅看成是这些步骤的非正式的注释．然而，它将有助于使你确信我们不是没有注意到集合 A 的任何决定性的性质．好象没有再犹豫的理由了．

定义

> **实数**是指具有下列四个性质的有理数的集合 α：
>
> (1) 如果 x 在 α 内且 y 是一个适合 $y<x$ 的有理数，则 y 也在 α 内．
>
> (2) $\alpha\neq\varnothing$．
>
> (3) $\alpha\neq\mathbf{Q}$．
>
> (4) α 内没有最大的元素；换句话说，如果 x 在 α 内，则在 α 内有某个 y 适合 $y>x$．
>
> 所有实数的集合被记为 $\mathbf{R}$．

正是为了使你回想一下我们的定义后面的基本原理，这里提供实数的一个明显的例子：

$$\alpha=\{x \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 内}: x<0 \text{ 或 } x^2<2\}.$$

显然 α 最终将是一个称为 $\sqrt{2}$ 的实数，但证明 α 确实是一个实数并非一个纯粹平凡的练习．这样的练习的全部要点是只应用关于 $\mathbf{Q}$ 的事实来证明它；其难点将是验证条件(4)，但这已经作为一个习题在上一章中出现(找出它乃是你的责任)．注意，这儿的条件(4)虽然很累赘，但为了避免含糊起见实在是必不可少的；没有它的话，

$$\{x \text{ 在Q内: } x<1\}$$

和

$$\{x \text{ 在Q内: } x\leqslant 1\}$$

两者就都可以考虑作为"实数1".

在我们的定义中从A转移到α表明既有概念上的又有记号上的考虑.今后,按照定义实数是有理数的集合.尤其是这意味着有理数(Q的元素)不是实数;而是每个有理数x有一个实数的天然对应物,即$\{y$ 在Q内: $y<x\}$. 在完成实数的构造之后,我们可以在心里抛弃Q的元素并约定Q在今后将表示这些特殊的集合.然而,在当前为了同时处理有理数,实数(有理数的集合)甚至实数的集合(有理数的集合的集合),它将是必需的. 某些混淆或许是不可避免的,但适当的记法将使其保持在最低限度. 有理数将用小写的罗马字母(x, y, z, a, b, c)来表示,而实数则用小写的希腊字母(α, β, γ)来表示;大写的罗马字母(A, B, C)将用来表示实数的集合.

本章余下的部分将致力于给$+$,$\cdot$和关于**R**的**P**下定义,且证明具有这些结构的**R**确是一个完备的有序域.

我们实际上将从**P**的定义开始,甚至在这里还将倒着进行.我们首先定义$\alpha<\beta$;然后,当$+$,$\cdot$和0可利用时我们将把**P**定义为满足$0<\alpha$的所有α的集合,并证明对于**P**必不可少的那些性质;所以要从$<$的定义开始是由于这个概念在我们现在的处理中的简单性:

定义 如果α和β都是实数,则$\alpha<\beta$的意思是α包含在β内(即α的每个元素也是β的一个元素),但$\alpha\neq\beta$.

重述$\geqslant$,$>$,$\leqslant$的定义将是不聪明的,但注意到$\leqslant$现在能够比$<$更简单地来表示则是有趣的;如果α和β都是实数,那么当且仅当α被包含在β内时$\alpha\leqslant\beta$.

如果A是一个有界的实数集合，那么A必须有最小上界则几乎是非常明显的．A中的每个α是有理数的一个集合；如果这些有理数全放入一个集合β内，则β大概就是$\sup A$．在下面定理的证明中我们来验证所有那些未曾提及的细节，其中绝大部分是β为一实数的论断．（我们不去费心给本章中的定理编号，因为它们全部归并为一个大定理：存在完备的有序域．）

定理 如果A是一个实数的集合且$A\neq\varnothing$，并且A还是上方有界的，则A具有一个最小上界．

证明 设$\beta=\{x: x$属于A中的某个$\alpha\}$，则β无疑是一个有理数的集合；关于β是一个实数的证明需要验证四个事实：

(1) 假定x在β内且$y<x$．第一个条件意味着对于A中的某个α，x在α内．因为α是一个实数，所以假定$y<x$暗含着y也在α内．因此y在β内无疑是真的．

(2) 因为$A\neq\varnothing$，所以有某个α在A内．因为α是实数，所以有某个x在α内．这就意味着x在β内，因此$\beta\neq\varnothing$．

(3) 因为A是上方有界的，因此存在某个这样的实数γ使得对于A内的每个α都有$\alpha\leqslant\gamma$．既然γ是一实数，所以存在某个不属于γ的有理数x．现在$\alpha\leqslant\gamma$意味着α包含在γ内，因此对于A中的任何α而言x不在α内也必是真的．这意味着x不在β内，所以$\beta\neq\mathbf{Q}$．

(4) 假设x在β内．则x就在A中的某α之内．因为α不具有一个最大的数，所以存在某一适合$x<y$的有理数y在α内．而这意味着y在β内；于是β肯定不具有一个最大的数．

这四点考察证明β是一个实数．关于β是A的最小上界的证明是更容易的．如果α在A内，则α显然包含在β内；这就意味着$\alpha\leqslant\beta$，因此β是A的一个上界．另一方面，如果γ是A的一个上

界，则对于每个在A内的α都有$\alpha\leqslant\gamma$；这就意味着A内的每个α都包含在γ内，这无疑暗含着β包含在γ内．这又意味着$\beta\leqslant\gamma$；因此β是A的最小上界．▌

$+$的定义既明显又容易，但对它必须补充一个证明，就是这个"明显的"定义完全有意义．

定义 如果α和β是实数，则

$$\alpha+\beta=\{x:\ \text{对于}\alpha\text{内的某个}y\text{和}\beta\text{内的某个}z\text{有}x=y+z\}.$$

定理 如果α和β是实数，则$\alpha+\beta$是实数．

证明 再次需要证明四个事实．

(1) 假定对于在$\alpha+\beta$内的某x有$w<x$．则对于α内的某个y和β内的某个z就有$x=y+z$，这意味着$w<y+z$，从而$w-y<z$．这说明$w-y$在β内(因为z在β内，而β又是一个实数)．因为$w=y+(w-y)$，由此即知w在$\alpha+\beta$内．

(2) 因为$\alpha\neq\varnothing$和$\beta\neq\varnothing$，所以$\alpha+\beta\neq\varnothing$是显而易见的．

(3) 因为$\alpha\neq\mathbf{Q}$和$\beta\neq\mathbf{Q}$，所以存在有理数a和b，a不在α内而b不在β内．于是，α内的任何x都满足$x<a$(因为如果$a<x$，则关于实数的条件(1)将暗含a在α内)；同样，β内的任何y都满足$y<b$．因此对于α内的任何x和β内的任何y有$x+y<a+b$．这表明$a+b$不在$\alpha+\beta$内，所以$\alpha+\beta\neq\mathbf{Q}$．

(4) 如果x在$\alpha+\beta$内，则对于α中的y和β内的z有$x=y+z$．由于在α内有y'满足$y<y'$，且在β内有z'满足$z<z'$；因此$x<y'+z'$且$y'+z'$又在$\alpha+\beta$内．可见$\alpha+\beta$不具有最大的元素．▌

到现在你可能看出这整个过程会多么令人厌倦．每当我们提

到一个新的实数时，我们就必须证明它是一个实数；而这就需要验证四个条件，即使在平凡的场合它们也要求专心致志．对此实在是无法可想（除非你亲自来核实四个条件或许会好一些）．然而，幸好不时出现一些有趣的地方，且我们定理中的某些又会是容易的．特别是，$\mathbf{+}$法的两个性质不会出现问题．

定理 如果α, β和γ都是实数，则

$$(\alpha \mathbf{+} \beta) \mathbf{+} \gamma = \alpha \mathbf{+} (\beta \mathbf{+} \gamma).$$

证明 既然关于所有的有理数x, y和z都有$(x+y)+z=x+(y+z)$，所以$(\alpha \mathbf{+} \beta) \mathbf{+} \gamma$中的每个数也是$\alpha \mathbf{+} (\beta \mathbf{+} \gamma)$中的数，且反之亦然．▌

定理 如果α和β为实数，则 $\alpha \mathbf{+} \beta = \beta \mathbf{+} \alpha$.

证明 留给你做（更容易些）．▌

为了证明$\mathbf{+}$法的其他性质，我们先来定义$\mathbf{0}$．

定义 $\mathbf{0} = \{x \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 内}: x<0\}$.

谢天谢地，$\mathbf{0}$显然是一个实数，且下面的定理也是简单的．

定理 如果α是实数，则 $\alpha \mathbf{+} \mathbf{0} = \alpha$.

证明 如果x在α内且y在$\mathbf{0}$内，则$y<0$，因此$x+y<x$．这暗示有$x+y$在α内．因此$\alpha \mathbf{+} \mathbf{0}$中的每个数也是$\alpha$中的一个数．

另一方面，如果x在α内，则在α内有使$y>x$的有理数y．因为$x=y+(x-y)$，而其中的y在α内且$x-y<0$（从而$x-y$在$\mathbf{0}$内），这就证明x在$\alpha \mathbf{+} \mathbf{0}$内．因此$\alpha$中的每一数又都是$\alpha \mathbf{+} \mathbf{0}$中的数．▌

作为$\mathbf{-}\alpha$的合理的候选者似乎是集合：

$$\{x \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 内}: -x \text{ 不在 } \alpha \text{ 内}\}$$

（因为$-x$不在α内直觉上意味着$-x>\alpha$，所以$x<-\alpha$）．但在某些情形中这个集合甚至会不是实数　虽然实数α不具有最大的元素，但集合

$$\mathbf{Q}-\alpha=\{x \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 内: } x \text{ 不在 } \alpha \text{ 内}\}$$

却可以具有最小元素x_0；当α是这一类实数时，集合$\{x: -x$ 不在 α 内$\}$将具有一个最大的元素$-x_0$。所以必须对$-\alpha$的定义稍作修改，此定义将配备上一个定理出现.

定义 如果α是一个实数，则

$$-\alpha=\{x \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 内: } -x \text{ 不在 } \alpha \text{ 内，但 } -x \text{ 不是 } \mathbf{Q}-\alpha \text{ 的最小元素}\}.$$

定理 如果α是一实数，则$-\alpha$是实数.

证明 (1) 假定x在$-\alpha$内且$y<x$. 则$-y>-x$. 因为$-x$不在α内，所以$-y$也不在α内. 另外，$-y$显然不是$\mathbf{Q}-\alpha$的最小元素，因为$-x$是一个比它更小的元素. 这就证明y在$-\alpha$内.

(2) 因为$\alpha\neq\mathbf{Q}$，所以有某个不在α内的有理数y. 我们可以假定y不是$\mathbf{Q}-\alpha$内的最小的有理数（因为y总是能用$y'>y$所代替）. 因此$-y$在$-\alpha$内. 从而$-\alpha\neq\varnothing$.

(3) 因为$\alpha\neq\varnothing$，所以在α内有某个x. 于是$-x$不可能在$-\alpha$内，从而$-\alpha\neq\mathbf{Q}$.

(4) 如果x在$-\alpha$内，则$-x$不在α内，且存在一个有理数$y<-x$也不在α内. 设z是满足$y<z<-x$的一个有理数，则z也不在α内，且z显然不是$\mathbf{Q}-\alpha$的最小元素. 所以$-z$在$-\alpha$内. 因为$-z>x$，这就证明$-\alpha$不具有最大元素. ▌

证明$\alpha+(-\alpha)=0$不全是直截了当的. 其困难不象你可能猜想的那样是由于在$-\alpha$的定义中那些过分雕琢的细节所引起的. 而是由于我们将需要在上章末提到过的$\mathbf{Q}$的阿基米德性质. 这个性质并不是从P1—P12推出的. 这个性质在证明下述引理时是需要的，而该引理在下一个定理中起着决定性的作用.

引理 设α是一实数，而z是一个正有理数．则在α内存在有理数x(图 1)，和不在α内的有理数y，使$y-x=z$．另外，我们可以设y不是$Q-\alpha$的最小元素．

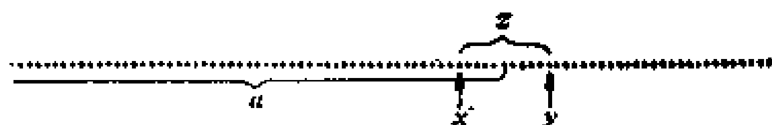


图 1

证明 首先假设z在α内．如果数

$$z, \ 2z, \ 3z, \ \cdots$$

全在α内，则每个有理数将在α内，因为根据上章末的附加假设，每个有理数w都对于某个n满足$w<nz$．这与α是实数的事实相矛盾，故有某个k使$x=kz$在α内而$y=(k+1)z$不在α内．显然$y-x=z$．

另外，如果y碰巧是$Q-\alpha$的最小元素，则设$x'>x$是α的一个元素，并以x'代替x而以$y+(x'-x)$代替y．

如果z不在α内，则有一个类似的证明，此证明根据这一事实：数$(-n)z$不可能全不在α内．▌

定理 如果α是一个实数，则

$$\alpha+(-\alpha)=0.$$

证明 假定x在α内且y在$-\alpha$内，则$-y$不在α内，所以$-y>x$．因此$x+y<0$，从而$x+y$在0内．这样，$\alpha+(-\alpha)$的每个数都在0内．另一方面的说明会稍微困难一些．如果z在0内，则$-z>0$．按照引理则有在α内的某个x和不在α内的某个y，使得$y-x=-z$，且y不是$Q-\alpha$的最小元素．上边的等式可写为$x+(-y)=z$．由于x在α内，而$-y$在$-\alpha$内，这就证明了z在$\alpha+(-\alpha)$内．▌

在接下去讲乘法之前，我们来定义“正元素”并证明一个基本性质：

定义 $P=\{\alpha$ 在R内: $\alpha>0\}$.

注意,如果α和β都在P内则$\alpha+\beta$显然也在P内.

定理 如果α是个实数,则下列情况中的一个且仅有一个成立:

(i) $\alpha=0$,

(ii) α在P内,

(iii) $-\alpha$在P内.

证明 如果α包含着任一正有理数,则α必定包含所有的负有理数,所以α包含0但$\alpha\neq0$,亦即α在P内.如果α不含正有理数,则下述两种可能性中的一个必须成立:

(1) α包含着所有的负有理数,则$\alpha=0$.

(2) 有不在α内的某个负有理数x;可以假定x不是$Q-\alpha$的最小元素(因为x可以用$x/2>x$来代替);于是$-\alpha$包含着正有理数$-x$.因此正如我们刚证明了的那样,$-\alpha$在P内.

这就证明了(i)—(iii)中至少有一种成立.如果$\alpha=0$,则情况(ii)或(iii)的成立显然是不可能的.另外,$\alpha>0$和$-\alpha>0$两者同时成立是不能的,因为这将蕴含着$0=\alpha+(-\alpha)>0$. ∎

大家还记得,$\alpha>\beta$曾定义为α包含着β但又不等于β的意思.这个定义对于证明完备性是很好的,但现在我们则必须证明它与按P作出的定义是等价的.这样,我们就必须证明$\alpha-\beta>0$等价于$\alpha>\beta$.这显然是下一定理的一个推论.

定理 如果α,β和γ都是实数,且$\alpha>\beta$,则$\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

证明 由假设$\alpha>\beta$可得到β包含在α内,于是,由+法的定义直接推出$\beta+\gamma$包含在$\alpha+\gamma$内.这证明$\alpha+\gamma\geqslant\beta+\gamma$.我们能容易地排除掉相等的可能性,因为若有

$$\alpha+\gamma=\beta+\gamma,$$

则

$$\alpha=(\alpha+\gamma)+(-\gamma)=(\beta+\gamma)+(-\gamma)=\beta,$$

这是不能成立的。因此$\alpha+\gamma>\beta+\gamma$. ▌

乘法呈现出它本身特有的困难。如果$\alpha,\beta>0$,则$\alpha\cdot\beta$可以定义如下:

定义 如果α和β都是实数且$\alpha,\beta>0$,则

$\alpha\cdot\beta=\{z: z\leqslant 0$ 或对于在α内的某个$x>0$和在β内的某个$y>0$有 $z=x\cdot y\}$.

定理 如果α和β都是实数且$\alpha,\beta>0$,则$\alpha\cdot\beta$是一个实数.

证明 照例,我们要验证四个条件.

(1) 假定$w<z$,这里z在$\alpha\cdot\beta$内。如果$w\leqslant 0$,则w便自动地在$\alpha\cdot\beta$内。现假设$w>0$,则$z>0$,从而对于α内的某个正的x和β内的正数y有$z=x\cdot y$。现在

$$w=\frac{wz}{z}=\frac{wxy}{z}=\left(\frac{w}{z}\cdot x\right)\cdot y.$$

因为$0<w<z$,所以有$w/z<1$,因此$(w/z)\cdot x$在α内.于是w在$\alpha\cdot\beta$内.

(2) 显然$\alpha\cdot\beta\neq\varnothing$.

(3) 如果x不在α内且y不在β内,则对于α内的所有x'都有$x>x'$,而对于β内的所有y'有$y>y'$。因此对于所有这样的正x'和正y'就有$xy>x'y'$。所以xy不在$\alpha\cdot\beta$内;可见,$\alpha\cdot\beta\neq\mathbf{Q}$.

(4) 假定w在$\alpha\cdot\beta$内,且$w\leqslant 0$。在α内有某个适合$x>0$的x,且在β内有某个适合$y>0$的y。于是$z=xy$在$\alpha\cdot\beta$内且$z>w$。现在设$w>0$。则对于α内的某个正数x和β内的某个正数y有$w=xy$。另外,α包含有某个$x'>x$;如果$z=x'y$,则$z>xy=w$,且z在$\alpha\cdot\beta$内。因此$\alpha\cdot\beta$

不具有最大的元素. ∎

注意到当 α 和 β 都在 P 内时 $\alpha\cdot\beta$ 显然在 P 内. 这就完成了关于 P 的所有性质的证明. 为要完成 $\cdot$ 的定义, 我们先定义 $|\alpha|$.

定义 如果 α 是一个实数, 则

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{当 } \alpha\geqslant 0 \text{ 时},\\ -\alpha, & \text{当 } \alpha\leqslant 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

定义 如果 α 和 β 是实数, 则

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}0, & \text{当 } \alpha=0 \text{ 或 } \beta=0 \text{ 时},\\ |\alpha|\cdot|\beta|, & \text{当 } \alpha>0, \beta>0 \text{ 或 } \alpha<0, \beta<0 \text{ 时},\\ -(|\alpha|\cdot|\beta|), & \text{当 } \alpha>0, \beta<0 \text{ 或 } \alpha<0, \beta>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

正如人们或许已感觉到的那样, 乘法性质的证明通常总要简化为正数的情况.

定理 如果 α, β 和 γ 都为实数, 则

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma.$$

证明 当 $\alpha, \beta, \gamma>0$ 时这是明显的. 一般情况的证明需要考察各个情况(当我们应用下一定理时此证明可以稍许简化). ∎

定理 如果 α 和 β 是实数, 则 $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$.

证明 当 $\alpha, \beta>0$ 时这是明显的, 且其他情况是容易验证的. ∎

定义 $1=\{x \text{ 在 } \mathbf{Q} \text{ 内}: x<1\}$.

(1 是实数乃是显而易见的.)

定理 如果 α 是实数, 则 $\alpha\cdot 1=\alpha$.

证明 设 $\alpha>0$. 容易看出 $\alpha\cdot 1$ 的每个数也是 α 的一个数. 另一方面, 设 x 在 α 内. 如果 $x\leqslant 0$, 则 x 自动在 $\alpha\cdot 1$ 内. 如果 $x>0$, 则有某个在 α 内的有理数 y 使 $x<y$. 于是 $x=y\cdot(x/y)$, 且 x/y 在 1 内, 所以 x 在 $\alpha\cdot 1$ 内. 这就证明当 $\alpha>0$ 时 $\alpha\cdot 1=\alpha$.

如果 $\alpha<0$, 则应用刚才证明的结果即有

$$\alpha\cdot 1=-(|\alpha|\cdot|1|)=-(|\alpha|)=\alpha.$$

最后，当 $\alpha=0$ 时，本定理是显然的. ▮

定义 如果 α 是实数且 $\alpha>0$，则

$$\alpha^{-1}=\{x\text{ 在 Q 内: } x\leqslant 0,\text{ 或 } x>0 \text{ 但 } 1/x \text{ 不在 } \alpha \text{ 内, 且 } 1/x \text{ 不是 } \mathrm{Q}-\alpha \text{ 的最小元素}\};$$

如果 $\alpha<0$，则 $\alpha^{-1}=-(|\alpha|^{-1})$.

定理 如果 α 是一个不等于 0 的实数，则 α^{-1} 是一个实数.

证明 显然仅考虑 $\alpha>0$ 就足够了. 四个条件必须加以验证.

(1) 假设 $y<x$，且 x 在 α^{-1} 内. 如果 $y\leqslant 0$，则 y 在 α^{-1} 内. 如果 $y>0$，则 $x>0$，所以 $1/x$ 不在 α 内. 因为 $1/y>1/x$，从而 $1/y$ 不在 α 内，且 $1/y$ 显然不是 $\mathrm{Q}-\alpha$ 的最小元素，因此 y 在 α^{-1} 内.

(2) 显然 $\alpha^{-1}\neq\varnothing$.

(3) 因为 $\alpha>0$，所以有某个正的有理数 x 在 α 内. 于是 $1/x$ 不在 α^{-1} 内，因此 $\alpha^{-1}\neq\mathrm{Q}$.

(4) 假定 x 在 α^{-1} 内. 如果 $x\leqslant 0$，则显然有某个在 α^{-1} 内的 y 满足 $y>x$，因为 α^{-1} 含有某些正的有理数. 如果 $x>0$，则 $1/x$ 不在 α 内. 因为 $1/x$ 不是 $\mathrm{Q}-\alpha$ 的最小元素，所以有不在 α 内的有理数 y 满足 $y<1/x$. 选取一个满足 $y<z<1/x$ 的有理数 z. 则 $1/z$ 在 α^{-1} 内，且 $1/z>x$. 因此 α^{-1} 不包含有最大的元素. ▮

为了证明 α^{-1} 确实就是 α 的乘法逆元素，给出另一个引理是有帮助的，该引理是我们的前一个引理的乘法类似物.

引理 设 α 是一个实数且 $\alpha>0$，而 z 是一个有理数且 $z>1$. 则有在 α 内的有理数 x，和不在 α 内的有理数 y，使得 $y/x=z$. 此外，我们可以假定 y 不是 $\mathrm{Q}-\alpha$ 的最小元素.

证明 首先假定 z 在 α 内 则因 $z-1>0$ 且

$$z^n=(1+(z-1))^n\geqslant 1+n(z-1),$$

从而推出

$$z,\ z^2,\ z^3,\ \cdots$$

不可能全都在α内. 因此有某个k使得$x=z^k$在α内而$y=z^{k+1}$不在α内. 显然$y/x=z$. 另外,如果y碰巧是$\mathbf{Q}-\alpha$的最小元素,设$x'>x$是α的一个元素,并用x'代替x而以yx'/x代替y.

如果z不在α内,那么有一种类似的证明——根据数$1/z^k$不可能全部都不在α内. ▊

定理 如果α是一实数且$\alpha\neq 0$,则$\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$.

证明 显然只考虑$\alpha>0$就足够了,在此情况下,$\alpha^{-1}>0$.假定x是一个α内的正有理数,而y是一个α^{-1}内的正有理数. 则$1/y$不在α内,所以$1/y>x$;因此$xy<1$,这意味着xy在1内. 既然所有的有理数$x\leqslant 0$也都在1内,这就证明了$\alpha\cdot\alpha^{-1}$的每个元都在1内.

为了证明倒转过来的论断,设z在1内. 如果$z\leqslant 0$,则z显然在$\alpha\cdot\alpha^{-1}$内. 现假定$0<z<1$. 根据引理,有在α内的正有理数x和不在α内的正有理数y,使$y/x=1/z$;且我们可假定y不是$\mathbf{Q}-\alpha$的最小元素. 而这就意味着$z=x\cdot(1/y)$,其中x在α内,$1/y$在α^{-1}内. 因此,z在$\alpha\cdot\alpha^{-1}$内. ▊

我们差不多快要完成了! 只剩下分配律的证明. 我们必须再次去考察许多情况,但不要失望. 在一切数都是正数的场合包含着感兴趣的论点,而其他情况全可以极简练地予以处理.

定理 如果α,β和γ都是实数,则

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

证明 首先假定$\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$. 则等式中的两个数都包含一切$\leqslant 0$的有理数. 在$\alpha\cdot(\beta+\gamma)$中的正有理数对于$\alpha$中的正数$x$,$\beta$中的$y$,和$\gamma$中的$z$具有形式$x\cdot(y+z)$. 因为$x\cdot(y+z)=x\cdot y+$

$x\cdot z$，其中 $x\cdot y$ 是 $\alpha\cdot\beta$ 的一个正元素，而 $x\cdot z$ 是 $\alpha\cdot\gamma$ 的一个正元素，所以这个数也在 $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ 之内．因此，$\alpha\cdot(\beta+\gamma)$ 的每个元素也在 $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ 之内．

另一方面，在 $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ 内的正的有理数对于 α 中的正数 x_1，x_2，β 中的 y，和在 γ 中的 z 具有形式 $x_1\cdot y+x_2\cdot z$．如果 $x_1\leqslant x_2$，则 $(x_1/x_2)\cdot y\leqslant y$，所以 $(x_1/x_2)\cdot y$ 在 β 内．因此

$$x_1\cdot y+x_2\cdot z=x_2[(x_1/x_2)y+z]$$

在 $\alpha\cdot(\beta+\gamma)$ 之内．当 $x_2\leqslant x_1$ 时，同样的技巧当然有效．

为了完成此证明，必须考察 α，β 和 γ 不全 >0 的情形．如果这三者中的任何一个等于 0，则证明是容易的，且涉及到 $\alpha<0$ 的种种情况在关于 β 和 γ 的所有可能性一旦被证明之后就立即可以推导出来．因此，我们假定 $\alpha>0$ 并考虑三种情况：$\beta,\gamma<0$，和 $\beta<0,\gamma>0$，和 $\beta>0$，$\gamma<0$．第一种情形可直接由已经证明过的情况推出，第三种情况可以通过交换 β 和 γ 由第二种情况推出．所以我们集中精力于 $\beta<0,\gamma>0$ 的情况．于是有两种可能性：

(1) $\beta+\gamma\geqslant 0$．则

$$\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot([\beta+\gamma]+|\beta|)=\alpha\cdot(\beta+\gamma)+\alpha\cdot|\beta|,$$

所以

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=-(\alpha\cdot|\beta|)+\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

(2) $\beta+\gamma\leqslant 0$．则

$$\alpha\cdot|\beta|=\alpha\cdot(|\beta+\gamma|+\gamma)=\alpha\cdot|\beta+\gamma|+\alpha\cdot\gamma,$$

因而

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=-(\alpha\cdot|\beta+\gamma|)=-(\alpha\cdot|\beta|)+\alpha\cdot\gamma$$
$$=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.\blacksquare$$

这个证明完成了本章的工作．虽然是冗长的而且往往是乏味的，但本章所包含的结果却相当重要，至少应详细地阅读一次（且最好不多于一次！）．因为我们还是第一次知道我们不是在真空中

进行运算——确实有一个完备的有序域，本书中的定理并非立足于永远不能实现的假设之上．一个有趣的而又可怕的可能性仍继续存在：也许存在几个完备的有序域．如果真是这样，则微积分的各定理虽然是意料不到的丰富多采，但性质 P1—P13 却是令人深感失望地不够完全．最后一章排除了这种可能性；性质 P1—P13 圆满地刻划了实数的特征——关于实数的可以证明的任何东西，都能够仅仅在这些性质的基础上加以证明．

习　题

虽然在这一组中只有两题，但每一个却要求一个全然不同的实数构造；其他构造的仔细研究只是推荐给那些乐于受苛求的读者的，但在这两个构造里面所包含的主要观念则是值得了解的．在这一章中构造出来的实数可以称为"代数学家的实数"，因为它们是有意定义得使其能保证最小上界的特性，而这又包含着有序性<这样一个代数概念．在下一题中所构造的实数系可称之为"分析学家的实数"，因为它们被设计得使柯西序列总是收敛的．

1. 因为每个实数都应当是有理数的某个柯西序列的极限，所以我们可以尝试将实数定义为有理数的柯西序列．但由于两个柯西序列可以收敛于同一实数，所以这个建议需作某些修改．
   (a) 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是有理数的两个柯西序列，如果$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，我们便把$\{a_n\}$和$\{b_n\}$定义为是等价的（用$\{a_n\}\sim\{b_n\}$来表示）．证明$\{a_n\}\sim\{a_n\}$，当$\{b_n\}\sim\{a_n\}$时$\{a_n\}\sim\{b_n\}$，并且当$\{a_n\}\sim\{b_n\}$与$\{b_n\}\sim\{c_n\}$时$\{a_n\}\sim\{c_n\}$．
   (b) 设α是所有等价于$\{a_n\}$的序列的集合．而β是所有等价于$\{b_n\}$的序列的集合．证明或者$\alpha\cap\beta=\varnothing$或者$\alpha=\beta$．（如果$\alpha\cap\beta\neq\varnothing$，则有某个$\{c_n\}$同时在$\alpha$和$\beta$两者之内．证明在这种情况下$\alpha$和$\beta$都恰好是由等价于$\{c_n\}$的那些序列所组成．）
   (b)指出所有柯西序列的集合可以分成为一些互不相交的集合，其中的每一集合由等价于某一固定序列的所有序列组成．我们将这样的一个集合定义为实数，并将所有实数的集合用 $\mathbf{R}$ 表示．

(c) 设α和β都是实数，并设$\{a_n\}$是α内的一个序列，$\{b_n\}$是β内的一个序列．我们将$\alpha+\beta$定义为所有等价于序列$\{a_n+b_n\}$的序列的集合．证明$\{a_n+b_n\}$是柯西序列，并证明这个定义不依赖于为α和β所选定的特殊序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$．还证明关于乘法的类似定义也完全可以做出．

(d) 证明$\mathbf{R}$是具有这些运算的一个域；乘法逆元素的存在是要验证的唯一有趣的论点．

(e) 定义正的实数$\mathbf{P}$使$\mathbf{R}$为一有序域．

(f) 证明实数的每一个柯西序列皆收敛．记住：如果$\{\alpha_n\}$是一实数序列，则每个α_n本身就是有理数的柯西序列的一个集合．

2. 本题概述"中学生的实数"的构造．我们将实数定义为对$(a, \{b_n\})$，其中a是一整数而$\{b_n\}$则是由0到9的各自然数的一个序列，但附有该序列不会在某项以后都是9这个条件．直观上，这个对代表$a+\sum_{n=1}^{\infty}b_n10^{-n}$．用这个定义，实数是非常具体的对象，但在定义加法和乘法时所包含的困难是不容忽视的(当你相加无限小数时怎会不为把数字延伸到无限远处而担心呢?)．一个合理的途径概述如下；其技巧是从一开始就使用最小上界．

(a) 我们规定$(a, \{b_n\})<(c, \{d_n\})$是指$a<c$，或者指$a=c$但对某个$n$我们有$b_n<d_n$，而对$1\leqslant j<n$则有$b_j=d_j$．试用这个定义证明最小上界性质．

(b) 已知$\alpha=(a, \{b_n\})$，定义$\alpha_k=a+\sum_{n=1}^{k}b_n10^{-n}$．从直观上看，$\alpha_k$是将所有小数点后第$k$位之后的数变为0所得到的有理数．反之，已知一形如$a+\sum_{n=1}^{k}b_n10^{-n}$的有理数$r$，令$r'$表示实数$(a, \{b'_n\})$，这里对于$1\leqslant n\leqslant k$有$b'_n=b_n$，而对于$n>k$则有$b'_n=0$．现在对$\alpha=(a, \{b_n\})$和$\beta=(c, \{d_n\})$定义

$$\alpha+\beta=\sup\{(\alpha_k+\beta_k)':k\text{ 为自然数}\}$$

(由(a)知最小上界存在)．如果乘法类似地加以定义，则关于域的所有条件的验证都是直截了当的事，不再重着介绍．不过，乘法逆元素的存在将又一次是最困难的．

第二十九章　实数的唯一性

现在我们将恢复到关于实数的通常记法，而将黑体符号留给可能出现的其他域．此外，我们将把整数和有理数看做特殊的实数，而不顾定义实数的特殊方式．在这一章中，我们感兴趣的只是一个问题：是否有与 **R** 不同的完备有序域？若就字面来讲，对这个问题的回答是"有"．例如，在第二十七章中所介绍的域 F_3 就是一个完备有序域，而且它确实不是 **R**．这个域是一个"愚蠢"的例子，因为数对 (a, a) 可以看作不过是实数 a 的另一个名称；运算

$$(a, a) + (b, b) = (a+b, a+b),$$

$$(a, a) \cdot (b, b) = (a \cdot b, a \cdot b).$$

和这重新命名的是一致的．这种例子说明要高明地考虑此问题，需要某些数学方法来讨论重新命名．

如果域 F 的元素要用来重新命名 **R** 的元素，则对于 **R** 内的每个 a 必须对应着一个在 F 内的"名称" $f(a)$．记法 $f(a)$ 暗示着重新命名可以用函数来表述．为了做到这一点，我们将需要一个比迄今为止已出现过的任何一个更加一般的函数概念，实际上，我们将需要数学中所用的最普遍的"函数"概念．在这个普遍的意义上，一个函数仅仅是一种给某些东西指定一些别的东西的法则．正式地讲，函数是一个（任何种类的对象的）有序对的集合，其中不含具有相同的第一个元素的两个不同对．函数 f 的定义域是使 (a, b) 关于某个 b 在 f 内的所有对象 a 的集合 A；这个（唯一的）b 被记为 $f(a)$．如果对于 A 中的一切 a 而言 $f(a)$ 都在集合 B 内，则 f 称为由 A 到 B 的一个函数．例如，

如果对于 **R** 中的所有 x 有 $f(x) = \sin x$（且 f 仅对 **R** 中的 x

有意义)，则f是一个由**R**到**R**的函数；它也是一个由**R**到$[-1,1]$的函数；

如果对于**C**中的一切z有$f(z)=\sin z$，则f是一个由**C**到**C**的函数；

如果对于**C**中的一切z有$f(z)=e^z$，则f是一个由**C**到**C**的函数；它也是一个由**C**到$\{z$在**C**内：$z\neq 0\}$的函数；

θ是一个由$\{z$在**C**内：$z\neq 0\}$到$\{x$在**R**内：$0\leqslant x<2\pi\}$的函数；

如果f是关于**R**中的a的一切对$(a,(a,a))$的集合，则f是一个由**R**到F_3的函数.

假定F_1和F_2是两个域，我们将用$\oplus$，$\odot$等来记F_1中的运算，而用$+$，$\cdot$等记F_2中的运算. 如果F_2要看作是F_1中的元素的新名称的集合，则必须存在一个具有下列性质的由F_1到F_2的函数：

(1) 函数f必须是一对一的，也即如果$x\neq y$，则我们必须有$f(x)\neq f(y)$；这意味着F_1中没有两个元素具有同一名称.

(2) 函数f必须是“在上的”，也即对于F_2内的每个元素z必须有F_1内的某个x使$z=f(x)$；这意味着F_2的每个元素都用于命名F_1的某个元素.

(3) 对于F_1中的所有x和y我们应有

$$f(x\oplus y)=f(x)+f(y),$$
$$f(x\odot y)=f(x)\cdot f(y);$$

这意味着重新命名的程序和域的运算是相容的.

如果我们还把F_1和F_2当有序域看待，我们加上一个另外的要求：

(4) 如果$x\otimes y$，则$f(x)<f(y)$.

一个具有这些性质的函数称之为一个由F_1到F_2的同构. 这

个定义是如此重要，以致我们要正式地重新叙述它.

定义

> 如果 F_1 和 F_2 是两个域，那么一个由 F_1 到 F_2 的**同构**是指一个具有下列性质的由 F_1 到 F_2 的函数 f:
>
> (1) 如果 $x \neq y$，则 $f(x) \neq f(y)$.
>
> (2) 如果 z 在 F_2 内，则对于 F_1 中的某个 x 有 $z=f(x)$.
>
> (3) 如果 x 和 y 在 F_1 内，则
>
> $$f(x \oplus y)=f(x)+f(y),$$
> $$f(x \odot y)=f(x) \cdot f(y).$$
>
> 如果 F_1 和 F_2 都是有序域，我们还要求:
>
> (4) 如果 $x \otimes y$，则 $f(x) < f(y)$.

如果在域 F_1 和 F_2 之间存在一个同构，则称它们是**同构的**. 同构的域可以看作实质上是相同的——其一的任何重要性质将自动地对另一个也成立. 所以，我们可以，而且必须重新表述在本章开头所提出的问题. 如果 F 是一个完备的有序域，期望 F 等于 $\mathbf{R}$ 自然是不明智的——不过，我们倒希望知道 F 是不是同构于 $\mathbf{R}$. 在下边的定理中，F 将是一个具有运算 $+$ 和 $\cdot$ 以及"正元素" $\mathbf{P}$ 的域；我们记 $a<b$ 意思是 $b-a$ 在 $\mathbf{P}$ 内，等等.

定理 如果 F 是一个完备的有序域，则 F 同构于 $\mathbf{R}$.

证明 因为当两域之间有一个同构时，按定义它们是同构的，所以我们必须实际构造出一个是同构的由 $\mathbf{R}$ 到 F 的函数 f. 我们象下边那样从在整数上定义 f 开始:

$$f(0)=0$$

$$f(n)=\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ 项}}, \text{ 当 } n>0 \text{ 时},$$

$$f(n)=-(\underbrace{1+\cdots+1}_{|n|\text{ 项}}), \text{ 当 } n<0 \text{ 时}.$$

容易证实对一切整数 m 和 n 有

$$f(m+n)=f(m)+f(n),$$
$$f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n),$$

且用 n 记 $f(n)$ 是方便的. 接着我们用

$$f(m/n)=m/n=m\cdot n^{-1}$$

在有理数中定义 f(注意，因为 F 是一个有序域，所以当 $n>0$ 时 $1+\cdots+1\neq 0$). 因为如果 $m/n=k/l$，则 $ml=nk$, 即 $m\cdot l=k\cdot n$, 从而 $m\cdot n^{-1}=k\cdot l^{-1}$, 所以这个定义是有意义的. 容易验证对于所有的有理数 r_1 和 r_2 有

$$f(r_1+r_2)=f(r_1)+f(r_2),$$
$$f(r_1\cdot r_2)=f(r_1)\cdot f(r_2),$$

且当 $r_1<r_2$ 时 $f(r_1)<f(r_2)$.

对任意的 x 而言，$f(x)$的定义基于现在已熟知的观念：任一实数由小于它的有理数所确定. 对于 R 内的任一 x，设 A_x 是由关于所有有理数 $r<x$ 的全部 $f(r)$ 组成的 F 的子集. 集合 A_x 无疑是非空的，且也是上方有界的，因为如果 r_0 是一个适合 $r_0>x$ 的有理数，则对于一切在 A_x 内的 $f(r)$ 皆有 $f(r_0)>f(r)$. 由于 F 是一个完备的有序域，所以集合 A_x 具有最小上界；我们定义 $f(x)$ 为 $\sup A_x$.

现在我们有了以两种不同的方式定义的 $f(x)$，前一个是关于有理数 x 的，而后一个是关于任何 x 的. 在继续进行之前，必须证明这两个定义对于有理数 x 是一致的. 换句话说，如果 x 是一个有理数，我们便需要证明

$$\sup A_x=f(x),$$

此处 $f(x)$表示 m/n,因为 $x=m/n$. 这不是自然而然的，而是依赖于 F 的完备性；因此需要讲一些稍微离题的话.

因为 F 是完备的，所以对于自然数 n 而言，元素

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{项}}$$

形成一个无上界的集合；其证明和对于 $\mathbf{R}$ 的那个证明（第八章定理 2）是完全相同的. 对 $\mathbf{R}$ 而言这个事实的那些推论，在 F 中有其维肖的类似物：特别是，如果 a 和 b 是 F 的满足 $a \prec b$ 的两个元素，则有这样的有理数 r 使得

$$a \prec f(r) \prec b.$$

有了这个观察，我们重新回到 $f(x)$的两个定义对于有理数 x 是一致的证明. 如果 y 是一个满足 $y<x$ 的有理数，则我们已看到有 $f(y) \prec f(x)$. 从而 A_x的每个元素$\prec f(x)$. 因此，

$$\sup A_x \preceq f(x).$$

另一方面，假定我们有

$$\sup A_x \prec f(x),$$

则会存在一个有理数 r 使

$$\sup A_x \prec f(r) \prec f(x).$$

但条件 $f(r) \prec f(x)$意味着 $r<x$，而这又意味着$f(r)$在集合 A_x内；这显然与 $\sup A_x \prec f(r)$ 的条件相矛盾. 这就证明原来的假设不成立，因此

$$\sup A_x = f(x).$$

这样我们有了一个完全确定的由 $\mathbf{R}$ 到F的函数 f. 为了证明 f 是一个同构，我们必须证明定义中的条件(1)—(4). 我们将从(4)开始.

如果 x 和 y 是满足 $x<y$ 的实数，则 A_x显然包含在 A_y 内. 因此

$$f(x) = \sup A_x \preceq \sup A_y = f(y).$$

为了排除相等的可能性，注意到存在有理数 r 和 s 满足

$$x<r<s<y.$$

我们已知有 $f(r)<f(s)$. 由此推出

$$f(x)\leqslant f(r)<f(s)\leqslant f(y).$$

这就证明了(4).

条件(1)直接由(4)推出: 如果 $x\neq y$, 则要么 $x<y$, 要么 $y<x$; 在第一种情形 $f(x)<f(y)$, 而在第二种情形 $f(y)<f(x)$; 无论在哪种情况下都有 $f(x)\neq f(y)$.

为了证明(2), 设 a 是 F 的一个元素, 并设 B 是满足 $f(r)<a$ 的所有有理数 r 的集合. 该集合 B 不是空集, 且是上方有界的, 因为存在满足 $f(s)>a$ 的有理数 s, 所以对 B 中的 r 有 $f(s)>f(r)$, 这暗含 $s>r$. 设 x 是 B 的最小上界; 我们要求 $f(x)=a$. 为了证明这一点, 消除可能会有的

$$f(x)<a,$$

$$a<f(x),$$

就足够了. 在第一种情形将会有一个有理数 r 满足

$$f(x)<f(r)<a.$$

但这意味着 $x<r$ 以及 r 属于 B, 这和 $x=\sup B$ 的事实相矛盾. 在第二种情形下, 将存在一个有理数 r 满足

$$a<f(r)<f(x).$$

这暗含 $r<x$ 的意思. 因为 $x=\sup B$, 这就意味着对于 B 中的某个 s 有 $r<s$. 因此

$$f(r)<f(s)<a,$$

这又是一个矛盾. 所以 $f(x)=a$, 从而证明了(2).

为了核实(3), 设 x 和 y 是实数并假定 $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$. 则或者

$$f(x+y)<f(x)+f(y) \text{ 或者 } f(x)+f(y)<f(x+y).$$

在第一种情形下将存在一有理数 r 使

$$f(x+y)<f(r)<f(x)+f(y).$$

但这将意味着

$$x+y<r.$$

所以 r 可以被写为两个有理数之和

$$r=r_1+r_2,\ \text{其中}\ x<r_1\ \text{且}\ y<r_2.$$

因此,应用已对有理数验证了的关于 f 的事实将推出

$$f(r)=f(r_1+r_2)=f(r_1)+f(r_2)>f(x)+f(y),$$

这是一个矛盾. 另一情况可同样地处理.

最后,如果 x 和 y 是正实数,则同样的证法证明

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y);$$

一般的情形则是简单的推论. ▌

这个定理结束了我们对实数的研究, 并消释了关于它们的任何疑问:确实存在完备的有序域,且在同构的意义上只有一个完备的有序域. 详细地从事实数的构造是数学教育的一个重要部分,但常常提及这个具体的构造是不必要的. 实数碰巧是有理数的集合一事完全是无关紧要的, 而且这样的事实决不应该进入关于实数的任一重要定理的证明. 合理的证明应该仅仅用到实数是一个完备的有序域这一事实, 因为实数的这个性质在同构的意义上表征了它们, 且实数的任一重要的数学性质对于一切同构的域应是正确的. 老实讲, 我应该承认这个最后的断言只是作者个人的一种偏见,但它却是几乎所有别的数学家所共有的一种看法.

习　题

1. 设 f 是一个由 F_1 到 F_2 的同构.
   (a) 证明 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$. (这儿, 在左边的 0 和 1 表示 F_1 中的元素,而在右边的 0 和 1 表示 F_2 中的元素.)
   (b) 对于 $a\neq 0$ 证明 $f(-a)=-f(a)$ 和 $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.
2. 这里是一个使你深信以下事实的机会: 域的任何有意义的性质为任何与其同构的域所共有. 本题的主旨是写出非常严谨的证明,直到你

确信所有这类陈述很明显为止. F_1 和 F_2 是同构的两个域; 为简单起见, 我们用 $+$ 和 $\cdot$ 同时表示在两个域中的运算. 证明:

(a) 如果方程 $x^2+1=0$ 在 F_1 中有解, 则它在 F_2 中也有解.

(b) 如果 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 在 F_1 中的每个多项式方程 $x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 在 F_1 内有根, 则 $b_0, \cdots, b_{n-1}$ 在 F_2 中的每个多项式方程 $x^n+b_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+b_0=0$ 在 F_2 内也有根.

(c) 如果在 F_1 内有 $1+\cdots+1$(加 m 次)$=0$, 则同一等式在 F_2 中也是正确的.

(d) 如果 F_1 和 F_2 都是有序域 (且同构 f 对于 $x<y$ 满足 $f(x)<f(y)$), 并且 F_1 是完备的, 则 F_2 也是完备的.

3. 设 f 是一个由 F_1 到 F_2 的同构而 g 是一个由 F_2 到 F_3 的同构. 定义由 F_1 到 F_3 的函数 $g\circ f$ 为 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. 证明 $g\circ f$ 是一个同构.

4. 设 F 是一个完备的有序域, 从而存在一个由 $\mathbf{R}$ 到 F 的同构 f. 证明实际上仅有一个由 $\mathbf{R}$ 到 F 的同构. 提示: 在 $F=\mathbf{R}$ 的情况这是习题三, 17. 现在如果 f 和 g 是两个由 $\mathbf{R}$ 到 F 的同构, 考察 $g^{-1}\circ f$.

5. 求一个恒等函数以外的由 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的同构.

建议读物

人们应当象被一种嗜好所驱使那样去进行阅读，因为把读书作为一种任务不会对他有什么好处。

塞木尔·詹森

该文献目录的一个目标在于将读者引向别的一些源头，但它所能起的最主要的作用还在于指出各类可利用的数学读物.因此，力求多方面都涉及的打算是有的，但决无"求全"的企图. 现在过多的数学书籍会使这种企图无论如何都几乎是无望的；况且我既然已决定鼓励独立地阅读，那么愈是标准的教本，出现在这里的可能就愈小. 在某些情况下这种哲学似乎会走到极端，象目录中的某些书是一个刚读完初等微积分的学生过几年后才能阅读的. 不过，所选文献有许多是现在就能阅读的，而且我相信这不会损害前面的观念.

本书中曾经提到的一些最基本的、未作证明的定理之一是：每个自然数都可以唯一的方式写成素数之积这一事实. 这个基本定理的证明几乎可以在任何一本初等数论书的开头部分找到. 很少有什么书能象

[1] *An Introduction to the Theory of Numbers* (third edition), by G. H. Hardy and E. M. Wright; Clarendon Press, Oxford, 1960

那样博得读者热烈的欢迎.

Pergamon 出版社发行了一套丛书《数学通俗讲座》，这套书用了一些很好的标题，其中有

[2] *A Selection of Problems in the Theory of Numbers*, by W. Sierpinski; Macmillan (Pergamon), New York, 1964.

最后，我要提及一本我希望仍在继续刊行的小书：

[3] *Three Pearls of Number Theory*, by A. Khinchin; Gaylock Press, Rochester, N. Y., 1952. (有中译本)

无理数的课题横跨数论和分析两个领域. 关于它的一个卓越的介绍可参考下书

[4] *Irrational Numbers*, by I. M. Niven; Wiley, New York, 1956.

本书除了有许多历史的注解以外，还引证一些杂志中论述相当初等的文章. 有 π 是超越数的证明(亦见[53])，以及"盖尔芳德-施奈德定理"(Gelfond-Schneider theorem) 的证明. 这个定理是指：如果 a 和 b 皆为代数数，且 $a\neq0$ 或 1，而 b 又是无理数，则 a^b 是超越数.

到目前为止所列的所有书都是从自然数开头的，但如果必要，一开始把无理数作为已知的当然也是允许的，更不用提及整数和有理数. 好几本新书提供了由自然数构造有理数的图式，但很难相信能有一本比下书

[5] *Foundations of Analysis*, by E. Landau; Chelsea, New York, 1951

中的阐述更加透彻.

附带提及，原德文版

[6] *Grundlagen der Analysis*(fourth edition), by E. Landau; Chelsea, New York, 1965. (有中译本)

现在通用的是纸面的，并附有关于全书的完备的德英小词典（约300 单词)——这无疑是一种开始读德文数学书的极好途径. 关于构造实数的基本思想乃是戴德金所引出的，他的贡献可在

[7] *Essays on the Theory of Numbers*, by R. Dedekind; Dover, New York, 1963

中找到.

虽然许多数学家都满足于把自然数作为自然的出发点，但数却又能通过最基本的总的出发点——集合来定义. 集合论的一个

有趣的阐述可以在被称为

[8] *Naive Set Theory*, by P. R. Halmos; Van Nostrand, Princeton, N. J., 1961

的易懂的小书中找到. 另一本非常好的入门书是

[9] *Theory of Sets*, by E. Kamke; Dover, New York, 1950.

为了使某些为"新数学"所折磨的人能够确信集合论确实具有某种数学内容(实际上,具有某些非常深奥的定理),这或许是有必要的. 应用这些深刻的结果,卡姆克(Kamke)证明了存在这样的不连续函数 f, 使得 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对一切 x 和 y 都成立. 对于那些好读名著的人们而言, 我们指出集合论的最重要的一些概念乃是由康托尔(Cantor)最先引进的,他的工作再现于

[10] *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, by G. Cantor; Dover, New York, 1952

中.

不等式在第一章和第二章中是作为一个初等论题处理的, 实际上它形成一个专门的领域. 关于这个领域的一个好的初等引论由

[11] *Analytic Inequalities*, by N. Kazarinoff; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961

所提供.

几何平均值小于或等于算术平均值有十二种不同的证法, 每一种都基于一个不同的原理,它们可在更高等的书

[12] *Inequalities*, by E. Beckenbach and R. Bellman; Springer, New York, 1961

的开头部分中找到. 关于不等式的经典著作是

[13] *Inequalities* (Second edition), by G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya; Cambridge University Press, New York, 1952.（有中译本）

这三个合作者中的每一个对关于数学思想本质的稀有文献都作出了他们自己的贡献，这类文献是从一个数学家的观点出发写成的．我所中意的是

[14] *A Mathematician's Apology*, by H. Hardy; Cambridge University Press, New York, 1940.

李特乌德(Littlewood)的逸事式的选集，即所谓

[15] *A Mathematician's Miscellany*, by J. E. Littlewood; Methuen, 1953.

波利亚(Polya)的贡献是最高水平的教授法

[16] *Mathematics and plausible Reasoning*, by G. Polya (Vol. I: *Induction and Analogy in Mathematics*; Vol. II: *Patterns of Plausible Inference*); Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

可以被看作微积分的背景的几何学，乃是另一个主要领域．欧几里德的《原理》一书，仍然是占支配地位的数学著作，但或许要延缓到作了某些准备之后再去阅读．关于“经典几何学”的最近代的著作大概是

[17] *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, by E. Moise; Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

这本漂亮的书提供了卓越的历史图景，并包含有对“阿基米德公理”在几何中的作用的充分的讨论；此外，第二十八章还叙述了一个阿基米德公理在其中不成立的有序域．说到漂亮的几何书，各种各样有魅力的事都可在

[18] *Introduction to Geometry*, by H. S. Coxeter; Wiley, New York, 1961

中找到.

几乎所有的几何学论述至少都会说到凸性，它形成又一个专门的论题. 我想不出还有那本介绍凸性的读物，或者那种一般的数学实践能比从头到尾阅读并研究

[19] *Convex Figures*, by I. M. Yaglom and W. G. Boltyanskii; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961

更好更有益. 这本书包含有精心安排的一系列定义和定理的陈述，所述定理的证明应由读者去补作(已作出的诸证明补充在书的后面). 另一几何书

[20] *Combinatorial Geometry in the Plane*, by H. Hadwiger and H. Debrunner; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964

仿照同样的原则写出. 连同这两本异常的书一道，我要提及一本极有价值的小书，它也属于一个特殊的种类，

[21] *Counterexamples in Analysis*, by B. Gelbaum and J. Olmsted; Holden-Day, San Francisco, 1964. (有中译本)

这本书中的多数例子来自分析中较高深的论题，但仍有少数是能为某些熟悉微积分的人所鉴别的.

微积分书中我打算只提及两本，每一本几乎都是经典的:

[22] *A Course of Pure Mathematics* (tenth edition), by G. H. Hardy; Cambridge University Press, New York, 1952.

[23] *Differential and Integral Calculus*, by R. Courant;

Vol. I, second edition, 1937; Vol. II, first edition, Wiley(Interscience), New York, 1936. (有中译本)

柯朗(Courant) 的书以应用见长. 此外, 其第一卷的较后部分还包含了一些通常在高等微积分中才能找到的材料, 包括微分方程和富里哀级数. 富里哀级数初步(需要一点高等微积分)也可在

[24] *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, by R. Seeley; W. A. Benjamin, New York, 1966

中找到. 柯朗的第二卷(实实在在的高等微积分)包含有微分方程方面的附加材料, 同时包含有变分法初步. 我不想提到任何一本专门致力于变分法的书, 因为它们(必定)是十分难的. 关于微分方程已写出了数也数不清的书, 但在初等的那些书中似乎没有一本能引起多大的热忱. 然而, 有一本稍许较高等的书却受到普遍的赞赏, 那就是:

[25] *Lectures on Ordinary Differential Equations*, by W. Hurewicz; M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1958.

我不想提或多或少还算标准的高等微积分书(它们不难为读者自己找到), 因为当今有一种以线代数为根据来改造高等微积分的整个陈述的动向. 最早的一本, 也是最好的一本用线代数论述高等微积分的著作是

[26] *Calculus of Vector Functions*, by R. H. Crowell and R. E. Williamson; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

几本最新的高等微积分书力图把近代数学的浩瀚领域端给大学生们. 我中意的当然是

[27] *Calculus on Manifolds*, by M. Spivak; W. A. Ben-

jamin, New York, 1965. (有中译本)

有三个另外的论题，它们在本书目中是有点不太合适，因为它们很快会作为标准的大学生课程的一部分而设立. 域及有关系统的认真研究属于"代数"范畴. 关于近世代数方面的第一本大学教科书是

[28] *A Survey of Modern Algebra*(third edition), by G. Birkhoff and S. Maclane; Macmillan, New York, 1941. (有中译本)

最有力的竞争者之一现在是

[29] *Topics in Algebra*, by I. N. Herstein; Ginn(Blaisdell), Boston, Mass., 1963.

赫斯坦(Herstein)的书打算在难度上居于《近世代数概论》[28]一书与下述优秀经典的著作之间:

[30] *Modern Algebra*, by B. L. van der Waerden; Ungar, New York, 1953. (有中译本)

顺便指出，这本书包含有有理函数的部分分式分解的一个证明.

复分析的标准教程之一是

[31] *Complex Analysis* (second edition), by L. V. Ahlfors; McGraw-Hill, New York, 1966. (有中译本)

我个人则热切地期待着下书

[32] *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, by G. W. Mackey; Van Nostrand, Princeton, N. J., 1967

的出版.

最后，拓扑学的研究以前虽从未提及，但它实际上是许多讨论的背景，因为它是在本书第 II 部分中扮演显著角色的极限和连续

概念的自然的推广. 现在关于拓扑学方面的初等书已有许多, 但阅读和评价它们的期望却使我深感沮丧, 因此我只打算提醒读者注意到它们的存在,并告诫读者它们中的某些不是很好的.

下边的一些课题,从初等的以至于非常困难的,都包括在这个书目中, 因为它们已在本文中提到过. 关于非减函数几乎在所有点处可微的证明(以及这确切地意味着什么的解释)在下书

[33] *Functional Analysis*, by F. Riesz and B. Sz. -Nagy; Ungar, New York, 1955(有中译本)

中会得到一个漂亮的阐述. (继这个初等的开端之后,该书进入到十分高等的材料.)Γ 函数有着一本全然致力于探讨其性质的精美小书

[34] *The Gamma Function*, by E. Artin; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

所述性质的绝大部分都是用曾在习题十八, 25 中说到过的玻尔-莫来鲁普(Bohr-Mollerup) 定理证明的. Γ 函数只是数学中几个重要的广义积分之一. 尤其是$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$(见习题十八, 27) 在概率论中是重要的,"正态分布函数"

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

在概率论中起着基本作用. 下边的书

[35] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (second edition)*, by W. Feller; Wiley, New York, 1957(有中译本)

已经成为经典著作之一.用初等函数表示某些函数(其中有$f(x)=e^{-x^2}$) 的积分的不可能性, 乃是数学中最秘密的课题之一. 用初等函数表示的积分的可能性的有趣讨论, 连同不可能性证明的

概述可在

[36] *The Integration of Functions of a Single Variable* (Second edition), by G. H. Hardy; Cambridge University Press, New York, 1958

中找到，并可参阅刘维尔(Liouville)的原始论文. 关于不可能性证明的完备阐述可在

[37] *Integration in Finite Terms*, by J. Ritt; Columbia University Press, New York, 1948

中找到. 说来也怪，一个有关的但看上去更困难的问题竟有着非常简洁的解法. 有一些简单的微分方程（$y''+xy=0$ 便是一个特例)，它们的解甚至不能通过初等函数的不定积分来表示. 这个事实在这本(60 页的)书

[38] *An Introduction to Differential Algebra*, by I. Kaplansky; Hermann, Paris, 1957

的第 43 页被证明. 不过，为了阅读该书你需要懂得相当多的代数知识.（前不久，刘维尔定理的相当于代数的、经过推敲的论述已得到了，且大概很快就会公开出版.）

还应当为用初等函数表示的积分法稍说几句话，这种方法许多数学家视之为艺术(而不象微分法那样只不过是一种技能！). 你可能已经发觉借助于不定积分表能加快积分的进程. 对于那些乐于查表的人们而言，有一本实在漂亮的汇编

[39] *Tables of Integrals, Series, and Products*, by I. S. Gradschteyn and I. W. Ryzhik; Academic Press, New York, 1965.

它包括有不定积分，广义定积分，以及大量别的资料(如果你偶尔需要第 34 个贝努利数的值的话，就可查此表)。为节省计，有一种纸面的积分表

[40] *Tables of Indefinite Integrals*, by G. Petit Bois; Dover, New York, 1961.

剩下的参考书稍属不同的性质，它们分属于三类，其中的第一类是历史方面的．曾在习题十一，49 中说到的许瓦兹(Schwartz)的书信可在下书

[41] *Ways of Thought of Great Mathematicians*, by H. Meschkowski; Holden-Day, San Francisco, 1964

中找到．某些历史上的事实以及将它们纳入微积分教学中去的努力，可参阅下书

[42] *The Calculus: A Genetic Approach*, by O. Toeplitz; University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1963.

有关数学史方面的绝大多数教科书，差不多尽是些既浮浅又死板的作品．一个令人钦佩的例外乃是

[43] *An Introduction to the History of Mathematics*, by H. Eves; Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

三本学术性的好著作是

[44] *History of Analytic Geometry*, by C. Boyer; Academic Press, New York, 1965.

[45] *A History of the Calculus, and Its Conceptual Development*, by C. Boyer; Dover, New York, 1959.

[46] *The Mathematics of Great Amateurs*, by J. Coolidge; Dover, New York, 1963.

一本近期的著作

[47] *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, by S. Bochner; Princeton University Press, Prince-

ton, N. J., 1966

在数学史方面提出了哲学上的思索，其作者异常渊博的学问在第一流的数学家当中是格外令人难忘的. 最后，原始史料的节选可从

[48] *A Source Book in Mathematics* (2 vols.), by D. Smith; Dover, New York, 1959

中找到.

这儿所列的大量的书或许容易使人感到有大量可用的历史资料. 虽然数学的真正早期的起源正受到最周密的检查，但却似乎没有人更多地注意到微积分的起源. 例如，要弄清是谁第一个证明了中值定理几乎都是不可能的(按照 *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 第二卷，是邦内(Bonnet)，邦内的名字对于学过微分几何的学生们由"高斯-邦内定理"乃是熟悉的). 同样地，几乎每一本历史书都告诉我们：瓦利斯(Wallis)用一种"麻烦的插值法"证明过瓦利斯公式，但几乎没有人担心这种插值法到底说的是什么，尽管它已灌注到了欧拉的 Γ 函数（连同解习题十八，26 一道，其叙述已在《〈微积分〉补充题解》中给出）的研究之中.

在这最后的一群书中的第二类可以称之为"通俗读物". 尽管《纽约时报》的社论是这么说，但仍然有数量多得惊人的由真正的数学家所写的第一流的东西

[49] *What is Mathematics?* (fourth edition), by R. Courant and H. Robbins; Oxford University Press, New York, 1947. (有中译本)

[50] *Geometry and the Imagination*, by D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. Chelsea, New York, 1956. (有中译本)

[51] *The Enjoyment of Mathematics*, by H. Rademacher and O. Toeplitz; Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

[52] *Famous Problems of Mathematics*(second edition), by H. Tietze; Graylock Press, Rochester, N. Y., 1965.

最负胜名的"通俗读物"之一，是与数学教学有关的书

[53] *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, by F. Klein(vol. 1: *Arithmetic, Algebra, Analysis*; vol. 2: *Geometry*); Dover, New York, 1948.

其第 I 卷中包含有 π 的超越性的一个证明，虽然不象[4]中的证明那么初等，但它却是直接类比 e 是超越数的证明的，只是用复变数的线积分代替了那儿的积分而已．只要知道复分析的基本事实便可以阅读此书．

第三类是完全相反的一个极端——原始论文．这儿所遇到的困难是不容忽视的，我只有勇气列出一篇这样的论文，即第 IV 部分引语的出处．它甚至不是用英文写的，虽则你确有选择外语的自由．原法文文章刊于

[54] *Oeuvres Complètes d'Abel*; Christiania. Johnson Reprint Corporation, New York, 1965.

它最先以德文译文出现在 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*(1) 1826 中．还有一层困难，这些参考书通常只是在大学的图书馆里才会找得着的．虽然如此，但研究这篇论文可能会具有和这里提及的任一其他读物同样的价值．其理由已经由阿贝尔自己说明过，他将他的渊博的数学知识归因于他读了那些为教师而写的书，而不是那些为学生而写的书．

符 号 表